

производства. То самое, что заставляет человека направлять свой рассудок в отношениях с природой и видеть в них лишь схему, лишь арену для рассудочных исследований, то самое в экономике заставляет предпринимателя бросать наивные, непосредственные методы феодализма и переходить ко всеобщей рационализации хозяйства, к детальной дифференциации труда, к превращению рабочего в схему, в арену для рассудочного, жесточайше расчетливого и рационального использования живого человеческого материала для собственных романтических полетов.

II. ИСЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ И ЕГО ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ

1. **Бытие, небытие, становление.** Приступая к логическому анализу всех основных категорий, оперирование с которыми создает науку математического анализа, мы должны помнить, что далеко не все, понятное математически, тем самым является понятным и с философской точки зрения. Часто бывает так, что математик ограничивается каким-нибудь очень коротким разъяснением или формулой, философ же затрачивает массу времени и пространства, чтобы эту короткую и простую формулу разъяснить для себя и понять. Точно так же нередки и случаи, когда весьма пространные математические выкладки для философа не имеют почти никакой цены и из массы доказательств важной оказывается только какая-нибудь одна идея. Тем не менее давно уже настало время, когда математический анализ требуется понять широко философски и ощущается насущная потребность вывести его из формалистического тупика и пустой, бессодержательной трактовки.

Мы рассмотрим ряд категорий, приводящих к самому понятию бесконечно-малого, потому что понятие это с логической точки зрения довольно сложное и те определения, которые мы имеем в руководствах по анализу, для нас слишком формалистичны и техничны. Они совсем не вскрывают ту логическую структуру, которая кроется в понятии бесконечно-малого.

Мы начнем с тех трех категорий, с той общезначимой диалектической триады, без которой невозможно вообще никакое логическое построение, и каждое логическое построение есть только вид этой триады, один из бесконечно разнообразных ее случаев. Это та триада, с которой начинается всякая диалектика:

- 1) бытие,
- 2) небытие (инобытие),
- 3) становление.

Тут прежде всего — *бытие*. Почему диалектика начинается с бытия? Потому что всё, всякая категория, прежде чем быть самой собой, должна просто *быть*. Прежде чем быть *чем-нибудь* и *как-нибудь*, надо сначала просто *быть*. Вот почему диалектика, желающая дать всю область знания в системе, необходимым образом

начинает с «бытия». Бытие — первый шаг, первый жест, первое движение, первая точка диалектики. Без этой точки, без этого первоисточника никакое построение невозможно.

Далее, бытие не может остаться *только* бытием, *просто* бытием. Бытие не есть бытие *вообще*. Если бы оно всегда оставалось бытием вообще, мы никогда бы не смогли бы получить никаких конкретных форм бытия. Существует не просто бытие, но и *разные виды бытия*. А для этого нужна такая универсальная категория, которая бы сделала возможным существование этих разных видов бытия. Такой категорией является *инобытие*, т. е. *иное*, другое бытие, являющееся по отношению к первому общему бытию *отрицанием его*, отсутствием его, небытием. Как только мы положим *бытие*, так тут же необходимо полагать и *небытие*; это понятия соотносительные. Если есть черный цвет, то он может быть только тогда, когда есть (или по крайней мере мыслится) не-черный цвет. Если мыслится белое, значит, как-нибудь и где-нибудь существует «не-белое». Также и «бытие», если оно реально есть или мыслится, то тем самым есть или мыслится «инобытие».

Но стоит только немного задуматься над той антитезой бытия и небытия, как становится совершенно ясно, что остаться при такой антитезе совершенно невозможно. Если оставить эти две области бытия и небытия в их голой и абсолютной противоположности, то совсем не будет достигнута цель, ради которой мы и ввели понятие инобытия. Мы ввели его для того, чтобы вместо абстрактного и общего бытия получить его конкретные виды. Но если инобытие будет абсолютно оторвано от бытия и не будет как-то с ним совмещено, — не возникнет и никаких конкретных видов бытия. Необходимо их как-то объединить, эти категории бытия и небытия, как-то нащупать то, что есть в них общего и что могло бы нейтрализовать этот дуализм двух противоположных логических стихий. Но что значит найти общее, что значит объединить? Это значит найти такую новую категорию, где обе полученные уже содержались бы и где они были бы покрыты чем-то третьим, что их и объединило бы.

Такой категорией является *становление*. В становлении мы находим прежде всего то, что становится. Стало быть, тут бытие налично. Но вместе с тем здесь же мы имеем тоже и некое как бы отталкивание от этого бытия. Становление есть ведь некий процесс, где бытие все время меняется и переходит в другое. В каждый мельчайший момент своего становления бытие — все иное, иное и иное. Оно тут никогда не одно и то же. В каждый мельчайший новый момент бытие оказывается небытием в отношении к прежнему бытию, к бытию в его прежней форме. И таким образом, в каждый мельчайший момент становления становление оказывается и бытием, и небытием. Потому в диалектике и говорят, что бытие и небытие синтезируются в становление.

2. Целое, дробное, бесконечность. Тут мы пока еще у преддверия анализа бесконечно-малых, но пока еще не вошли в него, не полу-

чили еще самого понятия бесконечно-малого. Попробуем конкретизировать достигнутую нами диалектическую ступень — с тем чтобы дойти постепенно и до этого понятия.

Первое, с чем мы тут встретимся,— это понятие и область *числа*. Когда мы выставляли указанную диалектическую триаду, мы не имели в виду чисел, а говорили в применении вообще ко всяким возможным предметам мысли. Теперь необходимо эту же самую триаду провести в чисто числовой области.

Разумеется, различных форм приложения этой триады к области чисел очень много. Так, напр., если мы возьмем *положительное число*, то антитезой к нему будет, очевидно, *отрицательное число*, а синтезом, в котором соединится то и другое, будет, очевидно, *нуль*. Но эта триада неинтересна в смысле получения понятия бесконечно-малого, и она ничего не разъясняет нам в математическом анализе. Потому подробно говорить о таких построениях надо только в общей философии числа, но не в логике математического анализа. Что же в числе есть такого, диалектическое понимание чего приводит нас вплотную к математическому анализу?

Математический анализ есть исчисление бесконечно-малых. Стало быть, здесь мы находимся в области учения о бесконечном. Спрашивается: что такое бесконечность?

Самое простое и самое «понятное» популярному сознанию — это то, что бесконечность есть нечто, не имеющее конца. Хотя это как будто и ближе всего передает смысл данного понятия, тем не менее считать это вполне ясным совершенно невозможно. Как понимать это отсутствие конца? Обычно это понимается так, что, *сколько бы мы ни двигались к границе*, мы никогда не можем ее достигнуть. Другими словами, в понятие бесконечности вносят идею *процесса*. И это вполне справедливо, хотя, быть может, и недостаточно. Самое простое и самое понятное — это понимать бесконечность как бесконечный *процесс*. Однако этим нисколько задача не решается. Вместо того чтобы определить понятие, выраженное при помощи существительного («бесконечность»), мы в данном случае приходим к необходимости определять понятие, выраженное через прилагательное («бесконечный процесс»). И если мы там не понимаем, что такое бесконечность, то не станет она понятнее и здесь. Какой же процесс мы должны считать бесконечным? Вот вопрос, который теперь предстоит нам решить.

Пусть мы от 1 перешли к 2, от 2 к 3, от 3 к 4 и т. д. Спрашивается: можем ли мы когда-нибудь на этом пути получить бесконечно-большое число? Пусть мы знаем, что такое 2; и пусть нам известно, что такое 10. Можем ли мы путем прибавления отдельных единиц получить из двойки десятку? Конечно, можем. На пути прибавления к двойке отдельных единиц и лежит то самое число, которое называется десяткой. Но можем ли мы на этом же самом пути получить бесконечность? Очевидно, нет. *Зная только одни конечные числа, мы, какими бы арифметическими операциями ни пользовались, никогда и никак не можем получить бесконечную*

величину. Это значит, что бесконечность отличается от конечных величин отнюдь не *количественно*, а *качественно*. Это какое-то особое качество среди количественных операций; и к нему нельзя прийти путем обычных количественных операций, но только путем «скачка».

Итак, ни голая процессуальность не определяет бесконечности, хотя и как-то входит в нее, ни голая количественность не определяет бесконечности, хотя тоже как-то входит в нее. Приходится, следовательно, искать иных путей для нахождения понятия бесконечности.

Обратим внимание на следующее. Бесконечность не увеличивается и не уменьшается от количественного ее увеличения и уменьшения. Стало быть, в каждом отдельном пункте бесконечность есть уже вся бесконечность, какие бы операции мы над ней ни производили. Каждый момент бесконечности есть и вся целая бесконечность. Раз $\infty + A$ (любое число) = ∞ , то ясно, что в бесконечности каждая отдельная ее часть равняется всей бесконечности, взятой в целом. Этого, разумеется, никогда не бывает в конечной области. Тут всегда часть меньше целого и целое больше части. Этим область бесконечности коренным образом отличается от области конечных величин. Тут, однако, кроется и еще одна категория. Простое тождество целого и части еще ничего не говорит о бесконечности, если эти категории брать самостоятельно. Нужно точнее определить способ отождествления целого и части и ясно ощущать форму этого отождествления. Этот способ и эта форма не могут быть статическими. Бесконечность, видели мы, есть прежде всего процесс. Следовательно, отождествление целого и части должно быть дано в процессе, в становлении. Становление должно объединить целое и часть или, вообще говоря, целое и дробное, и тут-то и необходимо искать категорию бесконечности.

Как же протекает этот процесс отождествления целого и части в бесконечности?

Чтобы перейти от целого к дробному, надо перейти от бытия к небытию. Дробное — инобытие целого. Целое, воплотившись в инобытие, превращается в отдельные части и их сумму. В целом все элементы существенно связаны один с другим, почему они и являются элементами, или частями. Когда же целое воплощено в инобытии, все его элементы тоже воплощены в инобытии, но они уже дискретны друг в отношении друга, так как всякое инобытие есть всегда прежде всего внеположность и саморазличение, самоотрицание. Итак, *целое* выражается внешне-инобытийным образом в дробном, в отдельных частях, в сумме частей, в том, что в отличие от внутреннего центра целости можно назвать *всем*. Всё — воплощенное в инобытии *целое*.

Но если так, то спрашивается: может ли инобытийная стихия выявить внутреннюю целостность вполне и адекватно? Конечно, может. Тогда в инобытии мы находим именно *всё*. Но она может выявлять его и не полностью, не адекватно. Становление есть как раз такая

категория, которая мешает в данном случае адекватному выявлению целостности. В целом все дано сразу, а становление все дает постепенно, не сразу. Следовательно, если дать свободу стихии становления, то целое, хотя и будет все время дробиться на части (в инобытии) и будет в них постоянно присутствовать, оно никогда не получит полного выявления и всегда будет только стремиться к полноте выявления. Целое дробится на части, и эти части призваны выразить его целиком; но так как части эти тождественны с целым, то количество элементов целого присутствует в части, она тоже делится на те же части, а часть этой части опять, в силу своего тождества с целым, содержит в себе то же количество частей и т. д. и т. д. Идя по этому пути, мы никогда не сможем выразить всего целого при помощи его частей — и это потому, что части возникают в результате постепенного дробления, т. е. в результате *становящегося* дробления, в результате *становящегося* отождествления целого и частей.

Теперь мы можем дать некоторого рода логическую формулу, определяющую понятие бесконечности.

Бесконечность есть становящееся тождество (или становящийся синтез) целого и дробного.

Это простейшая концепция бесконечности, без которой невозможно будет понять и отдельных видов бесконечности. Тут мы видим, что без момента целостности нельзя получить понятие бесконечного. Видим также, что в бесконечность входит и момент процесса, становления. Необходимо полнейшим образом представлять себе участие каждого из этих моментов в общем понятии бесконечности.

Целое дробится, выражается своими частями. По условию целое должно содержаться в своей части — тем самым возникает их тождество. Но части должны мыслиться не стационарно, но в последовательном возникновении, в становлении. Тогда получается невозможность исчерпать все части целого, т. е. образуется бесконечность.

В бесконечности дана целостность, но не сама по себе, а как подчиненный момент. Если бы ее тут не было, то не могло бы быть и дробления, т. е. не было бы никакого перехода к мельчайшим частям и не было бы, значит, ухода в бесконечность. В бесконечности дана дробность, но опять-таки не сама по себе, а как подчиненный момент. Если бы ее тут не было — опять не могло бы возникнуть процесса дробления и не могло бы возникнуть ухода в бесконечность. Бесконечность не целое и не дробное. Но она и целое, и дробное, и нечто гораздо большее, в чем обе эти категории как бы взаимно растворяются. Это целое, из объединенное, есть *становление* одного другим, становление целого дробным и дробного, частного — целым. В бесконечности все последовательные моменты равны один другому, но они в то же время и различны, так как возникают они в процессе становления. Целое стремится выразиться в убывающих частях и не может, и части

стремятся стать целым и не могут. Все это в процессе становления по самой природе своей алогично, т. е. нерасчленимо, неразлично.

Бесконечность, таким образом, есть вид становления. От становления вообще этот вид становления отличается тем, что тут совпадает не просто бытие с небытием, но именно целое с дробным. Каждый момент бесконечности представляет собою не просто переход от бытия к небытию и от небытия к бытию, т. е. не просто уничтожение и возникновение, но переход к раздробленности и обратно, т. е. рост целостности и дробления. Когда мы движемся в области бесконечности от одной точки к другой, то тем самым мы, во-первых, удаляемся все в большую дробность, но в то же время, во-вторых, обнимаем все большее и большее количество точек, мы неизменно стремимся ко все большей и большей цельности. Такая структура числа, где эти два процесса являются существенно тождественными, такая структура числа и называется *бесконечностью*.

Из предыдущего вполне ясно, что *бесконечность меньше всего определяется размерами*. *Бесконечность помещается в любых конечных размерах*. Если мы возьмем линию длиной в 5 см, то на ее протяжении поместится бесконечное количество точек. Если мы возьмем линию длиной в 1 см, то, очевидно, на ней тоже поместится бесконечное количество точек. Если мы возьмем линию в 0,1 см, в 0,01 см, в 0,001 см длиной и т. д. и т. д., то и на этих линиях, как бы малы или велики они ни были, тоже помещается бесконечное количество точек. Отсюда совершенно ясно: *бесконечная величина определяется не абсолютными размерами числа или вещи, но определено — взаимоотношением их целостности и их дробности*, а именно тем взаимоотношением, когда они даны как полное тождество.

3. Антиномии и типы бесконечности. Вопрос об антиномиях, равно как и вопрос о типах бесконечности, — не только сложная вещь, но она потребовала бы и слишком пространного изложения. Заниматься этим, однако, должны теоретико-философские сочинения, в то время как настоящее сочинение имеет очень узкие цели, да и занимается математический анализ, если его брать в чистом виде, только одним специфическим типом бесконечности. Поэтому, не развивая антиномики бесконечного в систематическом виде, формулируем то, что уже было сказано выше, в расчлененно-антиномико-синтетической форме и тем самым дадим по возможности четкое изображение диалектики понятия бесконечности.

I. 1. Целое состоит из частей, так как в нем ничего и нет, кроме частей.

Это значит, что целое тождественно со своими частями.

Но тогда оно распространено по всем своим частям и, след., находится *езде*.

Итак, целое, состоя из частей, находится *езде*.

2. Целое не состоит из частей, так как ни одна часть, взятая сама по себе, не говорит о целом, и, след., не говорят о нем и все части, взятые вместе.

Это значит, что целое не содержится в своих частях, т. е. оно не находится нигде.

Итак, целое, не состоя из частей, нигде не находится.

3. Целое и состоит, и не состоит из своих частей, т. е. оно сразу и одновременно и находится везде, и не находится нигде.

Но «состоять» и «не состоять», равно как и «везде» и «нигде», связаны между собой антитетически, т. е. как бытие и небытие. Поэтому связаны они между собой как становление одного другим.

Следовательно, целое и его части находятся в процессе становления, в котором они взаимно переходят одно в другое, т. е. целое неразличимо становится самими частями и части неразличимо становятся целым.

II. 1. Целое — везде.

Это значит, что части его взаимно неразличимы.

2. Целое — нигде.

Это значит, что части его взаимно различимы.

3. Целое — и везде, и нигде.

Следовательно, части целого находятся в процессе становления, в котором они взаимно переходят одна в другую, т. е. каждая отдельная часть неразличимо становится каждой другой частью.

III. 1. Целое становится частями, как и части целым; и части становятся одна другою.

2. Но в становлении отождествлены бытие и небытие.

Здесь бытие становится небытием; стало быть, оно уничтожается.

И небытие становится бытием; стало быть, оно возникает.

Становление, следовательно, есть противоречие возникновения и уничтожения.

Разрешается это противоречие в такой категории, где возникновение и уничтожение совпадают.

Эта категория есть то, что получается в результате становления, т. е. ставшее. И ставшее возникает в каждый мельчайший момент становления; поэтому ставшее в свою очередь пребывает в процессе становления, рассыпаясь на бесконечное количество ставших моментов и из них восстанавливаясь.

3. Целое и части, а также части между собой возникают одно из другого и уничтожаются одно в другом при полном отождествлении этих процессов. Становящееся тождество возникновения и уничтожения есть *бесконечность*.

В результате этого бесконечностью нужно считать такой процесс, в котором каждый мельчайший новый момент есть возникновение нового, небывалого и в то же время уничтожение как всех старых моментов, так и самого себя.

Полученное нами здесь понятие бесконечности может быть развито в трех разных направлениях.

Во-первых, можно в этом понятии выдвигать на первый план момент *количества, счетности*. Хотя, строго говоря, бесконечность не есть нечто количественное и ее нельзя получить в результате счета, все же она относится к числовой сфере, и какую-то количественность она в себе содержит. Эта количественность совсем особого рода. Тут отдельные моменты количества слиты один с другим до полной неразличимости. И тем не менее они все же наличны. Упирая на счетность, мы получим тип бесконечности, который есть.

I. *Арифметическая* бесконечность. С этим типом бесконечности мы стараемся производить обычные арифметические операции, хотя своеобразие этой категории приводит к своеобразию и операций над нею.

Во-вторых, в общем понятии бесконечности мы можем выдвинуть то, что является антитезисом всякой раздельной счетности, т. е. чистую стихию становления, чистую процессуальность, становящуюся неразличимостью. Без этого момента бесконечность также немыслима, хотя она и не есть только этот момент. Этот тип бесконечности и есть тот тип, который рассматривается в чистом математическом анализе. Отсюда ее можно назвать и соответственно:

II. *Аналитическая* бесконечность.

Наконец, можно выдвигать в общем понятии бесконечности оба этих момента вместе — раздельную счетность и неразличимое становление (невозможность счета). Тогда первый момент воплотится на втором, как всякая отвлеченная идея воплощается на безразличном материале. Идея — раздельность, логическая последовательность, форма и система; становление безраздельно, алогично и бесформенно. Объединение их дает фигурную бесконечность, определенным образом оформленную, «упорядоченную», ту, которая является предметом особой математической науки, — учения о множествах. Ей можно дать тоже свое название —

III. *Аритмологическая* бесконечность.

Арифметическая, аналитическая и аритмологическая бесконечности суть три наиболее ярко отличающиеся друг от друга типа бесконечности. Немудрено, что ими занимаются три столь различные математические науки.

Нас в дальнейшем будет интересовать, конечно, только второй тип бесконечности — аналитический.

4. **Непрерывность (постоянная и переменная величина), прерывность и предел.** Однако прежде чем войти в рассмотрение самого математического анализа, необходимо определить еще ряд категорий, которые так же основоположены для анализа, как и понятие бесконечности. Их тоже обычно излагают в случайной форме, не связывая в диалектическую систему, в то время как это касается самых основных сторон математики, и они не могут не иметь диалектического строения, если все вообще категории возникают диалектически.

Ряд категорий, которые требуют нашего рассмотрения, отличаются одним общим признаком. Число есть *непосредственное* бытие; в нем нет еще различия между самим числом и его значением. До сих пор мы имели число само по себе. *Целое, дробное и бесконечное* число есть значения числа в смысле его внутреннего строения. Чтобы узнать, является ли данное число целым или дробным, необходимо всмотреться в само число непосредственно, не обращая никакого специального внимания на фон, его окружающий. Это касается и не только числа. Чтобы судить, является ли данная вещь цельной, надо, очевидно, рассмотреть строение самой вещи, как оно дано в контурах, внутри контуров данной вещи. Когда сосуд, напр., имеет трещину или дыру, то для констатирования этого достаточно только изучить сосуд в тех границах, которые даны очертанием этого сосуда. И мы вполне будем в состоянии определить, является ли данная ваза целой, или она разбита. Однако о значении числа или вещи можно говорить и с точки зрения их внешней судьбы. Можно представить себе, что вещь мыслится совершенно неизменной сама по себе, но что она погружена или вовлечена в какое-нибудь изменение, оставаясь сама по себе целой. Можно иметь одно и то же число или комбинацию чисел и, оставляя их в одном и том же виде, придавать им те или иные *внешние* значения. Тут не будет ни просто числа, взятого в его непосредственности, вне каких бы то ни было количественных значений, ни числа, в котором имеются в виду только изменения во внутренней структуре. Тут число вступит в новые значения при полном сохранении внутренних структур или, вернее, независимо ни от каких внутренних структур.

Прежде всего величина с этой внешней точки зрения может никак не меняться; она может иметь, так сказать, нуль изменения. Такую величину называют *постоянной* величиной. Антитезой к этой постоянной величине является, очевидно, *переменная* величина.

Что такое постоянная величина и что такое переменная величина, это известно уже из элементарной математики. В анализе эта пара понятий играет, однако, гораздо большую роль. Возьмем, напр., площадь треугольника. Из элементарной геометрии известно, что эта площадь равняется половине произведения основания на высоту. Эта формула — «половина произведения основания на высоту» — насколько не зависит от величины самого основания и самой высоты. Самая эта связь основания и высоты для выражения площади вполне постоянна. Еще ярче, однако, антитеза постоянной и переменной величин в случае, когда выставляется теорема: «сумма углов треугольника равняется двум прямым». Сколько бы ни увеличивать и ни уменьшать отдельные углы треугольника, сумма их все равно остается равной двум прямым. Ясно, что величины отдельных углов треугольника суть переменные величины и сумма всех трех сторон треугольника есть величина постоянная. В физике устанавливается закон о том, что произведение давления газа на его объем есть величина постоянная. Следователь-

но, если меняется давление, то соответствующе меняется объем газа, произведение же обеих величин никогда не меняется. Ясно, что объемы и давления суть в этом законе переменные величины, их же произведение — постоянная величина.

Вдумываясь в существо этих двух категорий, мы отчетливо видим, что отличие их от величины просто, от величины вообще заключается в том, что тут «величина вообще» содержит в себе еще особый слой, слой внешней характеристики. Постоянная и переменная величина есть, прежде всего, величина просто, а во-вторых, еще утверждается, что эта величина имеет такое-то или такое-то значение. Это значение — чисто *внешне* в отношении величины, взятой самой по себе. В одном случае угол треугольника равен 30° , другой раз — 45° , третий раз — 60° и т. д. и т. д. Эта величина может быть какой угодно (имея в виду общую сумму углов, равную двум прямым). Размеры угла, ясно по самому смыслу, не имеют никакой связи с самим понятием угла. Поэтому размерность есть нечто внешнее в отношении самого понятия угла. И на этом основании мы и говорили, что постоянная и переменная величины есть *внешнее инобытие* числа и эта внешность, конечно, к тому же вполне отождествлена с непосредственно данным числом, с числом самим по себе.

Но интереснее всего то, что получается от соединения этих двух категорий — постоянной и переменной величин. Диалектический синтез всегда особенно интересен; он часто таит в себе полную неожиданность. Так, из синтезирования целого и дробного получалась (быть может, с первого взгляда довольно неожиданно) категория бесконечности. Что же получится из синтезирования постоянной и переменной величин? Какова та категория, в которой обе эти категории совпадают совершенно, точно сливаясь в полную неразличимость на фоне вполне новой и в них не содержащейся конструкции?

Такой категорией является *непрерывность*.

Подобно тому как бытие и небытие объединяются в становление, так и постоянная величина с переменной объединяются в непрерывную величину. Непрерывная величина, во-первых, есть нечто постоянное. В самом деле, самый смысл непрерывности заключается в том, что каждый ее момент совершенно одинаков со всяким предыдущим моментом. Непрерывная величина потому и «не прерывается», что она везде одинаковая, что она не меняется, что она всецело постоянная. Таким образом, постоянство, несомненно, входит в категорию непрерывности в качестве конститутивного момента; непрерывность без него немыслима. Однако также ясно, во-вторых, что непрерывность требует для себя и момента изменения. Это значило бы, что вся непрерывность свернулась бы в одну точку. Допустим, что в непрерывности нет изменения. В то же время, однако, в непрерывности мыслится некий процесс. Непрерывность есть именно процесс, т. е. движение, изменение; но это такой процесс, в котором все моменты процесса сливаются в одно и то же,

в один и тот же момент. Если различать в каждом моменте самый факт этого момента, субстанцию, и, с другой стороны, его смысловую, идейную сторону, то необходимо сказать, что по факту, по субстанции, все эти точки абсолютно разделены, внеположены, находятся одна вне другой; с точки же зрения *смысла, идеи* все они суть нечто *одно*, совершенно одно, неразличимое тождество и единство. В этом и заключается тайна непрерывности: в ней дано фактическое движение⁶, движение *по факту*, т. е. разнообразие, бесконечное фактическое разнообразие отдельных точек; и с другой стороны, тут дано полное *смысловое* идейное отождествление всех бесконечных точек, как бы они ни возникали и сколько бы их ни возникло.

Непрерывная величина есть тождество постоянной и переменной величин.

Непрерывность, однако, не может быть утверждаема сама по себе, без другой категории, которая с нею соотносительна. Раз мыслится непрерывность, то тем самым должна мыслиться и *прерывность*. Одно без другого совершенно немислимо. Таким образом, достигнутый нами синтез непрерывности в свою очередь переходит в новый антитезис, в прерывную величину, и, следовательно, в свою очередь требует еще нового синтеза.

Синтезом прерывности и непрерывности является предел.

Предел немислим вне понятия процесса. Предел есть то, что *достигается* в течение того или иного определенного *процесса*. Какой это процесс? Если это есть именно процесс *достижения*, то это достижение происходит *постоянно, постепенно*. Чем больше и дальше двигаемся мы в сфере этого процесса, тем ближе мы к пределу, тем больше мы его достигаем. Итак, предел есть некое движение, изменение и некий процесс.

Спросим теперь себя: какой же именно это процесс? С одной стороны, даже самое понятие предела говорит о некоей *определенности* и *конечности*. Движение происходит в определенном направлении, и оно имеет какую-нибудь определенную, конечную цель. Без этой идеи не может существовать никакого предела. Однако, с другой стороны, предел в математике не мыслится просто, как граница и конец. Этот предел в математике всегда мыслится как нечто *недостижимое*, хотя и конечное, как нечто притягивающее к себе издали приближенную величину, но никогда не совпадающее с этой приближенной величиной. Предел, с одной стороны, конечен, а с другой — эта его конечность никогда не может быть вполне адекватно охвачена. Как это можно совместить?

Совместить это можно только тем обычным диалектическим путем, который от бытия и небытия ведет к становлению. Необходимо, чтобы достижение конечного предела и постоянное его недостижение совместились во взаимном становлении, т. е. так, чтобы достигнутая конечность все время сдвигалась с места и заменялась другой, тоже достигнутой конечностью и чтобы бесконечное, постоянное достижение выражалось, тоже постоянно, в опре-

деленных конечных пунктах. В таком становлении мы получаем, следовательно, бесконечный ряд конечных величин, но эти конечные величины, уменьшаясь все больше и больше, приближаются к определенной величине, хотя никогда ее и не могут достигнуть. Становление, как мы видели, всегда алогично: оно неразлично внутри себя и оно не имеет никаких точных границ и на своей периферии. В данном случае в процессе становления находится прерывность в отношении непрерывности и непрерывность в отношении прерывности. Это значит, что прерывность должна *становиться* непрерывностью, а непрерывность должна *становиться* прерывностью. Поскольку становление есть всегда постепенный процесс, постольку прерывность становится непрерывностью *постепенно*, сплошно, последовательно, равно как и непрерывность — прерывностью. Возможно это только так, что прерывность делается все меньше и меньше прерывного, т. е. промежутки между прерывными моментами делаются все меньше и меньше и таким образом прерывность все больше и больше превращается в непрерывность. Точно так же и непрерывность по мере своего продвижения все больше и больше покрывается прерывными точками, и эти прерывные точки застилают ее все гуще и гуще — правда, без всякой возможности когда-нибудь достигнуть абсолютного перекрытия непрерывности прерывностью. Заметим, что становление алогично не только в том смысле, что оно неразлично само в себе, само внутри себя, но и в том, что оно неразлично и по своей периферии, т. е. не имеет никаких законченных границ и в этом смысле безгранично. Отсюда понятно, почему становление прерывности непрерывностью или непрерывности прерывностью никогда не может быть кончено; по самому смыслу своему оно абсолютно беспрерывно. И значит, предел, диалектически синтезирующий непрерывность и прерывность — по типу категории становления, — есть в одно и то же время и полная недостижимость для числового процесса, и выраженность, достигнутость в каждый отдельный момент этого процесса, причем эта выраженность и достигнутость бесконечно интенсифицируется, возрастает.

Предел — это та категория, которая (правда, в довольно вялом виде) применяется уже и в элементарной математике. Главное ее место, однако, в математическом анализе; и тут на ней, можно сказать, построена целая наука.

Пусть в круг вписан квадрат. Если мы удвоим количество его сторон, то площадь его, конечно, увеличится и периметр его тоже увеличится. Это удвоенное количество сторон может быть удвоено еще раз, еще раз и еще раз. Оно может быть удвоено до бесконечности. Периметр, последовательно меняющий свою форму в зависимости от количества удвоений, будет стремиться, очевидно, к окружности и в *пределе* совпадет с нею. Окружность, говорят, есть предел вписанных многоугольников при бесконечном увеличении количества сторон, равно как и предел описанных многоугольников при бесконечном увеличении количества сторон.

Здесь окружность есть нечто определенное и конечное; каждый многоугольник, вписанный или описанный, с любым количеством сторон, есть тоже величина определенная и конечная; но многоугольник тут дан не сам по себе, но в своем становлении (в смысле увеличения количества сторон); потому и количество сторон все время растет, по длине они делаются все меньше, и, значит, в целом же они приближаются все больше и больше к окружности; окружность для них — предел. Тут вполне отчетливо выступают две основные категории — непрерывности и прерывности и их синтетическое взаимопревращение, сплошной и бесконечный переход непрерывности в прерывность и прерывности в непрерывность.

Итак, вот диалектическая схема указываемых нами понятий: непрерывность, прерывность, предел, при этом непрерывность сама возникает как синтез постоянной и переменной величин.

5. Бесконечно-малое и бесконечно-большое. Только теперь мы можем формулировать то основное понятие, на котором строится весь математический анализ, — понятие *бесконечно-малого* (и, значит, бесконечно-большого). Оно возникает как напряженное, конденсированное выражение всех только что рассмотренных нами категорий.

Непрерывность (с постоянной и переменной величинами), прерывность и предел — все это, вместе взятое, может рассматриваться как нечто целое. Именно — это то, что противостоит числу, взятому в его чисто арифметическом виде, т. е. числу, взятому как *непосредственное* бытие. Когда мы берем числа натурального ряда и производим над ними арифметические действия, то здесь не возникает никаких сопоставлений каждого отдельного числа с тем или иным его внутренним или внешним функционированием. Произведя, напр., деление одного числа на другое, мы не ставим никаких вопросов о том, являются ли эти числа, делимое, делитель и частное, величинами постоянными, переменными, прерывными, непрерывными или предельными. Никаких таких вопросов тут совершенно не возникает. Это понятно. Все эти вопросы связаны с числом в том или ином опосредствованном виде. Когда мы говорим «5»,

«10», « $\frac{1}{2}$ », «3» и т. д., мы производим арифметические операции над числами в том их виде, как они и даны. Когда же мы говорим, напр., «переменная величина», то тут имеется в виду не только непосредственная значимость числа самого по себе, но еще и его определенное логическое отношение к тому фону, на котором оно дано. Тут — *опосредствованная* значимость числа.

Но если это так, то число арифметическое, как непосредственно значащее, число в смысле непрерывности, прерывности и предела, как опосредствованно значащее, находясь друг в отношении друга в состоянии диалектической антитезы. Если по общей диалектической схеме непосредственность признать за бытие, то опосредствованность необходимо будет признать за небытие, и между обе-

ими категориями возникает диалектическое противоречие. Оно ждет разрешения и синтеза.

Что нужно для синтеза? Нужно, чтобы непосредственно значащее арифметическое число восприняло на себя категории непрерывности, прерывности и предела, т. е. чтобы оно лишилось своей стационарной значимости и проб [уд]ило в себе эту двуплановость, требуемую данными категориями. С другой стороны, также необходимо, чтобы эти три категории воплотились на реально значащем числе, или величине, и перестали быть только отвлеченными признаками неизвестно каких величин. *Этот диалектический синтез и совершается в понятии бесконечно-малого.*

Самое простое математическое определение бесконечно-малого есть следующее. *Бесконечно-малое есть переменная величина, имеющая своим пределом нуль.* С виду простое, это определение, однако, содержит в себе немало разных подчиненных моментов, и они враздробь указаны нами в предшествующем, подготовительном изложении.

Во-первых, бесконечно-малое есть величина *переменная*. Одно уже это тянет за собою всю систему категорий, которую мы наметили выше. И уже один этот момент накладывает неизгладимую печать на всю изучаемую нами категорию. Бесконечно-малое — это сплошь стихия становления, изменения; тут ничто не стоит на месте, все движется и беспокойно требует расширения, углубления, распространения.

Во-вторых, бесконечно-малое есть такая переменная величина, которая имеет определенный *предел*. Отнюдь не всякая переменная величина имеет предел, стремится к пределу. Возьмем самую обыкновенную синусоиду. Эта равномерно вьющаяся вокруг прямой кривая никуда не стремится, ни к какому пределу не стремится, сколько бы ее ни продолжали. Она проходит одни и те же значения бесконечное число раз; эти значения неизменно повторяются, и кривая от этого ровно ни к чему не приближается и не стремится ни к какому пределу. Бесконечно-малое [же] как раз имеет такой предел, неизменно стремится к нему; предел управляет бесконечно-малым и притягивает его к себе из таинственного полумрака бесконечности. Это создает для понятия бесконечно-малого вполне оригинальный стиль, который еще усиливается от других элементов этого понятия. Подчеркнем, что изменение, поскольку речь зашла о пределе, дано тут не само по себе, но в становлении, в алогическом становлении. Оно само стремится в какую-то даль, и стремится сплошно, неразлично, безраздельно. Предел, следовательно, достигается тут при помощи *бесконечного процесса приближения*. Другими словами, этот предел никогда и нигде не достигается, а дано только вечное стремление, вечное движение, неустанный уход в бесконечные дали.

В-третьих, бесконечно-малое есть такая переменная величина, которая имеет своим пределом *нуль*. Нуль в качестве предела рисует всю нашу картину вечного стремления совсем в другом,

в небывалом виде. Что это значит? Что значит это вечное стремление — и к чему же? К нулю, в ничто, в небытие! Это значит, что дух, живущий по законам бесконечно-малого, не только стремится куда-то вдаль и не только это стремлениеечно, но, кроме того, тут ставится задача *исчерпания бытия*, охвата бытия до последней его точки, использование его до тех пор, пока не останется в нем нуль бытия, пока не перестанет существовать само бытие и не превратится оно в ничто. Инфинитезимальный дух хочет исчерпать все бытие, пережить всю стихию жизни, завоевать до последней точки все существующее, охватить его умом и сердцем, сделать соизмеримым с собою, адекватным себе, превратить его из сверхразумной бездны в осязаемую бездну, перевести ее всю-всю целиком на язык своего субъекта, своего сознания, потопить и растворить в глубинах собственной личности. Вот что значит это стремление бесконечно-малого к нулю как к своему пределу; и вот почему это не вообще переменная величина и не вообще процесс, хотя бы и бесконечный процесс, но процесс, имеющий свою целью нуль, исчерпание охватываемого им бытия до нуля.

В этом смысле бесконечно-большое мало чем отличается от бесконечно-малого. Если бесконечно-малое есть переменная величина, стремящаяся к нулю, то бесконечно-большое, очевидно, есть отношение единицы к этому бесконечно-малому. Если $\alpha = \frac{1}{\beta}$, то при условии $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = \infty$, а при условии $\lim \beta = \infty$, $\lim \alpha = 0$. Чем больше уменьшается α , тем больше увеличивается β ; и когда α стремится к нулю, β стремится к бесконечности. Наоборот, чем больше α , тем меньше β ; и когда α стремится к бесконечности, β стремится к нулю. Тут вполне ясна связь, существующая между бесконечно-малым и бесконечно-большим. Когда мы имеем какой-нибудь цельный предмет, то, уходя в его глубину с целью исчерпать его до нуля, пользуясь идеей бесконечного процесса, мы сразу получаем и бесконечно-малое, и бесконечно-большое: бесконечно-малое мы получаем, если имеем в виду отдельные моменты процесса, и бесконечно-большое, — если имеем в виду весь пройденный путь. Если сравнить все целое с отдельной стремящейся точкой, мы получаем уже не просто целое, но целое, разработанное именно с точки зрения этой отдельной стремящейся точки, с точки зрения этого бесконечно-малого, т. е. получаем бесконечно-большое. И наоборот, сравнивши бесконечно-большое, возникшее из всех бесконечно-малых, с целым, мы замечаем, что оно могло возникнуть действительно только из передвижения бесконечно-малого, т. е. получаем идею бесконечно-малого. Так связаны между собой эти оба понятия, являясь, в сущности, одной и той же идеей, рассматриваемой только с разных точек зрения.

Можно дать еще другое определение бесконечно-малого, хотя это определение, конечно, в сущности своей может быть только тождественным с первым. Именно, бесконечно-малое определяют

еще так. Бесконечно-малое есть *такая переменная величина, которая может стать меньше любой заданной величины*. Пожалуй, это определение несколько ярче подчеркивает момент процессуальности, играющий такую огромную роль во всем понятии бесконечно-малого. Тут важны именно слова «может стать меньше любой заданной величины». В них выражена стихия становления, без которой бесконечно-малое не существует. В предыдущем определении момент становления и процессуальности выражен слабее, но зато лучше выражена идея исчерпания неисчерпания, идея, так сказать, «объятия необъятного». Этот момент тоже основной в учении о бесконечно-малом. И таким образом, оба определения, имея в виду один и тот же предмет, подчеркивают в нем одинаково важные, хотя и различные, стороны, причем каждая из этих сторон необходимо предполагает другую, так что в конце концов безразлично, какую сторону выдвигать и на каком определении останавливаться.

Итак, бесконечно-малое есть диалектический синтез числа в его непосредственном (арифметическом) бытии и числа в его опосредствованном (инобытийном в отношении к арифметическому) бытии. Бесконечно-малое есть прежде всего некая чистая величина, и в этом сказывается участие здесь арифметического элемента. С другой стороны, это не просто арифметическая величина со всей ее статической структурой, но такая величина, которая вобрала в себя и воплотила в себе эти понятия, инобытийные в сравнении с арифметической статической раздельностью, — непрерывность, прерывность, предел. Поэтому можно дать такую диалектическую формулу понятия бесконечно-малого.

Бесконечно-малое есть тождество (синтез) непосредственно-арифметической значимости числа и опосредствованно-инобытийного, внутренне-внешнего становления. Этот момент внутренне-внешнего становления важен потому, что, как мы помним, бесконечность уже сама по себе, независимо от ее специального — инфинитезимального, или аналитического, типа есть синтез целого и дробного, т. е. синтез внутренних особенностей строения числа, в то время как природа непрерывности, прерывности и предела возможна у нас на почве именно внешней ориентированности числа на окружающем его фоне.

Предложенная формула, конечно, совершенно тождественна с двумя указанными, чисто математическими определениями. Но это есть формула философская, логическая или, точнее, *диалектическая*, т. е. основанная на анализе и антиномико-синтетической структуре понятий, в то время как те два определения суть чисто *математические* определения, т. е. основанные на формально-числовом, формально-счислительном объединении счетных величин. В диалектике — понятия и категории, в математике — числа и величины. В диалектике — антиномико-синтетическая связь понятий и категорий, в математике — счислительно-счетная связь чисел и величин.

6. Сущность функции. Есть, однако, еще категория, столь же глубоко определяющая стиль науки о бесконечно-малом, как и само понятие бесконечно-малого. Это понятие *функции*. Школьные математики и это понятие угробили до той степени, когда оно превращается в сухую и чисто вычислительную категорию, имеющую только внешне-прикладное значение. Это понятие гораздо богаче школьного его употребления, в особенности если иметь в виду его социально-исторические корни.

Что такое функция и когда это понятие играет наибольшую роль в математике и философии?

Функция есть идеальная, смысловая картина вещи в условиях отсутствия самой вещи или, вернее, в условиях непринимания во внимание ее реального, субстанционального существования. Вещь существует, но мы воздерживаемся от суждения по вопросам ее реального существования. Реальное существование вещи нас несколько не интересует; можно даже сказать, что, рассуждая о функциях, человек ровно несколько не заинтересован в субстанциональном существовании вещей. Человек заинтересован в них не постольку, поскольку они *существуют*, но поскольку они *мыслятся*. Не будучи в состоянии объять всего мира физически, человек стремится охватить его мысленно, воплотить его в своей сознательной мысли, сделать соизмеримым своему собственному сознанию. Эту позицию западноевропейского человека мы уже формулировали выше. Но каким же образом он смог бы охватить всю мировую действительность в своем реально-человеческом рассуждении? Как быть ему с этой необъятной громадой пространства и времени, в которой он теряется и тонет как незаметная песчинка? Единственный путь для этого — отвергнуть всякую субстанциальность, забыть эту необъятную массу действительности, обесплотить эту неместимую бесконечность мира и превратить только в логическую схему, в рассудочную систему, оторвать ее от бытийственных, материальных основ и корней. Наполните теперь эту логическую и рассудочную схему действительности (взятую вместо самой действительности) чисто числовым содержанием, и — вы получаете понятие *функции*, эту отвлеченную картину бытия, взятую без самого бытия.

Отсюда мы видим, какими интимными корнями связано функциональное мышление с глубинами западноевропейской духовной жизни.

Что такое функция? Тут тоже есть, как и везде, своя тройственность принципов, демонстрирующая понятие функции в развитии виде.

Именно, прежде всего мы наталкиваемся на понятие *независимо-переменного*. Будем брать переменное само по себе, переменное в его непосредственности и самостоятельности, или, как говорят в диалектике, «в себе», переменное в себе. Очевидно, оно тем самым будет независимым переменным. В треугольнике, напр., длина основания или высоты берется совершенно независимо от других

элементов и величин, из которых состоит треугольник. Пусть длина основания равна 1 см, 2 см, 3 см и т. д.— все это будут величины независимые (именно как длина).

Далее, помывливши независимое переменное, мы по общей диалектической необходимости обязательно мыслим и *зависимое* переменное. Длина основания и длина высоты треугольника ни от чего не зависят, но площадь треугольника уже зависит от основания и высоты. Чем больше, напр., основание, тем больше будет и вся площадь, а чем меньше, напр., высота, тем меньше будет и площадь. Тут есть определенная зависимость, и площадь треугольника *зависит* от основания и высоты треугольника.

Наконец, важно иметь не просто зависимое переменное и независимое переменное, но также и *определенную формулу этой зависимости*. Поскольку независимое переменное есть некая определенная величина и поскольку зависимое переменное говорит о какой-то зависимости вообще и между обоими этими понятиями существует диалектическое противоречие, постольку синтез обоих понятий должен объединить определенность значения с зависимостью вообще и дать не просто зависимость вообще, но уже определенного вида зависимость. Тут мы видим, какие же, собственно, процессы произошли с зависимым переменным, когда мы поставили его в непосредственную связь с независимым переменным.

Эти три момента — независимое переменное, зависимое переменное, конкретная форма зависимости — все еще не дают понятия функции во всей его полноте. Дело в том, что функция, если точно формулировать этот термин, становится только тогда функцией, когда все эти три входящих в нее момента *отрываются от действительности в ее субстанциональности, в ее реальности*, когда они начинают мыслиться как чисто *смысловые* возможности, как построение чистой мысли. Функциональное отношение — это такое отношение, когда, не желая ничего утверждать о реальности и о вещах, мы строим какую-нибудь рассудочную схему, но за которую отказываемся отвечать как за что-то абсолютное и непреложное. Конечно, наука строит схемы, которые бы максимально соответствовали «действительности». Но когда наступает пора функционализма, то тут надо много кое-чего принять во внимание, чтобы правильно судить о «соответствии действительности».

Античность и Средние века — это культура абсолютизма, абсолютного бытия. Бытие — вечная, живая, всесильная субстанция, мировая — в языческой античности и личностно-божественная — в христианском средневековье. Все смысловое, идеальное порождается из недр этого абсолютного бытия, из его непознаваемых и сверхразумных глубин, проявляясь и в человеческом субъекте как в одной из эманаций этого абсолютного бытия. Западноевропейское мироощущение — иное, можно сказать, обратное этому. Здесь человек очень слабо заинтересован в абсолютной действительности. Он сам для себя абсолютная действительность. Для абсолютной объективной действительности он может оставить (да и то не

всегда охотно) разве только чисто идейную, смысловую сторону. Западноевропейский человек рассуждает так: «Есть ли Бог или нет, не знаю, да и едва ли могу знать; есть ли природа или нет, тоже не знаю и тоже, пожалуй, не могу знать; да, наконец, существую ли я сам в действительности, тоже мне не очевидно. Но я знаю одно: если есть Бог, то он должен быть мыслим вот как; если есть природа или материя, то я должен эти понятия мыслить вот как; и т. д. Весь вопрос в том, как мыслить эти понятия. Даже больше того. Вот я установил, как надо мыслить эти понятия. Но я при этом не только хорошо знаю, что люди мыслили эти понятия далеко не всегда так, как я, но знаю и то, что и в будущем подобных теорий окажется еще бесчисленное количество. Где же тут абсолютная истина и зачем она нужна науке? Науке, очевидно, она не нужна, так как реальная история науки вполне удовлетворяется чисто временными гипотезами, а, кроме того, есть ли на самом деле абсолютная истина, нам неизвестно, да и знать ее для того, чтобы существовала наука, тоже необязательно. Все сводится, таким образом, в конце концов именно к чистому функционализму вместо твердой системы абсолютно-причинных утверждений. Что является реальной причиной чего и какие силы двигают нашими формулами и осуществляют их в виде абсолютно существующей действительности, мы не знаем, едва ли можем знать, и знать-то необязательно. А вот установить вместо причинных связей связи чисто смысловые, т. е. ввиду своей бесплотности ставшие связями чисто функциональными,— это в нашей власти, это мы можем, и этого достаточно для науки».

Пусть такое рассуждение не всеми и не везде проводится. Пусть Кант, неокантианцы, Мах и др. подходят к формулировке этих мыслей ближе, а другие мыслители меньше. Все равно подобное рассуждение — душа западноевропейской философии науки. При всех абсолютистских навыках рядовых ученых — это внутренняя сущность всего отношения капиталистического, романтического, инфинитезимального и вообще западноевропейского духа и науки. Под этим лежит недоверие [к] объекту, незаинтересованность в реальных и объективных абсолютах, доверие только современной мысли данного момента, т. е. абсолютный и безраздельный индивидуализм и субъективизм. Захолустная малоразвитая мысль наивно убеждена в абсолютности научных «законов природы», в их полной непреложности и каком-то божественном всемогуществе. На этом захолустье основано было целое «философское» мировоззрение под именем материализма, справедливо заслужившего и справа, и слева презрительную кличку «вульгарного» материализма. И хотя это захолустье очень популярно среди подобных представителей науки, все равно оно разоблачено давным-давно; и всякому философски мыслящему ясно, какие анимистические корни подобного мировоззрения, и ясно, что под «законами природы» тут мыслятся чисто демонические силы, являющиеся предметом всякой древней механики. Чистая научность, не богословская, не мифоло-

гическая, научность ради научности — этот один из наиболее оригинальных плодов западноевропейского капиталистического и субъективистического духа, — эта научность, конечно, есть только чистый функционализм, бесплотный и скептический, ни в чем как следует не уверенный, верящий только себе самому, да и то относительно, на время, готовый каждую минуту все изменить в корне. Именно такова и есть реальная история науки. Самому «абсолютному» и самоуверенному ньютонианскому мировоззрению хватило здравствовать только немногим больше двухсот лет. Все же прочие теории летят как бабочки, протягивая какие-нибудь месяцы, годы и самое большее — десятки лет.

Не веря ничему и никому, во всем сомневаясь, отрицая всякие абсолюты, на чем зиждется такое функционалистическое мировоззрение? Ведь и себе-то самому оно верит, как сказано, только относительно, только на данный момент и только в смысле установления чисто мыслительных схем. Ясно, что такое мировоззрение, для которого все — только гипотеза, а не абсолют, дорожит этой гипотезой не ради достижения абсолютной истины. Оно ставит данную гипотезу, по его мнению, в данный момент максимально соответствующую «фактам» и «действительности», — только для того, чтобы ее проверять и критиковать. Он будет очень рад, если эта гипотеза будет перевернута вверх ногами и заменена новой. И эта новая будет иметь ту же участь в истории науки, что и прежняя. Следовательно, чем же живет и на чем зиждется такой функционализм, на что он надеется и каковы его интимные потребности, интимная и насущная цель существования? Ясно, что единственная потребность и цель, единственная интимная сущность и оправдание такого абсолютного функционализма — это *все тот же вечный и бесконечный процесс, вечное и неустанное движение от одного пункта к другому, напряженное стремление в бесконечные и неведомые дали*. Только так и можно понять это странное мироощущение, скептическое и шепетильное, болезненно-субъективистическое и субтильно-логическое. Такой дух живет исканием и стремлением. Его интересует самый *процесс* искания и стремления. И вот почему эта идея так упорна в новоевропейской философии. Ее можно рассмотреть там, где с первого взгляда о ней нет и помину и где как будто бы совершенно иная и методика, и терминология. Об этом, однако, должен идти разговор в специальном историко-философском труде.

Оторвавши смысл от бытия, освободивши идею от субстанциональности, превративши густое и тяжелое бытие в легко подвижную, утонченную и изощренную мысль, западноевропейский функционализм создал себе целое царство мысли, какого-то фантастического разума, где утонченность, субтильность, капризная сложность математического исчисления соперничают с размахом, лихорадочными темпами и энтузиазмом великих исканий и постижений. Западноевропейская математика, освободивши себя от всякой грузной жизненной интуиции и даже сбросивши с себя

оказавшийся слишком тяжелым груз человеческих интуиций, эта математика удалась в царство невообразимых абстракций, головокругительных операций над фантастическими вымыслами, в изобретение и создание таких конструкций, которые не представимы никакой интуицией и не охватываемы никаким наглядным образом. Мало того, что был изгнан всякий геометризм из арифметики и алгебры — в противоположность античной традиции, мало того, что самая геометрия стала пониматься арифметически и алгебраически, так что Декарту пришлось создавать в первой половине XVII в [ека] т. н. аналитическую геометрию. Мало всего этого. Эта самая геометрия настолько превратилась в абстрактную игру абстрактных понятий, настолько оторвалась от всякой жизненной интуиции, что стала возможной геометрия любого числа измерений; и всякая такая геометрия выводится чисто абстрактно, не зависимо ни от каких интуиций и наглядных представлений. Функционализм, оторвавши числовое представление от бытия, сделал возможным и бесконечные полеты, самозабвенный экстаз разумных и рассудочных построений математики, и он же облегчил это никогда не угасавшее на Западе стремление к тончайшей инкрустации мысли, к капризнейшей отточенности числовых конструкций, к поражающей subtilности всего математического исследования⁷.

Античность и Средние века по сравнению с этим — наивны, статичны, целомудренно-устойчивы, связаны своими глубочайшими корнями с бытием, которое они мыслят как абсолютное. И тут не может быть такого фантастического разгула мысли. Тут больше деловитости, трезвости, уравновешенной расчетливости и серьезности.

Итак, функционализм вырастает на той же почве субъективизма, что и понятие бесконечно-малого. Обе эти категории появились в результате отрыва от абсолютных и объективных установок; оба они питаются субъективистическим рвением в необозримую и таинственную даль, стремясь, одно — отбросить субстанцию и тяжелую материальную фактичность действительности, а другое — в достигнутой таким образом чисто смысловой сфере погрузиться в неустанную погоню за вечно уплывающей из рук умственной бесконечностью.

Естественным должен быть вопрос: не объединятся ли как-нибудь эти две фундаментальные категории — функция и бесконечно-малое? Неужели их не объединил тот общий дух, который их породил? И неужели он не объединил их с целью усилить действие каждой из них? Вполне естественно ожидать, что эти две функциональные категории сплотятся вместе и создадут зрелище, небывалое по силе, своеобразию и красоте.

Да, это именно и произошло в XVII веке, когда появилось дифференциальное и интегральное исчисление, основанное как раз на анализе функций бесконечно-малых приращений независимого переменного. *Математический анализ и есть это объединение уче-*

ния о функциях с учением о бесконечно-малом. И тут перед нами начнут вырисовываться уже конкретные контуры этой замечательной науки.

Чтобы закрепить достигнутое нами понятие функции (на пороге исследования самого математического анализа) в виде обычной диалектической тройственности принципов, скажем так.

Переменное, взятое безотносительно и самостоятельно, переменное в себе есть *независимое* переменное. В математике его называют аргументом и обозначают через x .

Переменное, взятое как противоположность независимому переменному, есть *зависимое* переменное и обозначается через y . Этот y указывает на то, что есть *какая-то* зависимость между ним и x .

Но это ведь есть не только *какая-то* зависимость или зависимость *вообще*, но и *конкретная форма* зависимости. Иначе и быть не может. Поскольку *независимое* переменное есть нечто определенное, постольку, входя в объединение с зависимостью от него другого переменного и осуществляясь в качестве именно аргумента, оно должно и абстрактную зависимость превратить в такую же определенную и конкретную зависимость. Это-то и есть *функция* в собственном смысле слова и обозначается в математическом анализе так:

$$y = f(x).$$

Чтобы перейти теперь к исследованию форм объединения понятий функции и бесконечно-малого, вспомним, чтобы не сбиться, еще раз диалектическую последовательность наших мыслей. Сначала мы обследовали величину как таковую. Сюда вошло учение как о непосредственно-значащих величинах — арифметических, — так и учение об опосредствовании этих величин в форме непрерывности, прерывности и предела. Это обобщение учения о величине завершилось синтезом числа как непосредственного и как опосредствованного бытия — в форме учения о бесконечно-малом. Теперь все рассуждение о понятии функции заставило нас совсем покинуть область величин и непосредственных, и опосредствованных, и синтетических и перейти в противоположную область — *отношений* между величинами (а не самих величин), в область функциональных отношений.

Естественно возникает потребность объединить эти две области — величин (чисел) и функций. Тут-то и возникают понятия производной, дифференциала и интеграла.

7. Производная. Итак, отныне мы находимся всецело в области функций. Кроме того, эти функции мы пополняем содержанием, основанным на понятии бесконечно-малого. Следовательно, имеется *независимое* переменное, погруженное⁸ в стихию бесконечно-малого становления, и имеется *зависимое* от него переменное, тоже, очевидно, как-то связанное с процессом бесконечно малого становления. И возникает вопрос: что же делается с этим зависимым

переменным, с функцией, и какую форму принимает это отношение аргумента к функции. Когда берется функция $y=f(x)$, то ясно, в каком отношении находятся x и y . Пусть имеется $y=x^2+1$: ясно, что нужно сделать с x , чтобы получить y . Но вот x ушел в становление, погрузился в бесконечный процесс стремления, ушел в бесконечную даль, и — спрашивается: что же делается с зависимым от него y , в каком положении очутится этот становящийся x к становящемуся y ? С самого начала ясно, что это будет совершенно иным отношением, чем то отношение, в котором находились между собой x и y , когда они покоились на месте, были просто арифметическими и алгебраическими величинами и не погружались в стихию алогического становления. Рассмотрим теперь, что же это за отношение и что тут нового по сравнению со статическим значением величин.

Итак, изменяется аргумент, изменяется в зависимости от него и функция. Употребляя традиционные обозначения математического анализа, мы получим следующее. Если x — аргумент, Δx будет приращением аргумента x . В зависимости от этого функция y тоже будет нарастать; обозначим приращение функции через Δy . Чтобы узнать, какой вид примет наращение функции, возьмем приращенную функцию $f(x+\Delta x)$ и вычтем из нее первоначальную функцию $y=f(x)$. Получаем: $f(x+\Delta x)-f(x)$. Это есть то наращение, которое происходит в функции, когда получается наращение аргумента Δx . Следовательно, если

$$y=f(x),$$

то

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

и, беря отношение обеих частей этого равенства к Δx , мы получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Это и есть математическое выражение того нового отношения, в которое вступают x и y , когда они берутся не сами по себе, не статически, но когда они погружаются в процесс становления, т. е. начинают нарастать или убывать. Это рассуждение (и обозначение) обычно еще не вполне достаточно, и требуется его существенно дополнить в одном пункте.

Именно, нас ведь интересуют не приращения вообще, но *бесконечно-малые* приращения и не процесс вообще, но именно алогическое становление. Мы раньше уже видели, что в понятии бесконечно-малого дано не просто изменение величины, но изменение самого изменения, *становление* изменения, почему оно не просто налично тут как таковое, но оно дает все меньшие и меньшие результаты, оно все меньше и меньше оказывается изменением. Сама категория изменения тут, очевидно, вовлечена в становление.

И только при этом условии переменная величина может быть бесконечно-малой. Она должна иметь своим пределом нуль — только тогда она действительно бесконечно мала.

Применяя это к нашему рассуждению, мы должны Δx считать бесконечно-малым. Δx должно стремиться к нулю, оно должно иметь своим пределом нуль. Но тогда существенно меняется вся картина выставленного выше отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Именно, Δx становится все меньше и меньше. Соответственно и Δy должно становиться все меньше и меньше. Чтобы конкретно представить себе новые значения аргумента x в связи с уменьшающимся приращением Δx , вычислим соответственно новые значения функции, уменьшающиеся приращения функции, а также и отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; мы получим примерно след. табличку.

Начальное значение x	Новое значение x	Приращ. Δx	Начальное значение y	Новое значение y	Приращ. Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
3	4	1	10	17	7	7
	3,9	0,9		16,21	6,21	6,9
	3,8	0,8		15,44	5,44	6,8
	3,7	0,7		14,69	4,69	6,7
	3,6	0,6		13,90	3,90	6,5
	3,001	0,001		10,006001	0,006001	6,001

Пусть у нас имеется функция

$$y = x^2 + 1$$

и пусть начальное значение x будет 3. Тогда начальное значение $y = 3^2 + 1 = 10$. Возьмем теперь какое-нибудь новое значение x , напр. 4, тогда $y = 4^2 + 1 = 17$. В первом случае приращение будет

$$\Delta x = 4 - 3 = 1,$$

во втором случае приращение будет

$$\Delta y = 17 - 10 = 7.$$

Следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7}{1} = 7$.

Будем теперь постепенно уменьшать Δx , придавая ему значения 0,9; 0,8; 0,7 и т. д. Соответственно будет меняться x и также y , а стало

быть, и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Мы действительно видим, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ принимает все

меньшие и меньшие значения: 7; 6,9; 6,8; 6,7 и т. д. Спрашивается: до каких же пор будет это отношение уменьшаться? Δx стремится

к нулю. К чему же стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Чтобы ответить на этот вопрос, представим вышеприведенное выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при помощи данной формулы $y = x^2 + 1$. Именно, взявши приращенную функцию, получаем:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 1 = x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 + 1,$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta y &= x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - (x^2 + 1) = \\ &= x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Итак, чтобы судить о том, к чему стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, достаточно полученное выражение $2x + \Delta x$ взять в пределе, т. е. в условии стремления Δx к нулю. Очевидно, если Δx стремится к нулю, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $2x$, так как Δx , как стремящееся к нулю, стремится просто отпасть. Значит, если начальное значение аргумента x у нас было 3, то предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет равен, очевидно, $2 \cdot 3 = 6$.

И действительно, просматривая в нашей табличке значения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, мы видим, что оно постепенно уменьшается, но не становится меньше 6. Если бы мы взяли, напр., $\Delta x = 0,001$, то, как показывает вычисление, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ оказалось бы равным 6,001. Легко проверить это, подставляя все меньшие и меньшие Δx и получая отсюда все меньшие и меньшие $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, но не становящиеся меньше 6. 6 — это предел, к которому стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если брать функцию $y = x^2 + 1$ при начальном значении $x = 3$.

На этом простейшем примере отчетливо видно, какую форму приобретает взаимоотношение x и y , когда оно начинает действовать не само по себе, но в своем инобытии, в своем становлении, когда они сплошно и неизменно растут или вообще меняются.

Предел этого отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю, и есть *производная*, т. е. функция, «произведенная» от y , которую называют первообразной функцией. Следовательно, *производная данной функции есть предел отношения приращения этой функции к прира-*

щению аргумента, когда это приращение аргумента стремится к нулю как к своему пределу.

Не будем забиваться в абстрактные дебри, как это любят делать математики, давая это понятие в дифференциальном и интегральном исчислении. Также недостаточны для понимания производной и те геометрические и механические привнесения и толкования, которыми математики оснащают свои руководства, думая на них конкретизировать это отвлеченное понятие. Надо, однако, еще до этих применений и толкований научиться понимать эту замечательную категорию, понимать всю ее жизненную и, следовательно, философскую конкретность.

Что такое производная? Для понимания этой основной категории математического анализа надо с максимальной отчетливостью представить себе разницу между бытием и инобытием или, точнее, между бытием и *становлением*. Если эта разница усвоена нами с достаточной отчетливостью, тогда необходимо достигнуть четкости еще в представлении того, как совершается стремление к пределу. Если эти две вещи усвоены, то логический состав производной будет ясен сам собой.

Что такое становление? Его удобно можно обрисовать путем противопоставления голому бытию (или голой идее⁹), по сравнению с чем оно действительно есть резкая противоположность. Бытие есть прежде всего нечто оформленное и устойчивое; становление бесформенно стремится вперед. Бытие — царство раздельности, координированности; становление же есть алогический процесс, в котором все отдельные моменты сливаются в одну неразличимую непрерывность. Арифметика оперирует с числами вне всякой их процессуальности. Для нее они — вечные, незыблемые идеи, предстоящие в виде некоей картины, и считающий только выбирает из этой картины то одни числа, то другие. Алгебра и элементарная геометрия, не оперируя с арифметическими числами, все же, вполне на манер арифметики, оперируют со своими величинами опять-таки чисто статически. И только в анализе дана чистая стихия становления, чистое алогическое становление, в котором тонет всякая раздельность, затухает всякое оформление и совершается уход в бесконечную даль, к неохватным горизонтам.

Идеи, числа, вещи, взятые как неподвижные, статические, вечные структуры, предстают как определенным образом связанные между собой, предстоят в некоем конкретном взаимоотношении. Будучи же погружены в стихию становления, они в корне меняют свое взаимоотношение; оно становится неузнаваемым, хотя мы и должны уметь выводить это их алогически-становящееся взаимоотношение из их логически-неподвижного взаимоотношения. Вещи, идеи, числа — все, что мыслится и существует, — одним образом взаимосоотносятся, когда берется в чистом и непосредственном виде, и совершенно другим способом взаимосоотносятся, когда уходит в алогическое становление и растворяется

в нем. Итак, это первое и самое главное в производной: *производная есть взаимоотношение величин, перешедших в алогическое становление.*

Второе, очень важное обстоятельство заключается в том, что производная содержит в своем логическом составе момент *предела*. Что такое предел, об этом уже говорилось выше. Однако ни на минуту нельзя упускать из виду всего своеобразия этой богатой категории — предела и надо уметь учитывать его в общем логическом составе производной. Схематически эту ситуацию можно представить так.

Аргумент x , погрузившись в становление, меняется, движется — в бесконечность.

Зависящая от него функция y , погрузившись в становление, тоже все время меняется, движется — до бесконечности.

Теперь, *отношение между этими двумя, бесконечно становящимися величинами есть тоже величина переменная; оно тоже все время меняется, движется и — тоже до бесконечности.* Это очень важно все время учитывать и иметь в виду. Производная все время *меняется, движется, становится. Производная тоже пребывает в становлении*, она в каждый новый момент взаимоотношения становящегося аргумента и функции — все новая и новая, все иная и иная. Но только это становление производной не какое-то вообще, а вполне определенное, так как ведь и аргумент, и функция есть тоже вполне конкретная определенность и таковыми они и вступают в стихию становления. Но какая же может быть определенность в становящейся величине? Определенность становления аргумента x продиктована самим аргументом x ; она выражается через $x + \Delta x$. Определенность становления функции y опять-таки продиктована определенностью самой функции; эту нарушенную функцию мы найдем в выражении $y + \Delta y$. Но от чего зависит определенность становления *производной*? Она ведь потому-то и называется производной, что она не самостоятельна, а всецело зависит от поведения в инобытии аргумента x и функции y . Вот *предел*, к которому стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, и есть то, что дает производной определенность

и указывает на ее определенную закономерность. Отдельные $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

с этой точки зрения еще не есть сама производная, а как бы только подготавливают ее, стремятся к ней. В настоящем смысле производная возникает только тогда, когда все эти отдельные $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ получают особую структуру, как некий ряд, как некая последовательность. Это и совершается тогда, когда ряд этот получает *предел*. И производная, находя в каждом отдельном $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ свое приближенное выраже-

ние, оказывается в точном смысле производной именно тогда, когда она есть *предел* этого отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

С этой точки зрения производную необходимо понимать как *закон инобытия идеальной взаимозависимости*. Когда дана функция сама по себе, $y=f(x)$, и не ставится никакого вопроса о становлении x и y , то все действия происходят тут в области чисто идеальной, неподвижно идеальной. Когда x и y перешли в становление, они вышли за свои собственные границы и перешли из своего бытия в свое инобытие. Какой же закон существования этой идеальной взаимозависимости, когда она перешла в свое инобытие? Ответ: этот закон существования идеальной взаимозависимости в инобытии к себе самой есть *производная*. По ней мы видим, как ведут себя идеальные вещи в инобытийно-реальном становлении и какова структура и внутренняя связь, царящая в этом инобытийном поведении.

Здесь перед нами еще раз появляется воочию тайна западноевропейского мироощущения, покинувшего идеальную действительность абсолютов и погружившегося в непроглядную тьму становления и вечных исканий. Когда действительность мыслилась и переживалась в своей абсолютно-объективной, лично-самостоятельной субстанциальности, тогда не было особенных причин уходить в становление, а были все причины пребывать в собранном и целомудренно-уравновешенном состоянии. Когда же все объективное бытие было зачеркнуто и человеческий субъект стал усиливаться в самом себе и притом из самого себя исходить все быстрее, тогда, по невозможности физически обнять бесконечную вселенную, волей-неволей пришлось устремиться в вечное искательство и расслоить спокойное обладание истиной на бесконечное и беспокойное ее достижение. Тогда и возникла непреодолимая потребность, своего рода метафизическая страсть созерцать, наблюдать, изучать и фиксировать не устойчивые структуры природы и духа, но их становящуюся стихию, не числа и вещи в их законченном стройном бытии, но числа и вещи в их бесконечно стремящемся инобытии. И так как нельзя же было настолько погрузиться в становление, чтобы потерять всякую мысль и расстаться с самой способностью расчленять, обобщать и теоретизировать, то и были созданы такие методы мысли, которые бы максимально соответствовали алогически-становящемуся бытию, и такая математика, которая, сохраняя свою точность и четкость форм, говорила бы не о стройном и законченном архитектурном целом, но о вечно рвущемся, вечно бесконечном стремлении. Производная и есть эта точная, четкая, максимально-логическая форма и метод мысли для познания всегда неточного, всегда спутанного и нечетного, максимально алогического становления и изменения. В этом вся ее тайна. И в этом ее совершенно своеобразный культурно-исторический строй; и, можно сказать, в этом — метафизическая страсть,

владевшая и владеющая всеми, кто мыслит и действует инфинитизмально, кто мыслит и действует как вечно стремящийся и никогда ненасытный Фауст.

8. Дифференциал и интеграл. Вся рассмотренная нами до сих пор картина осуществлялась между величинами x и y . Мы отметили три особых момента: Δy , Δx и y' , связывая их одним отношением¹⁰

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

Что такое x и dx , этого мы сейчас можем и не разъяснять, так как x это есть просто независимое переменное, а dx — то его приращение, в силу которого оно вступает в процесс становления. Так как здесь идет речь о независимых величинах, о произвольных величинах, то, очевидно, весь наш интерес должен относиться к тому, что от них зависимо, и к самой форме этой зависимости. Общее понятие нам также известно. Но уже это dy может получить более точное определение из соответствующего видоизменения вышеданной формулы производной. А именно, из нее вытекает, что

$$dy = y' dx.$$

Иначе говоря, оказывается, что о dy можно судить на основании y' и dx , т. е. приращение функции зависит от производной и от приращения аргумента. Здесь, однако, необходимо соблюдать более точный способ рассуждения и выражения, и мы получаем понятие дифференциала.

Прежде всего dx , приращение независимого переменного, стремящееся к нулю, в отличие от Δx , от приращения, вообще называется *дифференциалом* независимого переменного. *Дифференциал аргумента есть, следовательно, бесконечно-малое его приращение.* Соответственно необходимо проводить различие и между приращениями функции. Когда растет аргумент, соответственно растет и функция; и в общем случае, когда не становится вопрос о характере этих приращений, приращение функции мы обозначаем через Δy . Однако нас интересует именно бесконечно-малое наращение аргумента. Тогда соответственно получит специфическую окраску и приращение функции. Вот это-то приращение функции в условиях бесконечно-малого нарастающего аргумента и называется дифференциалом функции; и оно есть произведение производной на бесконечно-малое приращение аргумента (т. е. $y'dx$).

Но и в этом определении еще не выявляется с полной отчетливостью и выпуклостью смысловая структура дифференциала. Это определение есть ведь не что иное, как перефразировка логических моментов, входящих в понятие производной. Чтобы выявить наружу этот скрытый принцип дифференциала, представим себе процессы, дающие производную, более подробно.

Если разница

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)$$

стремится к нулю и есть величина бесконечно-малая, то, обозначая ее через ε , получаем

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=\varepsilon; f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)dx+\varepsilon dx.$$

Левая часть этого равенства есть общее приращение функции Δy . В правой же части $f'(x)dx$ есть, по предыдущему, дифференциал функции, dy . Стало быть, это равенство можно переписать так:

$$\Delta y=dy+\varepsilon dx,$$

т. е. общее приращение функции отличается от дифференциала функции на величину εdx . Если отдать себе строгий отчет в этой величине, то станет ясным и все отличие приращения функции от дифференциала функции. Что такое εdx ? dx есть бесконечно-малое приращение аргумента, равно как и ε — тоже бесконечно-малое. Умножение одного на другое дает, очевидно, бесконечно-малую величину *высшего* порядка, чем просто dx . Бесконечно-малое высшего порядка есть то, которое имеет высшую малость, т. е. такое, которое *мельче* другого бесконечно-малого. εdx мельче, чем просто dx . Но так как $dy=f'(x)dx$ есть бесконечно-малое первого порядка (поскольку $f'(x)$ есть какое-нибудь число, не равное нулю), то εdx мельче, чем $f'(x)dx$, и, следовательно, обсуждая Δy , этой величиной можно пренебречь. Поэтому практически вместо Δy достаточно оперировать с dy , т. е. общее приращение функции можно заменять ее дифференциалом, хотя это и разные вещи.

Таким образом, можно сказать, что *производная есть предел отношения двух дифференциалов — функции и аргумента.*

После этого мы можем перейти и к понятию интеграла.

Производная показывает нам, что делается с функцией, когда она погружается в стихию становления. Расплываясь по морю этой бесконечности, мы можем и совсем забыть то, с чем мы вошли в это море. Но мы можем и помнить, можем *вспоминать* то идеальное неподвижное, статически-числовое, что оставили мы на берегу. И когда мы вспоминаем, мы невольно вносим какую-то устойчивость в наше становление, начинаем видеть сквозь мглу становления контуры оставленной темы, статической идеи — правда, теперь уже сильно деформированной и часто принимающей совершенно неузнаваемый вид. Это инобытийно-деформированная функция, пребывающая в этом деформированном виде неизменной среди непрестанного потока бесконечности, и есть *производная*. Однако мы можем задаться и другой задачей.

Мы можем в своем сравнении инобытийной функции с первообразной останавливаться не только на инобытийной [функции], но и на первообразной. Можно не только первообразную функцию рассматривать в сфере инобытия и — получать производную, но можно и производную рассматривать в сфере первообразий и — получать эту самую первообразную. И как первообразная претерпевает деформацию при переходе в инобытие, так и производная претерпевает деформацию при переходе из инобытия в бытие. Тот и другой процесс, конечно, являются взаимообразными. И принципиально должно быть ясно, что если мы сумеем переходить от «первообразного» бытия к «производному» инобытию, то также (или в значительной мере так) мы должны уметь переходить и обратно, от инобытия к бытию. Вообще говоря, первообразная функция, полученная из инобытийной путем исключения инобытия, и есть *интеграл*.

Интеграл количественно ничем не отличается от любой величины. Всякая величина может быть интегралом. Однако если употребляется такой термин, то, конечно, не для того, чтобы еще другим словом назвать то, что обычно называется величиной. Название «интеграл» указывает на *происхождение* величины, а не просто на самую величину в ее чисто количественном смысле. В понятии интеграла также мыслится процесс, и притом бесконечный процесс, как и в понятии производной; и это не может быть иначе, раз мы условились рассматривать не только инобытие в сфере бытия, но и бытие в сфере инобытия. В бытие тоже вносится момент инобытия, а именно бытие — в нашем случае первообразная функция — мыслится не само по себе, в своей полной непосредственности (тогда была бы просто арифметическая величина, и больше ничего), но в своем *происхождении*, в своей полученности из недр становящегося бытия.

Каким же образом можно получить из инобытия бытие, из дифференциала интеграл? Что тут за процесс происходит? Когда мы имеем производную и, следовательно, дифференциал функции, мы погружены в созерцание бесконечного процесса и фиксируем в нем твердые контуры закона, управляющего этим бесконечным процессом. Наша новая задача заключается в том, чтобы созерцать этот бесконечный процесс не в целях фиксации закона этого же самого инобытийного процесса, но в целях фиксации функции, еще не перешедшей ни в какое инобытийное становление. Мы продолжаем рассматривать эту становящуюся стихию, но фиксируем в ней не ее собственную закономерность, но изначальную функциональную закономерность, инобытие которой и привело к этой становящейся стихии. Соответственно с этим мы уже иначе должны рассчитывать самый процесс становления.

Когда мы искали закон инобытия, мы должны были скользить по самому инобытию, с тем чтобы пронаблюдать этот закон. В глубине этого распыления и появлялся его закон — в виде производной. В случае же, когда надо прийти к первообразному бытию,

мы тоже скользим по инобытию, но, очевидно, не с целью разъединить и распылить, но с целью обобщить, так как первообразная функция перешла в производную именно благодаря распылению и становлению. Обратный процесс, следовательно, есть восстановление и объединение. Только этим путем мы можем вернуться к первообразной функции, потому что только этим путем мы и уходили от нее. Однако, как было недостаточно в первом случае видеть бесконечный процесс распыления, а нужно было еще узреть скрытый за ним и руководящий им закон инобытия (производную), так и здесь недостаточно одного простого суммирования и воссоединения распыленных моментов, а нужно стараться увидеть скрывающийся за этим закон этого объединения, закон этого суммирования, восстанавливающего бытие в его первоначальной данности. Иначе мы потерялись бы в дебрях инобытия — и в первом, и во втором случае.

Но что же это за закон суммирования и воссоединения? Закон становления и распыления есть *предел* становления и распыления. Точно так же закон суммирования должен быть определенным *пределом*, который бы из бесконечности четко управлял этим процессом суммирования. Ясно, что *таким пределом и является наша первообразная функция*, потому что из нее и начался процесс становления, к ней и должно вернуться инобытие из своего бесконечного становления. Она — *предел* этого возвращения, т. е. предел суммирования всего распыленного. Это она видится в глубине восстановительного процесса и скрыто им управляет. Ее мы и должны найти, созерцая восстановительные пути инобытия.

Отсюда, *интеграл есть*, очевидно, *предел суммы всех дифференциалов*. Или, говоря пространнее, это есть предел бесконечно-большой суммы всех бесконечно-малых приращений функции.

Тут мы получаем уже более четкое определение интеграла, которое мы не можем получить, понимая интегрирование как действие, обратное дифференцированию. Только в определении интеграла как предела суммы всех дифференциалов мы обнаруживаем истинную восстановительную и синтетическую природу интеграла. Трактование интегрирования как действия, обратного дифференцированию, хотя оно вполне точно, не обладает такой выпуклостью, которую дает определение через суммирование.

К этому определению интеграла должно быть сделано несколько примечаний.

Прежде всего, как в анализе понятия производной, так и здесь мы должны получить основную стихию, в области которой разыгрываются эти понятия. Это — стихия *становления*, алогического становления, где мы находим полную неразличимость всех отдельных моментов, хотя они и даны как внеположные. Трактую о бесконечно-малом, мы выдвигаем на первый план эту идею бесконечного процесса, где все отдельные моменты слиты в единый неразличимый поток. *То же самое мы всегда должны помнить и в применении к интегралу*. Интеграл также содержит в себе стихию алогического

становления, и в нем также отдельные моменты этого процесса слиты в один внутренне безразличный поток. Правда, значимость этого потока здесь иная, но самый процесс, его алогичность тут одни и те же. Какой бы раздельной величиной ни являлась данная величина, все равно, раз она интеграл, она мыслится *перекрытой стихией алогического становления* и видится и сквозит через данную стихию как ее предельный контур.

Далее, необходимо заметить, что предыдущее определение интеграла есть, в сущности, определение того, что обычно называется «определенным» интегралом. Если мы просто напишем, как это понимается всегда,

$$\int f'(x)dx = f(x),$$

то тут утверждается: $f'(x)$ есть производная функции $f(x)$ и $f'(x)dx$ есть ее дифференциал; интеграл же от этой функции и есть сама первообразная функция $y=f(x)$. В этом способе выражения на первом плане стоит понимание интегрирования как действия, обратного дифференцированию. Однако если мы выдвинем на первый план момент предельного суммирования, то ясно, что это суммирование предполагает определенные *пределы*, в которых совершается данное суммирование. Тут имеется в виду процесс, который в общем можно обозначить так:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Тут имеются два соседних значения функции $f(a)$ и $f(b)$, между которыми и происходит процесс суммирования бесконечно-малых приращений. Этот процесс можно изобразить при помощи суммирования бесконечного количества таких разниц:

$$f(b_1) - f(a); f(b_2) - f(b_1); f(b_3) - f(b_2) \text{ и т. д.}$$

Но ясно и так, что этот процесс разыгрывается между значениями a и b , в *пределах* между a и b , и что только в этом случае процесс суммирования получает законченную форму. Такой интеграл, который является результатом суммирования в определенных пределах, называется *определенным* интегралом в отличие от интеграла, не содержащего этих пределов и носящего название *неопределенного* интеграла. Ясно после этих разъяснений, что, хотя в обычных руководствах по анализу изложение начинается с неопределенных интегралов, логически, а также исторически первенство остается за понятием *определенного* интеграла. И только игнорирование интеграла как результата суммирования и выдвижение на первый план интеграла как результата взаимообразного действия с дифференцированием приводит к тому, что целесообразным считается начинать именно с неопределенных интегралов.

В заключение этого параграфа полезно подвести диалектический итог учению о приращениях и связанных с этим понятий дифференциала и интеграла.

Во-первых, после предыдущего рассуждения должна быть ясна такая тройственная последовательность. Если мы возьмем функцию саму по себе, $y=f(x)$, т. е. функцию в ее непосредственном бытии, то антитезой к ней будет, очевидно, переход ее в инобытие, в становление. Инобытийное становление для функции, как и вообще для всего, есть система бесконечно-малых приращений. И следовательно, если функция *в себе* есть тезис, то диалектическим антитезисом, отрицанием ее будет функция *вне себя*, функция в области *нарастающего становления*. Но тогда синтезом функции в себе и функции вне себя будет, очевидно, функция как *интеграл*, потому что в функции как интеграле дана, во-первых, она сама и, во-вторых, дано перекрытие ее суммой всех ее бесконечно-малых наращений. Функция — тезис, ее наращение, дифференциал — анти-тезис, интеграл — синтез.

Далее, можно диалектически расчленить и среднюю область из только что указанных, область дифференциала. Тут мы имеем 1) приращение аргумента Δx , 2) приращение функции Δy и 3) предел их взаимоотношения $\frac{dy}{dx} = y'$, производную, или — 1) дифференциал аргумента, 2) дифференциал функции и 3) производную.

Таким образом, получается следующая резюмирующая диалектическая схема.

1. Функция в себе, $y=f(x)$.
2. Функция вне себя. Ее становление:
 - а) дифференциал аргумента, dx ,
 - б) дифференциал функции, dy ,
 - в) производная $\frac{dy}{dx} = y'$.
3. Ставшая функция — интеграл $\int y' dx = f(x)$.

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ИХ ЛОГИЧЕСКИЙ СОСТАВ

1. **Дифференциальное исчисление.** Теперь мы знакомы со всеми основными категориями исчисления бесконечно-малых, и теперь мы можем наметить основную структуру и двух главных наук, из которых и состоит математический анализ, — дифференциальное и интегральное исчисления. Начнем с дифференциального исчисления. Сумбур, царящий в обычных изложениях этой науки, когда в одну кучу валится ряд почти не связанных между собой проблем, заставляет с особенной тщательностью и критикой относиться к реальному содержанию того, что мы тут находим. Отбросим то,