выводит нас из дебрей римановой геометрии и по духу соответствует современным теориям в физике элементарных частиц. Как следствие данной теории, общий принцип относительности Эйнштейна лишен физического смысла и не имеет никакого содержания [9].

§ 33. Инертная масса в общей теории относительности

Равенство инертной и гравитационной масс одного и того же тела Эйнштейн рассматривал как точный закон природы, который должен найти отражение в его теории. В настоящее время принято считать доказанным, что в общей теории относительности гравитационная масса (или, как ее иногда называют, тяжелая масса) системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, равна ее инертной массе. Такое, например, утверждение содержится в работах Эйнштейна [8], Толмена [48] и Вейля [49]. Впоследствии «доказательство» этой теоремы с различными видоизменениями было проведено и рядом других авторов [14, 32, 47].

Однако этот вывод является неправильным. Следуя работам [31, 34], покажем, в чем состоит его ошибочность.

Тяжелая масса M произвольной физической системы, покоящейся как целое относительно галилеевской на бесконечности шварцшильдовской системы координат, определялась Эйнштейном [8] как величина, стоящая множителем при члене $-2G/(c^2r)$ в асимптотическом выражении ($r \longrightarrow \infty$) для компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени

$$g_{00} = 1 - \frac{2G}{c^2 r} M.$$

Несколько иное определение гравитационной массы дал Толмен [48]:

$$M = \frac{c^2}{4\pi G} \int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV. \qquad (33.1)$$

Из этих определений непосредственно следует, что величина гравитационной массы при преобразованиях трехмерных координат не изменяется, поскольку как компонента R_0^0 тензора Риччи, так и компонента g_{00}

метрического тензора в данном случае преобразуются аналогично скалярам.

Эти определения в случае статического сферически симметричного источника являются эквивалентными. Покажем теперь, что они эквивалентны и для любых статических систем. Чтобы в этом убедиться, запишем компоненту R_0^0 в виде

$$R_0^0 = g^{0i}\left[\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma_{0i}^l - \frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma_{pi}^p + \Gamma_{0i}^n\Gamma_{np}^p - \Gamma_{pi}^n\Gamma_{n0}^p\right].$$

После тождественных преобразований из этого выражения получим

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\sqrt{-g}\,g^{0n}\Gamma_{0n}^\alpha\right] - g^{0i}\frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma_{ni}^n - \\ - \frac{1}{2}\Gamma_{ni}^0\frac{\partial g^{ni}}{\partial x^0} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^0}\left[\sqrt{-g}\,g^{0n}\Gamma_{0n}^0\right]. \qquad (33.2)$$

Поскольку для статических систем последними тремя членами можно пренебречь, то из выражения (33.1) имеем

$$M = \frac{c^2}{4\pi G}\oint \sqrt{-g}\,g^{0n}\Gamma_{0n}^\alpha\,dS_\alpha. \qquad (33.3)$$

Так как достаточно далеко от статической системы ее метрика с заданной точностью может быть описана метрикой Шварцшильда, то выражение (33.3) принимает вид

$$M = -\frac{c^2}{8\pi G}\lim_{r\to\infty}\oint g^{00}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\,dS^\alpha. \qquad (33.4)$$

Поскольку подынтегральное выражение в соотношении (33.1) является скаляром при любых преобразованиях трехмерной системы координат, то и величина гравитационной массы M не будет зависеть от выбора координат. В шварцшильдовских координатах из выражения (33.4) имеем

$$M = \frac{c^2}{2G}\lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial g_{00}}{\partial r}\right) = \frac{c^2}{2G}\lim_{r\to\infty}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(1 - \frac{2G}{c^2 r}M\right)\right].$$

Таким образом, гравитационная масса любой статической системы, согласно определению Толмена, является множителем при члене $-2G/(c^2 r)$ в асимптотическом выражении для компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени. Следовательно, определения тяжелой массы, данные Эйнштейном и Толменом, для статических систем совпадают.

Понятие инертной массы физической системы в общей теории относительности Эйнштейн тесно связывал с понятием энергии этой системы [8]: «... величина, которую мы интерпретировали как энергию, играет роль также инертной массы, в соответствии со специальной теорией относительности». Поскольку в общей теории относительности расчет энергии системы Эйнштейн предложил проводить с использованием псевдотензоров энергии-импульса, то и вычисление инертной массы осуществляется на основе выражения

$$m_i = \frac{1}{c} P^0 = \frac{1}{c^2} \int (-g) \left[T^{00} + \tau^{00}\right] dV = \frac{1}{c^2} \oint h^{00\alpha} dS_\alpha .$$

Определим в соответствии с этим соотношением инертную массу сферически симметричного источника гравитационного поля и изучим ее трансформационные свойства при преобразованиях координат.

В изотропных декартовых координатах метрика риманова пространства-времени имеет вид

$$g_{00} = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{4r}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_g}{4r}\right)^2}; \quad g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{r_g}{4r}\right)^4 . \tag{33.5}$$

Здесь

$$r_g = \frac{2G}{c^2} M .$$

Эти координаты являются асимптотически галилеевскими, поскольку при $r \to \infty$ справедливы оценки

$$g_{00} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right); \quad g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) . \tag{33.6}$$

Используя ковариантные компоненты метрики (33.5), из выражения

$$h^{ikl} = \frac{c^4}{16\pi G} \frac{\partial}{\partial x^m} \left[-g \left(g^{ik} g^{ml} - g^{il} g^{mk}\right)\right]$$

имеем

$$h^{00\alpha} = -\frac{c^4}{16\pi G}\frac{\partial}{\partial x^\beta}[g_{11}g_{22}g_{33}g^{\alpha\beta}].$$

Подставляя это выражение в соотношение

$$P^i = \frac{1}{c}\oint h^{0i\alpha}\,dS_\alpha = \mathrm{const}, \tag{33.7}$$

учитывая, что

$$dS_\alpha = -\frac{x_\alpha}{r}r^2\sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi,$$

и проводя интегрирование по бесконечно удаленной поверхности, получим

$$P^0 = \frac{c^3}{16\pi G}\lim_{r\to\infty} r^2\int\frac{x_\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial x^\beta}[-g_{11}g_{22}g_{33}g^{\alpha\beta}]\sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi. \tag{33.8}$$

Таким образом, компонента P^0 не зависит от компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени. Из выражений (33.5) и (33.8) с учетом соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}f(r) = -\frac{x_\beta}{r}\frac{\partial}{\partial r}f(r), \tag{33.9}$$

где

$$x_\alpha x^\alpha = -r^2,$$

для компоненты P^0 «энергии-импульса» системы имеем

$$P^0 = \frac{c^3 r_g}{2G} = Mc. \tag{33.10}$$

Именно это совпадение «инертной массы» с тяжелой массой давало основание для утверждения об их равенстве в общей теории относительности [47]: «... $P^\alpha = 0$, $P^0 = Mc$ — результат, который естественно было ожидать. Он является выражением факта равенства, как говорят, «тяжелой» и «инертной» масс («тяжелой» называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле, — это та масса, которая входит в метрический тензор в гравитационном поле или, в частности, в закон Ньютона: «инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой массе, умноженной на c^2)».

Однако такое утверждение Эйнштейна [8] и других авторов [14, 32, 46—48] является неправильным. Как легко убедиться, «энергия» системы, а следовательно, и ее «инертная масса» не имеют никакого физического смысла, поскольку их величина зависит даже от выбора трехмерной системы координат.

Действительно, элементарным требованием, которому должно удовлетворять определение инертной массы, является условие независимости ее величины от выбора трехмерной системы координат, что имеет место в любой физической теории. Однако в общей теории относительности определение «инертной массы» этому требованию не удовлетворяет.

Покажем, например, что в случае решения Шварцшильда величина «инертной массы» может принимать любые значения, в зависимости от выбора системы пространственных координат. Для этого совершим переход от трехмерных декартовых координат $x_{\text{с}}^{\alpha}$ к другим координатам $x_{\text{н}}^{\alpha}$, связанным со старыми координатами соотношением

$$x_{\text{с}}^{\alpha}=x_{\text{н}}^{\alpha}\left[1+f\left(r_{\text{н}}\right)\right], \tag{33.11}$$

где

$$r_{\text{н}}=\sqrt{x_{\text{н}}^{2}+y_{\text{н}}^{2}+z_{\text{н}}^{2}},$$

а $f(r_{\text{н}})$ — произвольная несингулярная функция, удовлетворяющая условиям

$$f(r_{\text{н}})\geqslant 0; \qquad \lim_{r_{\text{н}}\to\infty} f(r_{\text{н}})=0; \qquad \lim_{r_{\text{н}}\to\infty} r_{\text{н}}\frac{\partial}{\partial r_{\text{н}}} f(r_{\text{н}})=0. \tag{33.12}$$

Легко убедиться, что преобразование (33.11) соответствует изменению арифметизации точек трехмерного пространства вдоль радиуса

$$r_{\text{с}}=r_{\text{н}}\left[1+f\left(r_{\text{н}}\right)\right].$$

Чтобы преобразование (33.11) имело обратное и являлось взаимно однозначным, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\partial r_{\text{с}}}{\partial r_{\text{н}}}=1+f+r_{\text{н}}f'>0,$$

где

$$f' = \frac{\partial}{\partial r_{\text{н}}} f(r_{\text{н}}).$$

Тогда якобиан преобразования будет отличен от нуля

$$J = \det \left\| \frac{\partial x_{\text{c}}}{\partial x_{\text{н}}} \right\| = (1+f)^2 \frac{\partial r_{\text{c}}}{\partial r_{\text{н}}} \neq 0.$$

В частности, всем поставленным требованиям удовлетворяет функция

$$f(r_{\text{н}}) = \alpha^2 \sqrt{\frac{8GM}{c^2 r_{\text{н}}}} \left[1 - \exp(-\varepsilon^2 r_{\text{н}})\right], \tag{33.13}$$

где α и ε — произвольные числа, отличные от нуля.

Поскольку в данном случае

$$\frac{\partial r_{\text{c}}}{\partial r_{\text{н}}} = 1 + \alpha^2 \sqrt{\frac{8GM}{c^2 r_{\text{н}}}} \left[\frac{1}{2} + \left(\varepsilon^2 r_{\text{н}} - \frac{1}{2}\right) \exp(-\varepsilon^2 r_{\text{н}})\right],$$

то r_{c} является монотонной функцией от $r_{\text{н}}$. Легко убедиться, что $f(r_{\text{н}})$ является неотрицательной, несингулярной функцией во всем пространстве. Якобиан преобразования в этом случае строго больше единицы

$$J = (1+f)^2 \frac{\partial r_{\text{c}}}{\partial r_{\text{н}}} > 1.$$

Поэтому преобразование (33.11) с функцией $f(r_{\text{н}})$, определенной выражением (33.13), имеет обратное преобразование и является взаимно однозначным.

Очевидно, что при преобразовании (33.11) величина гравитационной массы (33.1) не изменяется. Вычислим теперь величину «инертной массы» в новых координатах $x_{\text{н}}^{\alpha}$. Используя закон преобразования метрического тензора

$$g_{ni}^{\text{н}} = \frac{\partial x_{\text{c}}^l}{\partial x_{\text{н}}^n} \frac{\partial x_{\text{c}}^m}{\partial x_{\text{н}}^i} g_{ml}^{\text{c}}(x_{\text{c}}(x_{\text{н}})), \tag{33.14}$$

найдем компоненты метрики Шварцшильда (33.5) в новых координатах. В результате получим

$$g_{00}=\left[1-\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^2\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^{-2};$$

$$g_{\alpha\beta}=\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^4\left\{-\delta_{\alpha\beta}(1+f)^2-\right.$$
$$\left.-x^н_\alpha x^н_\beta\left[(f')^2+\frac{2}{r_н}f'(1+f)\right]\right\}. \qquad (33.15)$$

Определитель метрического тензора (33.15) равен

$$g=-g_{00}\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^{12}(1+f)^4\times$$
$$\times\left[(1+f)^2+r_н^2(f')^2+2r_нf'(1+f)\right]. \qquad (33.16)$$

Следует особо отметить, что метрика (33.15) является асимптотически галилеевой

$$\lim_{r_н\to\infty} g_{00}=1; \qquad \lim_{r_н\to\infty} g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}.$$

В частном случае, когда функция f задана соотношением (33.13) и $r_н\to\infty$, метрика риманова пространства-времени будет иметь следующую асимптотику:

$$g_{00}\simeq 1+O\left(\frac{1}{r_н}\right); \quad g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_н}}\right). \qquad (33.17)$$

Для контравариантных компонент метрики (33.15) имеем

$$g^{00}=\frac{1}{g_{00}}; \quad g^{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}A+x^\alpha_н x^\beta_н B, \qquad (33.18)$$

где введены обозначения

$$A=(1+f)^{-2}\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^{-4};$$

$$B=\frac{r_н(f')^2+2f'(1+f)}{r_н\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^4(1+f)^2\left[(1+f)^2+r_н^2(f')^2+2r_нf'(1+f)\right]}.$$

Подставляя выражения (33.16) и (33.18) в соотношение (33.8), получим

$$P^0=\frac{c}{16\pi G}\lim_{r_{\text{н}}\to\infty} r_{\text{н}}^2\int\frac{x_\alpha^{\text{н}}}{r_{\text{н}}}\frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}^\beta}\left\{-\delta^{\alpha\beta}(1+f)^2\left[1+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{r_g}{4r_{\text{н}}(1+f)}\right]^8\left[(1+f)^2+r_{\text{н}}^2(f')^2+2r_{\text{н}}f'(1+f)\right]+$$
$$\left.+\frac{x_{\text{н}}^\alpha x_{\text{н}}^\beta}{r_{\text{н}}^2}(1+f)^2\left[1+\frac{r_g}{4r_{\text{н}}(1+f)}\right]^8\left[r_{\text{н}}^2(f')^2+2r_{\text{н}}f'(1+f)\right]\right\}dV.$$

В силу соотношений (33.9) имеем

$$P^0=\frac{c^3}{2G}\lim_{r_{\text{н}}\to\infty}\left\{r_{\text{н}}^3(f')^2(1+f)^2\left[1+\frac{r_g}{4r_{\text{н}}(1+f)}\right]^8+\right.$$
$$\left.+r_g(1+f)^2(1+f+r_{\text{н}}f')\left[1+\frac{r_g}{4r_{\text{н}}(1+f)}\right]^7\right\}. \quad (33.19)$$

Учитывая асимптотическое выражение (33.12) для f, получим окончательно

$$P^0=\frac{c^3}{2G}\lim_{r_{\text{н}}\to\infty}\{r_g+r_{\text{н}}^3(f')^2\}. \quad (33.20)$$

Таким образом, величина «инертной массы» существенно зависит от скорости стремления f' к нулю при $r_{\text{н}}\to\infty$. В частности, выбирая функцию $f(r_{\text{н}})$ в виде (33.13), из выражения (33.20) имеем

$$m=M(1+\alpha^4). \quad (33.21)$$

Отсюда следует, что для «инертной массы» системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, в общей теории относительности мы можем получить, ввиду произвольности величины α, любое наперед заданное число $m\geqslant M$ в зависимости от выбора пространственных координат, хотя гравитационная (33.1) масса M этой системы, а следовательно, и все три эффекта общей теории относительности останутся при этом неизменными. Отметим также, что при более сложных преобразованиях пространственных координат, оставляющих метрику асимптотически галилеевой, «инертная масса» системы может принимать любые наперед заданные значения, как положительные, так и отрицательные.

Таким образом, мы видим, что в общей теории относительности величина «инертной массы», впервые введенная

Эйнштейном и заимствованная впоследствии многими авторами [14, 32, 46—48], зависит от выбора трехмерной системы координат, а поэтому она не имеет никакого физического смысла. Следовательно, и утверждения о равенстве «инертной» и «тяжелой» масс в теории Эйнштейна также не имеют никакого физического смысла. Это равенство имеет место в узком классе трехмерных систем координат, а так как «инертная» и гравитационная (33.1) массы имеют различные трансформационные законы, то при переходе к другим трехмерным системам координат их равенство уже не выполняется.

Кроме того, это определение «инертной массы» в общей теории относительности не удовлетворяет принципу соответствия с теорией Ньютона. Действительно, ввиду того, что «инертная масса» m в теории Эйнштейна зависит от выбора трехмерной системы координат, то ее выражение в общем случае произвольной трехмерной системы координат не перейдет в соответствующее выражение теории Ньютона, в которой «инертная масса» не зависит от выбора пространственных координат. Таким образом, в общей теории относительности отсутствует классический ньютоновский предел, а следовательно, она не удовлетворяет и принципу соответствия.

В этой связи возникает вопрос: почему же до сих пор не была вскрыта бессмысленность определения

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{0i\alpha}\, dS_\alpha = \mathrm{const}$$

«энергии-импульса» системы и ее «инертной массы» в общей теории относительности?

Это можно объяснить только тем обстоятельством, что обычно все вычисления «энергии-импульса» и «инертной массы» проводились в некотором узком классе систем трехмерных координат, в котором совпадение «инертной» и гравитационной масс имеет место.

В этом же классе координатных систем выражение для «инертной массы» в ньютоновском приближении совпадает с соответствующим выражением теории Ньютона, что и создало иллюзию наличия классического предела в общей теории относительности. Подумать же о физическом смысле введенной «инертной массы» в общей теории относительности, по-видимому, считали излишним.