§ 37. О неоднозначности предсказаний ОТО для гравитационных эффектов и основные положения РТГ

Отсутствие в ОТО законов сохранения — не единственный ее принципиальный недостаток. Как будет видно из дальнейшего, неоднозначность предсказаний органически присуща ОТО и распространяется на все гравитационные эффекты. Покажем это на примере эффекта гравитационной задержки радиосигнала в поле статического центрально-симметричного тела массы M.

Отправляясь от уравнения Гильберта — Эйнштейна (36.36), мы должны учесть, что заложенные в это уравнение пространственно-временные координаты x^μ представляют собой некое многообразие, фиксируемое выбираемой арифметизацией пространства-времени. Не будет поэтому ограничением общности, если, уславливаясь об арифметизации пространства, мы сопоставим в переменных $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$ центру S тела M точку $r = r_S = 0$, любой точке поверхности этого тела (считая его шарообразным) — значение $r = r_f$, положению источника радиоимпульсов — точку $e(r_1, \varphi_1, \theta_1 = \pi/2)$ и положению приемника или рефлектора, отражающего сигналы обратно в точку e, — точку $p(r_2, \varphi_2, \theta_2 = \pi/2)$. В выбранной арифметизации одним из общих внешних (по отношению к телу M) решений уравнений Гильберта — Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu}_M,$$

(где $R^{\mu\nu}$ — тензор Риччи, $R = R^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$) будет (вне тела) решение [56] с произвольной функцией $C(r)$:

$$g_{kl} = -C\delta_{kl} + (C - A)\frac{x^k x^n}{r^2}, \quad g_{00} = B, \quad g = -BAC^2,$$

$$g^{kn} = -\frac{\delta_{kn}}{C} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\frac{x^k x^n}{r^2}, \quad g^{00} = \frac{1}{B},$$

в котором

$$B = 1 - \frac{2GM}{r\sqrt{C}}, \quad A = C\left(1 + \frac{rC'}{2C}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{r\sqrt{C}}\right)^{-1},$$

$C' \equiv \dfrac{\partial C}{\partial r}$. Что же касается функции $C(r)$, то от нее требуется только, чтобы она была гладкой и $\lim\limits_{r \to \infty} C(r) \longrightarrow 1$.

Данный произвол и ведет в итоге к неоднозначности предсказаний ОТО для гравитационных эффектов (как и в неопределенности энергии-импульса гравитационного поля (ГП)) в поле центрально-симметричного источника. Действительно, взяв, например,

$$C(r) = 1 \quad \text{или} \quad C(r) = (1 + GM/r)^2, \tag{37.1}$$

получим два следующих разных частных решения для $g_{\mu\nu}(r,\ GM)$, определяющих элемент ds^2:

$$ds^2=\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad (37.2)$$

в первом случае и

$$ds^2=\left(\frac{r-GM}{r+GM}\right)dt^2-\left(\frac{r+GM}{r-GM}\right)dr^2-r^2\left(1+\frac{GM}{r}\right)^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad (37.3)$$

во втором. При этом в обоих решениях координата r — одна и та же (как и t, θ, φ), т. е. и в (37.2), и в (37.3) точкам $r=r_s=0$, $r=r_f$, $e\,(r_1,\ \varphi_1,\ \theta_1=\pi/2)$ и $p\,(r_2,\ \varphi_2,\ \theta_2=\pi/2)$ соответствуют положения центра S тела M, его поверхности, источника и приемника (или рефлектора) радиоимпульсов.

Переход в (37.3) от координаты r к переменной $\rho\equiv r+GM$ преобразует (37.3) к виду, лишь по форме адекватному (37.2):

$$ds^2=\left(1-\frac{2GM}{\rho}\right)dt^2-\left(1-\frac{2GM}{\rho}\right)^{-1}d\rho^2-\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2). \qquad (37.2\text{a})$$

Однако по содержанию они существенно отличаются, так как в (37.2а) центру S тела M соответствует значение $\rho_s=+GM$, а в (37.2) $r_s=0$. Аналогично обстоит дело и при переходе в (37.2) от r к $\rho\equiv r-GM$, сводящему (37.2) к выражению, по виду сходному с (37.3), но по существу не эквивалентному (37.3), поскольку указанный переход меняет значение $r_s=0$ на значение $\rho_s=-GM$.

Пользуясь стандартными методами и ограничиваясь в расчетах первым порядком по G, для времени распространения в один конец получим (при $\varphi_2-\varphi_1>\pi/2$ и совпадении перицентра с r_f) выражения [57, 58]

$$t=\sqrt{r_p^2-r_f^2}+\sqrt{r_e^2-r_f^2}+$$
$$+GM\left\{2\ln\frac{r_p+\sqrt{r_p^2-r_f^2}}{r_e-\sqrt{r_e^2-r_f^2}}+\left[\left(\frac{r_p-r_f}{r_p+r_f}\right)^{1/2}+\left(\frac{r_e-r_f}{r_e+r_f}\right)^{1/2}\right]\right\} \qquad (37.4)$$

в случае решения (37.2) и

$$t=\sqrt{r_p^2-r_f^2}+\sqrt{r_e^2-r_f^2}+$$
$$+GM\left\{2\ln\frac{r_p+\sqrt{r_p^2-r_f^2}}{r_e-\sqrt{r_e^2-r_f^2}}+2\left[\left(\frac{r_p-r_f}{r_p+r_f}\right)^{1/2}+\left(\frac{r_e-r_f}{r_e+r_f}\right)^{1/2}\right]\right\} \qquad (37.5)$$

в случае решения (37.3). Перейдем в (37.4), (37.5) от чисел $r_{e,\,p,\,f}$ к физическим наблюдаемым величинам. Для этого, пользуясь соответственно метрикой (37.2) и (37.3), вычислим в том же первом порядке по G радиальные физические расстояния (измеряемые экспериментально) от поверхности r_f до r_e и r_p:

$$l_{e,\,p}=\int\limits_{r_f}^{r_{e,\,p}} dr\sqrt{-g_{rr}}=r_{e,\,p}-r_f+GM\ln(r_{e,\,p}/r_f). \qquad (37.6)$$

Как видно, в первом порядке по G они будут одинаковыми для обеих метрик. Вычислим, кроме того (в том же, естественно, первом порядке по G), относительный сдвиг частоты (измеряемый экспериментально) в гравитационном поле источника M:

$$\left.\frac{\Delta\omega}{\omega}\right|_{e,\,p}\equiv\delta_{e,\,p}=GM\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_{e,\,p}}\right) \qquad (37.7)$$

— опять-таки одинаковый (при выбранной точности) для обеих метрик. Пользуясь (37.6), (37.7), теперь можно выразить в (37.4), (37.5) $r_{e,\,p,\,f}$ через измеримые величины $l_{e,\,p}$ и $\delta_{e,\,p}$. Сравнивая после этого времена t распространения радиосигнала от e к p, вытекающие из (37.4) и (37.5), легко заметить их явное несовпадение, что и констатирует неоднозначность предсказаний ОТО для времени t, проявляющуюся в этом эффекте в величинах первого порядка по G.

При $r_f \ll r_{e,\,p}$ из (37.4), (37.5) с учетом (при выбранной точности) эффекта отклонения сигнала гравитационным полем источника следуют выражения

$$t=R+2GM\ln\frac{r_e+r_p+R}{r_e+r_p-R}-2GM, \qquad (37.4a)$$

$$t=R+2GM\ln\frac{r_e+r_p+R}{r_e+r_p-R}, \qquad (37.5a)$$

в которых

$$R=\sqrt{r_e^2-r_\perp^2}+\sqrt{r_p^2-r_\perp^2} \qquad (37.8)$$

— относительное расстояние (по прямой) между точками e и p, а $r_\perp$ — координата точки пересечения прямых, соединяющих e и p — с одной стороны, S и перицентр траектории сигнала — с другой.

Анализ других известных гравитационных эффектов, проведенный в [58—61], показывает, что в классе решений $C(r)=[1+(\lambda+1)(GM/r)]^2$, где λ — свободный параметр, неоднозначность предсказаний ОТО проявляется во всех без исключения эффектах.

Основные исходные положения РТГ можно кратко сформулировать следующим образом:

I. В качестве фундаментального, базового пространства в РТГ принимается пространство x^μ Минковского (с метрикой $\gamma^{\mu\nu}$). Это положение отражает присущее всей материи, независимо от ее природы, свойство универсальности законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения в отдельности.

II. Гравитационное поле в РТГ рассматривается как реальное (с нулевой массой покоя) физическое поле в этом пространстве со всеми присущими другим физическим полям атрибутами; ему сопоставляется полевой симметричный тензор $\Phi^{\mu\nu}$ второго ранга с представлениями, соответствующими спиновым состояниям два и нуль.

III. Плотность лагранжиана других форм материи (исключая ГП) в силу универсальности гравитационных взаимодействий и тензорвого характера ГП строится в РТГ на основе сверток с эффективным тензором $g^{\mu\nu}$, определяемым «подключением» гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$ к метрическому тензору $\gamma^{\mu\nu}$ по правилу

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{\mu\nu} + \sqrt{-\gamma}\, \Phi^{\mu\nu} \equiv \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\Phi}^{\mu\nu}; \quad (37.9)$$

при этом входящие в лагранжиан производные от негравитационных физических полей полагаются ковариантными производными ∇_μ по эффективной метрике $g^{\mu\nu}$.

Положение III, которое удобно назвать «принципом геометризации», вводит в теорию как следствие универсальности гравитационных взаимодействий и тензорного характера ГП вторичное понятие эффективного риманова пространства (с метрикой $g^{\mu\nu}$, заданной в одной карте), имеющего, как видно, чисто полевое происхождение; первичными понятиями в теории остаются пространство Минковского (с метрикой $\gamma^{\mu\nu}$) и гравитационное поле $\Phi^{\mu\nu}$ в этом пространстве. Принцип геометризации в РТГ не адекватен принципу эквивалентности в ОТО, поскольку в РТГ, как и в других физических полевых теориях, в силу тензорного (а не псевдотензорного) характера всех получаемых на основе РТГ физических величин плотность энергии ГП в точке никакими координатными преобразованиями нельзя обратить в нуль, хотя силовое действие ГП в точке скомпенсировать можно.

IV. Плотность лагранжиана гравитационного поля полагается в РТГ квадратичной функцией ковариантных по метрике $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского производных первого порядка $D_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}$.

На основе положений I — IV релятивистская теория гравитации строится однозначно.

Самым прямым путем построения удовлетворяющей положению IV (с учетом положений I — III) скалярной плотности $\mathcal{L}_g(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}, D_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu})$ лагранжиана свободного ГП в пространстве Минковского было бы ее представление в виде общей суперпозиции всевозможных сверток квадратичных по производным первого порядка $D_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}$ форм с тензорами $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ (см., например, [56, 62] *)). Здесь мы поступим несколько иначе: будем искать структуру $\mathcal{L}_g$, изначально опираясь на калибровочный принцип [62], требующий, чтобы плотность лагранжиана свободного ГП при преобразованиях вида

$$\delta_\varepsilon \tilde{\Phi}^{\mu\nu} \equiv \delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\lambda} D_\lambda \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\lambda} D_\lambda \varepsilon^\mu(x) - D_\lambda(\varepsilon^\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}) \quad (37.10)$$

изменялась не более чем на дивергенцию **):

$$\mathcal{L}_g \longrightarrow \mathcal{L}_g + D_\nu Q^\nu(x).$$

В (37.10) $\varepsilon^\nu(x)$ суть инфинитезимальные параметры калибровочного

---

*) С помощью калибровочного принципа плотность лагранжиана $\mathcal{L}_g$ определяется таким путем однозначно.

**) Калибровочное преобразование (37.10) поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ существенно отличается от его координатного ($x \longrightarrow x + \xi$) преобразования:

$$\delta_\varepsilon \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = \tilde{\Phi}^{\mu\lambda} D_\lambda \xi^\nu(x) + \tilde{\Phi}^{\nu\lambda} D_\lambda \xi^\mu(x) - D_\lambda(\xi^\lambda \tilde{\Phi}^{\mu\nu}).$$

преобразования, а операторы δ_ε, удовлетворяющие равенствам

$$(\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2}-\delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1})\,\tilde{g}^{\mu\nu}(x)=\delta_{\varepsilon_3}\tilde{g}^{\mu\nu}(x),$$

где

$$\varepsilon_3^\nu=\varepsilon_1^\mu D_\mu\varepsilon_2^\nu-\varepsilon_2^\mu D_\mu\varepsilon_1^\nu,$$

образуют алгебру Ли. Одновременно с этим необходимо учесть и требование положения II об исключении из состояний поля $\Phi^{\mu\nu}$ его представлений, соответствующих спиновым значениям 1 и 0′, что можно сделать, подчинив поле $\Phi^{\mu\nu}$ полевому уравнению

$$D_\mu\Phi^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}=0. \tag{37.11}$$

Следует особо подчеркнуть, что уравнение (37.11) не только исключает из рассмотрения нефизические спиновые состояния гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$, но и делает метрику $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского неустранимой из теории *), позволяя тем самым отделять проявления неинерциальности от проявлений ГП. Одновременно полевые уравнения (37.11) сужают класс возможных калибровочных преобразований (37.10) до многообразия 4-векторов $\varepsilon^\nu(x)$, удовлетворяющих уравнению

$$g^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\varepsilon^\nu(x)=0. \tag{37.12}$$

Переходя к построению уравнений, которые в совокупности с (37.11) образуют систему основных уравнений ГП, учтем, что простейшими плотностями, изменяющимися при преобразованиях (37.10) на дивергентную величину, являются

$$\sqrt{-g}\longrightarrow\sqrt{-g}-D_\nu(\varepsilon^\nu\sqrt{-g})$$

и

$$\sqrt{-g}\,R\longrightarrow\sqrt{-g}\,R-D_\nu(\varepsilon^\nu\sqrt{-g}\,R),$$

где R — скалярная кривизна эффективного риманова пространства-времени, определяемая равенством

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,R=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left[(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}-\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda})+\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu}-\partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\right]=\\=-\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}G^\sigma_{\lambda\sigma}-G^\lambda_{\mu\sigma}G^\sigma_{\nu\lambda})-D_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu}G^\sigma_{\mu\sigma}-\tilde{g}^{\mu\sigma}G^\nu_{\mu\sigma}),\end{aligned}$$

в котором

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

$$G^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\sigma\nu}+D_\nu g_{\sigma\mu}-D_\sigma g_{\mu\nu}).$$

К ним можно еще добавить член $\sim\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}$, также удовлетворяющий в силу (37.11) калибровочному принципу. Тогда в общем случае $\mathcal{L}_g$

---

*) В силу сказанного уравнение (37.11) не может иметь никакого отношения к координатным условиям.

можно представить в виде

$$\mathcal{L}_g = \lambda_1 \left(\sqrt{-g}\, R + D_\nu Q^\nu (x)\right) + \lambda_2 \sqrt{-g} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4 \sqrt{-\gamma}. \tag{37.13}$$

Здесь дивергентное слагаемое

$$D_\nu Q^\nu (x) = D_\nu \left(\tilde{g}^{\mu\nu} G^\sigma_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma} G^\nu_{\mu\sigma}\right)$$

добавлено (пользуясь калибровочным принципом) с целью исключить из $\mathcal{L}_g$ члены со вторыми производными, входящими в $\sqrt{-g}\, R$, а смысл остальных величин прояснится ниже.

Лагранжиан (37.13) дает следующее выражение для тензора энергии-импульса ГП в пространстве Минковского:

$$t^{\mu\nu}_{(g)} \equiv -2 \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = 2\sqrt{-\gamma} \left(\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\right) \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} + \\ + \lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \tag{37.14}$$

где

$$J^{\mu\nu} \equiv D_\alpha D_\beta \left(\gamma^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu} \tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta}\right). \tag{37.15}$$

Учитывая принцип наименьшего действия, из (37.14) получим две разные по виду, но идентичные по содержанию формы динамического уравнения ГП:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_2 g_{\mu\nu} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} = 0, \tag{37.16}$$

где

$$R_{\mu\nu} \equiv D_\lambda G^\lambda_{\mu\nu} - D_\mu G^\lambda_{\nu\lambda} + G^\sigma_{\mu\nu} G^\lambda_{\sigma\lambda} - G^\sigma_{\mu\lambda} G^\lambda_{\nu\sigma} \tag{37.17}$$

и

$$\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.18}$$

Чтобы в отсутствие гравитационного поля уравнение (37.16) удовлетворялось тождественно и $t^{\mu\nu}_{(g)} \equiv 0$, необходимо положить $\lambda_4 = -2\lambda_3$, $\lambda_2 = -2\lambda_3$. Значения λ_1 и λ_3 легко идентифицировать, записав (37.18) с учетом (37.11), (37.9):

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} + 2 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.19}$$

Наглядный вид (37.19) приобретает в галилеевых координатах:

$$\Box \Phi^{\mu\nu} + 2 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \Phi^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.19a}$$

Очевидно, что фактору $(+2\lambda_3/\lambda_1) \equiv m^2$ естественно придать смысл квадрата массы покоя ГП, а значение $(-1/\lambda_1)$ согласно принципу соответствия необходимо взять равным 16π, т. е.

$$\lambda_1 = -\frac{1}{16\pi}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = +\frac{m^2}{16\pi}, \quad \lambda_3 = \frac{-m^2}{32\pi}.$$

Таким образом, построенный на основе калибровочного принципа лагранжиан свободного ГП в пространстве Минковского в общем случае будет иметь вид

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\mu\nu}\left(G^{\lambda}_{\mu\nu}G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma}G^{\sigma}_{\nu\lambda}\right) - \frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right). \tag{37.20}$$

Соответствующие ему динамические уравнения ГП, дополнительные к уравнениям (37.11), могут быть представлены двумя полностью эквивалентными формами:

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}\left(g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{37.21}$$

или

$$D_\alpha D_\beta\left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu} - \gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu}\right) + m^2\left(\tilde{g}^{\mu\nu} - \tilde{\gamma}^{\mu\nu}\right) = 16\pi t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.22}$$

Отсюда следует, что для гравитационного поля, обладающего массой покоя, законы сохранения энергии-импульса $D_\mu t^{\mu\nu}_{(g)} = 0$ будут иметь место только при выполнении уравнений (37.11). Особо подчеркнем, что уравнения (37.21) или (37.22) не являются калибровочно инвариантными, даже если $\varepsilon^\nu(x)$ удовлетворяет (37.12). Это значит, что введение в лагранжиан массового члена снимает вырождение *) и однозначно определяет геометрию пространства-времени, а также плотность тензора энергии-импульса ГП.

Полная система уравнений свободного ГП имеет вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}\left(g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right) = 0, \qquad D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \tag{37.23}$$

или, в другой эквивалентной форме,

$$\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} + m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}_{(g)}, \qquad D_\mu \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 0. \tag{37.24}$$

При наличии других форм материи полная плотность лагранжиана в силу положений III, IV представляется в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M\left(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_a\right) + \mathcal{L}_g\left(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}, D_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}\right), \tag{37.25}$$

где Φ_a — поля материи (исключая ГП), а $\mathcal{L}_g$ дается уравнением (37.20). Это приводит к следующим динамическим уравнениям:

$$D_\alpha D_\beta\left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\nu\beta} - \gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu}\right) + m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}. \tag{37.26}$$

Здесь $t^{\mu\nu}$ является плотностью симметричного тензора энергии-импульса всей материи $\left(t^{\mu\nu} = t^{\mu\nu}_{(g)} + t^{\mu\nu}_{(M)}\right)$ в пространстве Минковского. Уравнения (37.26) тождественно приводятся к уравнениям

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}\left(g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right) = \frac{8\pi G}{\sqrt{-g}}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right), \tag{37.27}$$

---

*) Без массового члена уравнение (37.22) калибровочно инвариантно.

где $T^{\mu\nu} = -2(\delta\mathscr{L}_M/\delta g_{\mu\nu})$ — плотность тензора энергии-импульса негравитационных видов материи в эффективном римановом пространстве. Учитывая полевые уравнения (37.11), приходим в итоге к принципиально отличной от ОТО системе равноправных по своей значимости основных динамических уравнений РТГ:

$$\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\mu\nu} + m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu} \equiv \gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} + m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}, \tag{37.28}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} \equiv D_\mu \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 0, \tag{37.29}$$

или, в эквивалентной форме,

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}) = \frac{8\pi G}{\sqrt{-g}}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right), \tag{37.28a}$$

$$D_\mu g^{\mu\nu} = 0. \tag{37.29a}$$

В уравнениях (37.28), (37.29) или (37.28a), (37.29a) все полевые переменные являются функциями координат пространства Минковского, а метрика $\gamma^{\mu\nu}$ этого пространства входит в уравнения неустранимым образом. При заданных граничных и начальных условиях решение основной системы РТГ будет обладать свойством единственности *), благодаря чему получаемые с ее помощью физические величины и предсказания также будут однозначными. В силу полевых уравнений (37.29) из (37.28) непосредственно следует закон сохранения энергии-импульса $D_\mu t^{\mu\nu} = 0$, не содержащий никаких неоднозначностей [63], поскольку метрика $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского органически входит в уравнения РТГ. Подчеркнем еще раз, что этот закон имеет место только при выполнении полевых уравнений (37.29). Если исходить из (37.28a), то, учитывая равенства

$$\nabla_\lambda \gamma_{\mu\nu} = -G^\sigma_{\lambda\mu}\gamma_{\sigma\nu} - G^\sigma_{\lambda\nu}\gamma_{\mu\sigma}, \qquad D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\,(D_\mu g^{\mu\nu} + G^\lambda_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}) = 0,$$

где ∇_λ — ковариантная производная по метрике $g_{\mu\nu}$ эффективного риманова пространства, придем к другой форме записи закона сохранения:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Положим далее формально массу покоя ГП равной нулю. Тогда

$$\mathscr{L}_g = \frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}G^\sigma_{\nu\lambda}), \tag{37.20a}$$

а динамические уравнения свободного ГП примут вид

$$D_\alpha D_\beta(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\nu\beta} - \gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu}) = 16\pi t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.22a}$$

Это уравнение инвариантно относительно допустимых калибровочных преобразований. В то же время тензор $t^{\mu\nu}_{(g)}$ поля не будет калибровочно инвариантным, однако в силу того, что его изменение $\delta_\varepsilon t^{\mu\nu}_{(g)}$

---

*) С учетом уравнения состояния вещества система (37.28), (37.29) или (37.28a), (37.29a) становится замкнутой системой уравнений, определяющей динамику как поля, так и вещества.

при преобразовании (37.10), как легко убедиться, пользуясь (37.22а), приводится к дивергенции от антисимметричного тензора третьего ранга:

$$\delta_\varepsilon t^{\mu\nu}_{(g)} = -\frac{1}{4\pi} D_\lambda D_\sigma \delta_\varepsilon \Pi^{[\mu\sigma][\nu\lambda]},$$

где

$$\Pi^{[\mu\sigma][\nu\lambda]} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{\lambda\mu}\tilde{g}^{\nu\sigma} + \gamma^{\sigma\nu}\tilde{g}^{\mu\lambda} - \gamma^{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\lambda\sigma}\right),$$

калибровочный произвол $t^{\mu\nu}_{(g)}$ не отразится на определяемых интегральных физических характеристиках [56]. Не будут калибровочно инвариантными и такие величины, как интервал эффективного риманова пространства-времени и соответственно геометрические характеристики последнего [62].

При наличии других форм материи («вещества») полная плотность лагранжиана будет определяться выражением (37.25) с $\mathcal{L}_g$ из (37.20а). Соответствующие ему динамические уравнения примут вид

$$D_\alpha D_\beta \left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\nu\beta} - \gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu}\right) = 16\pi t^{\mu\nu}.$$

Из-за наличия «вещества» эти уравнения уже не будут калибровочно инвариантными и, следовательно, теория лишается калибровочного произвола [62].

Совместно с (37.11) система основных уравнений РТГ будет иметь вид

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}, \tag{37.30}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} \equiv D_\mu \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 0, \tag{37.31}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\sqrt{-g}\, R^{\mu\nu} = 8\pi G\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T\right), \tag{37.30a}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{37.31a}$$

Хотя уравнения (37.30а) формально по виду и совпадают с уравнениями Гильберта—Эйнштейна, смысл их иной, поскольку полевые переменные в них зависят от координат пространства Минковского, а совместная система содержит метрику пространства Минковского неустранимым образом.

Именно то принципиальное обстоятельство, что полная система уравнений РТГ (включая как уравнения вещества, так и уравнения ГП) органически содержит, кроме полевых переменных вещества и метрического тензора эффективного риманова пространства, еще и метрический тензор пространства Минковского, позволяет РТГ рассматривать все физические поля, в том числе и гравитационное, в едином пространстве Минковского. В ОТО этого сделать нельзя, поскольку ее уравнения не содержат метрического тензора пространства Минковского.

Введение в теорию полевого уравнения (37.31), делающего метрику пространства Минковского неустранимой из теории, находит отражение в описании всех физических явлений и приводит к качественно отличным от ОТО следствиям.