§ 34. Принцип геометризации и общие соотношения в релятивистской теории гравитационного поля

Не ограничивая общности, будем считать, что тензорная плотность метрического тензора риманова пространства-времени $\tilde{g}^{ik}$ является локальной функцией, зависящей от плотности метрического тензора пространства Минковского $\tilde{\gamma}^{ik}$ и плотности тензора гравитационного поля $\tilde{\varphi}^{ik}$.

Плотность лагранжиана вещества $\mathfrak{L}_{\text{м}}$ будем считать зависящей только от полей φ_A, их ковариантных производных первого порядка, а также, в силу принципа геометризации, от плотности метрического тензора $\tilde{g}^{ik}$. Плотность лагранжиана гравитационного поля будем считать зависящей от плотности метрического тензора $\tilde{\gamma}^{ik}$, его частных производных первого порядка, а также от плотности гравитационного поля $\tilde{\varphi}^{ik}$ и его ковариантных производных первого порядка по метрике Минковского. Для получения законов сохранения мы воспользуемся инвариантностью действия при бесконечно малом смещении координат. Поскольку для любой заданной плотности лагранжиана $\mathfrak{L}$ действие

$$S=\int \mathfrak{L}\, d^4x$$

является скаляром, то при произвольном бесконечно малом преобразовании координат вариация δS будет равна нулю.

Вычислим сначала вариацию действия вещества

$$S_{\text{м}}=\int \mathfrak{L}_{\text{м}}\, d^4x$$

при преобразовании

$$x'^i=x^i+\xi^i(x), \tag{34.1}$$

где $\xi^i(x)$ — бесконечно малый 4-вектор смещения,

$$\delta S_{\text{м}}=\int d^4x\left[\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{g}^{mn}}\,\delta_{\mathrm{L}}\tilde{g}^{mn}+\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A}\,\delta_{\mathrm{L}}\varphi_A+\mathrm{Div}\right]=0. \tag{34.2}$$

В (34.2) Div обозначает дивергентные члены, которые в данном разделе несущественны для нашего рассмотрения.

Эйлерова вариация определена, как обычно:

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi} \equiv \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi} - \partial_n \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)} + \partial_n\partial_k \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\partial_k\varphi)} - \ldots$$

Вариации $\delta_L\tilde{g}^{mn}$, $\delta_L\varphi_A$ при преобразовании координат (34.1) легко вычисляются, если использовать их закон преобразования:

$$\delta_L\tilde{g}^{mn} = \tilde{g}^{kn}D_k\xi^m + \tilde{g}^{km}D_k\xi^n - D_k(\xi^k\tilde{g}^{mn}); \qquad (34.3)$$

$$\delta_L\varphi_A = -\xi^k D_k\varphi_A + F^{B;\,n}_{A;\,k}\varphi_B D_n\xi^k. \qquad (34.4)$$

Здесь и далее D_k — ковариантная производная по метрике Минковского. Подставляя эти выражения в (34.2) и интегрируя по частям, получим

$$\delta S_{\text{м}} = \int d^4x \left\{ -\xi^m \left[D_k\left(2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{g}^{mn}}\tilde{g}^{kn}\right) - D_m\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{g}^{lp}}\right)\tilde{g}^{lp} + D_k\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}F^{B;\,k}_{A;\,m}\varphi_B\right) + \frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}D_m\varphi_A\right] + \mathrm{Div}\right\} = 0.$$

В силу произвольности вектора ξ^m из условия $\delta S_{\text{м}} = 0$ находим сильное тождество

$$D_k\left(2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{g}^{mn}}\tilde{g}^{kn}\right) - D_m\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{g}^{lp}}\right)\tilde{g}^{lp} = -D_k\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}F^{B;\,k}_{A;\,m}\varphi_B\right) - \frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}D_m\varphi_A, \qquad (34.5)$$

справедливое независимо от выполнения уравнений движения для полей.

Введем обозначения

$$T_{mn} = 2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta g^{mn}};\qquad T^{mn} = -2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta g_{mn}} = g^{mk}g^{lp}T_{kp}; \qquad (34.6а)$$

$$\tilde{T}_{mn} = 2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{g}^{mn}};\qquad \tilde{T}^{mn} = -2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{g}_{mn}} = \tilde{g}^{mk}\tilde{g}^{np}\tilde{T}_{kp}. \qquad (34.6б)$$

T_{mn} является плотностью тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве и называется плотностью тензора Гильберта.

Учитывая (34.6б), левую часть соотношения (34.5) можно представить в следующем виде:

$$D_k(\tilde{T}_{mn}\tilde{g}^{kn})-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kp}D_m\tilde{T}_{kp}=\partial_k(\tilde{T}_{mn}\tilde{g}^{kn})-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kp}\partial_m\tilde{T}_{kp}.$$

Правая часть этого равенства легко приводится к форме

$$\partial_k(\tilde{T}_{mn}\tilde{g}^{kn})-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kp}\partial_m\tilde{T}_{kp}=\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right), \qquad (34.7)$$

где $\tilde{T}=\tilde{g}_{kp}\tilde{T}^{kp}$, а ∇_k — ковариантная производная по метрике риманова пространства.

На основании (34.7) сильное тождество можно записать в виде

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right)=-D_k\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}F^{B;\,k}_{A;\,m}\varphi_B\right)-\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}D_m\varphi_A. \qquad (34.8)$$

В силу принципа наименьшего действия уравнения движения для полей вещества имеют вид

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}=0. \qquad (34.9)$$

Учитывая эти уравнения, из (34.8) найдем слабое тождество

$$\nabla_m\left(\tilde{T}^{mn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{mn}\tilde{T}\right)=0. \qquad (34.10)$$

Заметим, что плотность тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве T^{mn} связана с $\tilde{T}^{mn}$ соотношением

$$\sqrt{-g}\,T^{mn}=\tilde{T}^{mn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{mn}\tilde{T}. \qquad (34.11)$$

Поэтому из выражения (34.10) получаем ковариантное уравнение сохранения вещества в римановом пространстве

$$\nabla_m T^{mn}=0. \qquad (34.12)$$

Если число уравнений для поля вещества равно четырем, то в этом и только в этом случае вместо уравнений для этого поля (34.9) всегда можно пользоваться эквивалентными уравнениями (34.12). Вариацию интеграла действия

(34.2) можно записать в эквивалентном виде

$$\delta S_{\text{м}} = \int d^4x \left\{ \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\varphi}^{mn}} \delta_{\text{L}} \tilde{\varphi}^{mn} + \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\gamma}^{mn}} \delta_{\text{L}} \tilde{\gamma}^{mn} + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} \delta_{\text{L}} \varphi_A + \text{Div} \right\} = 0. \quad (34.13)$$

При этом вариации $\delta_{\text{L}} \tilde{\varphi}^{mn}$, $\delta_{\text{L}} \tilde{\gamma}^{mn}$ при преобразовании координат (34.1) равны

$$\delta_{\text{L}} \tilde{\varphi}^{mn} = \tilde{\varphi}^{kn} D_k \xi^m + \tilde{\varphi}^{km} D_k \xi^n - D_k (\xi^k \tilde{\varphi}^{mn}); \quad (34.14)$$
$$\delta_{\text{L}} \tilde{\gamma}^{mn} = \tilde{\gamma}^{kn} D_k \xi^m + \tilde{\gamma}^{km} D_k \xi^n - \tilde{\gamma}^{mn} D_k \xi^k. \quad (34.15)$$

Подставляя выражения для вариаций $\delta_{\text{L}} \tilde{\varphi}^{mn}$, $\delta_{\text{L}} \tilde{\gamma}^{mn}$, $\delta_{\text{L}} \varphi_A$ в (34.13) и интегрируя по частям, в силу произвольности ξ^m, получим сильное тождество

$$D_k \left(2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\varphi}^{mn}} \tilde{\varphi}^{kn} \right) - D_m \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\varphi}^{kp}} \right) \tilde{\varphi}^{kp} + D_k \left(2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\gamma}^{mn}} \tilde{\gamma}^{kn} \right) -$$
$$- D_m \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\gamma}^{kp}} \tilde{\gamma}^{kp} \right) = - D_k \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} F_{A;\,m}^{B;\,k} \varphi_B \right) - \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} D_m \varphi_A, \quad (34.16)$$

которое, как и (34.5), справедливо независимо от выполнения уравнений движения вещества и гравитационного поля.

Для любого лагранжиана введем некоторые обозначения и соотношения, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\tilde{t}^{mn} = -2 \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \tilde{\gamma}_{mn}}; \quad t^{mn} = -2 \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \gamma_{mn}}; \quad (34.17\text{а})$$
$$t^{mn} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \left(\tilde{t}^{mn} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{mn} \tilde{t} \right). \quad (34.17\text{б})$$

Так как $\mathfrak{L}_{\text{м}}$, в силу принципа геометризации зависит от $\tilde{\gamma}^{mn}$ только через $\tilde{g}^{mn}$, легко найти связь между $\tilde{t}_{\text{м}\,mn}$ и $\tilde{T}_{mn}$

$$t_{\text{м}\,mn} = 2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\gamma}^{mn}} = \tilde{T}_{kp} \frac{\partial \tilde{g}^{kp}}{\partial \tilde{\gamma}^{mn}}. \quad (34.18\text{а})$$

Здесь учтено определение (34.6б).

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial \tilde{g}^{kp}}{\partial \tilde{\gamma}_{mn}} = -\tilde{\gamma}^{ml} \tilde{\gamma}^{nq} \frac{\partial \tilde{g}^{pk}}{\partial \tilde{\gamma}^{lq}},$$

на основании (34.17а) находим

$$\tilde{t}^{mn}_{\text{м}} = -\tilde{T}_{pk} \frac{\partial \tilde{g}^{pk}}{\partial \tilde{\gamma}_{mn}}. \tag{34.18б}$$

Учитывая в (34.18б) тождество (34.6б), а также соотношение $-\tilde{g}_{lp}\tilde{g}_{qk} \frac{\partial \tilde{g}^{lq}}{\partial \tilde{\gamma}_{mn}} = \frac{\partial \tilde{g}_{pk}}{\partial \tilde{\gamma}_{mn}}$, из (34.18б) получим

$$\tilde{t}^{mn}_{\text{м}} = \tilde{T}^{pk} \frac{\partial \tilde{g}_{pk}}{\partial \tilde{\gamma}_{mn}}. \tag{34.18в}$$

Теперь, сравнивая тождества (34.8) и (34.16), с учетом (34.17а), найдем

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right) = \tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}_{\text{м}} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}_{\text{м}}\right) + \\ + D_k\left(2\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\varphi}^{mn}}\tilde{\varphi}^{kn}\right) - D_m\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\varphi}^{kp}}\right)\tilde{\varphi}^{kp}. \tag{34.19}$$

Аналогичным образом из инвариантности действия гравитационного поля относительно преобразования координат (34.1) имеем

$$\tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}_{\text{g}} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}_{\text{g}}\right) + D_k\left(2\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{g}}}{\delta \tilde{\varphi}^{mn}}\tilde{\varphi}^{kn}\right) - \\ - D_m\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{g}}}{\delta \tilde{\varphi}^{kp}}\right)\tilde{\varphi}^{kp} = 0. \tag{34.20}$$

Складывая выражения (34.19) и (34.20), найдем

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right) = \tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}\right) + \\ + D_k\left(2\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \tilde{\varphi}^{mn}}\tilde{\varphi}^{kn}\right) - D_m\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \tilde{\varphi}^{kp}}\right)\tilde{\varphi}^{kp}. \tag{34.21}$$

Здесь и далее

$$\tilde{t}^{kn} = \tilde{t}^{kn}_{\text{g}} + \tilde{t}^{kn}_{\text{м}}. \tag{34.22}$$

Из принципа наименьшего действия уравнения для гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \tilde{\varphi}^{mn}} = \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{g}}}{\delta \tilde{\varphi}^{mn}} + \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{\varphi}^{mn}} = 0 \tag{34.23}$$

Учитывая эти уравнения, из (34.21) получим важнейшее равенство

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right)=\tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}\right). \quad (34.24)$$

Так как плотность полного тензора энергии-импульса в пространстве Минковского дается формулой

$$\sqrt{-\gamma}t^{kn}=\tilde{t}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}, \quad (34.25)$$

то, используя это выражение, а также (34.11), соотношение (34.24) запишем в виде

$$D_m t^m_n=\nabla_m T^m_n. \quad (34.26)$$

Последнее равенство является отражением принципа геометризации: ковариантная дивергенция в псевдоевклидовом пространстве от суммы плотностей тензоров энергии-импульса вещества и гравитационного поля точно равна ковариантной дивергенции в эффективном римановом пространстве только от плотности тензора энергии-импульса вещества. При выполнении уравнений движения вещества имеем

$$D_m t^m_n=\nabla_m T^m_n=0. \quad (34.27)$$

Из ковариантного уравнения сохранения вещества в римановом пространстве не ясно, что́ сохраняется, тогда как из закона сохранения полного тензора энергии-импульса t^m_n в пространстве Минковского ясно, что речь идет о сохранении энергии-импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Таким образом, в данной теории риманово пространство возникает как результат воздействия гравитационного поля на все виды материи, поэтому оно является эффективным римановым пространством полевого происхождения. Пространство Минковского находит свое точное физическое отражение в законах сохранения тензора энергии-импульса и момента количества движения вещества и гравитационного поля, вместе взятых.

Поскольку в плоском пространстве существует десять векторов Киллинга, то, следовательно, имеют место и десять сохраняющихся интегральных величин для замкнутой системы полей.

Так как уравнение сохранения полного тензора энергии-импульса в пространстве Минковского

$$D_m t_n^m = D_m (t_{gn}^m + t_{\text{м}n}^m) = 0 \qquad (34.28)$$

эквивалентно ковариантному уравнению сохранения вещества в римановом пространстве, а последнее эквивалентно уравнениям движения для вещества, то вместо уравнения движения вещества можно использовать (34.28).

Следует особо отметить, что как вещество, так и гравитационное поле в данной теории характеризуются тензорами энергии-импульса, а поэтому у нас, в отличие от ОТО, в принципе не возникают какие-либо псевдотензоры, а следовательно, и отсутствуют нефизические понятия о нелокализуемости гравитационной энергии.

Если бы мы, следуя Гильберту и Эйнштейну, взяли плотность лагранжиана гравитационного поля в полностью геометризованном виде, т. е. зависящем только от метрического тензора риманова пространства g^{ik} и их производных, например $\mathfrak{L}_g = \sqrt{-g}R$, где R — скалярная кривизна риманова пространства, то плотность тензора энергии-импульса свободного гравитационного поля в пространстве Минковского, в силу уравнений поля, всегда была бы равна нулю:

$$\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \gamma^{mn}} = \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta g^{pk}} \frac{\partial g^{pk}}{\partial \gamma^{mn}} = 0. \qquad (34.29)$$

Таким образом, на основе пространства Минковского с помощью тензорного физического поля, обладающего энергией и импульсом, в принципе нельзя построить полностью геометризованный лагранжиан гравитационного поля. Поэтому теория, построенная на основе полностью геометризованного лагранжиана, в принципе не может описать физическое гравитационное поле в духе Фарадея — Максвелла в пространстве Минковского. В литературе ранее утверждалось (см., например, [50]), что в пространстве Минковского с помощью тензорного поля спина 2 однозначно находится лагранжиан гравитационного поля ОТО, равный скалярной кривизне R. Однако эти работы не имеют никакого физического содержания, так как для введенного в них гравитационного поля тензор энергии-импульса равен нулю, как это видно из (34.29). Поэтому эти работы физически бессмысленны и результаты их ошибочны.