§ 35. Основное тождество

Как показано в работах [51], в пространстве Минковского симметричный тензор второго ранга f^{ik} может быть разложен в виде прямой суммы неприводимых представлений: одного представления — со спином 2, одного — со спином 1 и двух — со спином 0

$$f^{lm} = [P_2 + P_1 + P_0 + P_{0'}]^{lm}_{ik} f^{ik}, \tag{35.1}$$

где через P_s ($s = 2,\ 1,\ 0,\ 0'$) обозначены проекционные операторы, которые удовлетворяют стандартным соотношениям:

$$\begin{aligned} &P_s P^t = \delta^t_s P_t \quad \text{(здесь по } t \text{ нет суммирования!)};\\ &P^{in}_{s;\,in} = (2s+1);\\ &\sum_s P^{lm}_{s;\,ik} = \frac{1}{2}(\delta^l_i \delta^m_k + \delta^m_i \delta^l_k) \equiv \delta^{lm}_{ik}. \end{aligned} \tag{35.2}$$

Операторы P_s удобно сначала записать в импульсном представлении. Для этой цели введем вспомогательные (проекционные) величины

$$X_{ik} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\gamma_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2}\right); \quad Y_{ik} = \frac{q_i q_k}{q^2}. \tag{35.3}$$

Легко показать, что операторы P_s, удовлетворяющие (35.2), через (35.3) могут быть записаны в форме

$$P^{ml}_{0;\,ni} = X_{ni} X^{lm}; \quad P^{ml}_{0';\,ni} = Y_{ni} Y^{ml}; \tag{35.4}$$

$$P^{ml}_{1;\,ni} = \frac{\sqrt{3}}{2}[X^l_i Y^m_n + X^m_n Y^l_i + X^m_i Y^l_n + X^l_n Y^m_i]; \tag{35.5}$$

$$P^{ml}_{2;\,ni} = \frac{3}{2}[X^l_i X^m_n + X^m_i X^l_n] - X_{ni} X^{ml}. \tag{35.6}$$

Из (35.4)—(35.6) видно, что операторы $P^{ml}_{s;\,ni}$ симметричны по индексам (ml) и (ni).

В x-представлении проекционные операторы P_s являются нелокальными интегродифференциальными операторами

$$(P^{ml}_{s;\,ni} f^{ni}) = \int d^4y\, P^{lm}_{s;\,ni}(x-y) f^{ni}(y).$$

Явные выражения для $P^{lm}_{0;\,ni}(x)$ и $P^{ml}_{2;\,ni}(x)$ имеют вид

$$P^{lm}_{0;\,ki}(x) = \frac{1}{3}[\gamma^{lm}\gamma_{ik}\delta(x) + (\gamma^{lm}\partial_i\partial_k + \gamma_{ik}\partial^l\partial^m) D(x) + \partial_i\partial_k\partial^l\partial^m \Delta(x)]; \tag{35.7}$$

$$P^{lm}_{2;\,ki}(x)=\left(\delta^{lm}_{ik}-\frac{1}{3}\gamma^{lm}\gamma_{ik}\right)\delta(x)+$$
$$+\left[\frac{1}{2}\left(\delta^{l}_{i}\partial^{m}\partial_{k}+\delta^{m}_{k}\partial^{l}\partial_{i}+\delta^{l}_{k}\partial^{m}\partial_{i}+\delta^{m}_{i}\partial^{l}\partial_{k}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\left(\gamma^{lm}\partial_{i}\partial_{k}+\gamma_{ik}\partial^{l}\partial^{m}\right)\right]D(x)+\frac{2}{3}\partial^{l}\partial^{m}\partial_{i}\partial_{k}\Delta(x). \quad (35.8)$$

В (35.7) и (35.8) $D(x)$ является функцией Грина волнового уравнения

$$\Box D(x)=-\delta(x), \quad (35.9)$$

а

$$\Delta(x)=\int D(x-y)\,D(y)\,d^4y$$

и поэтому удовлетворяет уравнению

$$\Box\Lambda(x)=-D(x). \quad (35.10)$$

На основании формул (35.7)—(35.10) легко проверить, что операторы P_0 и P_2 являются сохраняющимися, т. е. для этих операторов имеют место тождества

$$\begin{aligned}\partial_l P^{lm}_{0;\,ni}(x)=\partial^n P^{lm}_{0;\,ni}(x)\equiv 0;\\ \partial_l P^{lm}_{2;\,ni}(x)=\partial^n P^{lm}_{2;\,ni}(x)\equiv 0.\end{aligned} \quad (35.11)$$

Операторы же P_1 и $P_{0'}$ этим свойством не обладают.

Из разложения (35.1) ясно, что если тензорное поле подчинено уравнению

$$\partial_l f^{lm}=0, \quad (35.12)$$

то в него не войдут представления со спинами 1 и 0′. Это значит, что такое тензорное поле описывает только спины 2 и 0.

Легко убедиться, что оператор

$$\Box\,(2P_0-P_2) \quad (35.13)$$

является единственным, локальным и сохраняющимся оператором второго порядка. Действуя этим оператором на функцию

$$\varphi^{in}-\frac{1}{2}\gamma^{in}\varphi,$$

где $\varphi=\gamma_{pq}\varphi^{pq}$, и, учитывая формулы (35.7)—(35.10), найдем

$$\Psi^{mn}=\partial_k\partial_p\left[\gamma^{nk}\varphi^{pm}+\gamma^{mk}\varphi^{pn}-\gamma^{kp}\varphi^{mn}-\gamma^{mn}\varphi^{kp}\right]. \quad (35.14)$$

Структура (35.14) для любого симметричного тензорного поля примечательна тем, что она является локальной, линейной, содержит производные только второго порядка и удовлетворяет закону сохранения, т. е. дивергенция от Ψ^{mn} тождественно равна нулю:

$$\partial_m \Psi^{mn} = 0. \qquad (35.15)$$

В дальнейшем нам понадобится структура (35.14), написанная в терминах ковариантных по метрике Минковского производных для плотности метрического тензора $\tilde{g}^{lm}$:

$$J^{mn} = D_k D_p \left[\gamma^{np}\tilde{g}^{km} + \gamma^{pm}\tilde{g}^{kn} - \gamma^{kp}\tilde{g}^{mn} - \gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}\right]. \qquad (35.16)$$

Из (35.16) очевидно, что выполняется тождество

$$D_m J^{mn} \equiv 0, \qquad (35.17)$$

которое мы назовем основным, поскольку оно имеет фундаментальное значение при построении релятивистской теории гравитации.

§ 36. Уравнения релятивистской теории гравитации

В основу релятивистской теории гравитации (РТГ) [30], которая завершила развитие идей, изложенных в работе [44], мы положили следующие физические требования:

I. В теории должны строго выполняться законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения для вещества и гравитационного поля вместе взятых. Под веществом мы понимаем все формы материи (включая и электромагнитное поле) за исключением гравитационной. Законы сохранения отражают общие динамические свойства материи и позволяют ввести единые характеристики для различных ее форм. Общие динамические свойства материи, определяемые законами сохранения, находят воплощение в структуре геометрии пространства-времени. Она с необходимостью оказывается псевдоевклидовой (пространство Минковского). Таким образом, геометрия задается не соглашением, как считал Пуанкаре, а однозначно определяется общими динамическими свойствами материи — законами сохранения.