

есть, вообще говоря, некоторая конечная величина, самое обыкновенное арифметическое частное. Но когда x и y — соответственно — бесконечно мало меняются, т. е. когда мы берем, собственно говоря, уже не x и y , но их непрерывное становление, тогда отношение их приращений переходит в такое же непрерывное становление. Или говорят так: приращения Δx и Δy бесконечно мало отличаются от нуля или непрерывно стремятся к нулю, а отношение этих бесконечно уমাляющихся приращений имеет некий устойчивый предел. И тогда вместо Δy и Δx пишут dy и dx и записывают так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \text{ а словами говорят:}$$

производная от y по x .

5. Спросим себя теперь: если упомянутое отношение есть чувственное знание (напр., ощущение и представление), то что же такое *предел* этого отношения? Что такое предел наших чувственных познаний данной вещи, когда оказываются учетными все возможные изменения данной вещи, когда мы охватываем, стало быть, целую бесконечность всех мельчайших изменений вещи, т. е. целую бесконечность всех возможных экземпляров вещи, когда мы охватываем, следовательно, все вещи данного ряда? Очевидно, если не входить в детали и ограничиться только самой общей формулой, то это есть не что иное, как *понятие* вещи. *Понятие*, следовательно, или, точнее, сфера образования понятия *есть первая производная от мышления, понимаемого как адекватное существование отражение материальной вещи по самой вещи в условиях непрерывного становления того и другого.*

Строго говоря, производная не есть в переводе на логический язык просто само законченное понятие, но только относится к сфере образования понятия. Строгое же решение этого вопроса будет дано у нас ниже.

4. ЗНАЧЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ ДЛЯ ЛОГИКИ

1. Здесь перед нами также, по-нашему, огромный дар логике от математического анализа. Мы покамест оставим в стороне категорию производной в целом, ибо в дальнейшем ей посвящается у нас отдельный параграф. Но о категории *предела*, входящей в производную, необходимо сказать подробнее уже сейчас. Эта категория, как мы видим, привлечена у нас не больше и не меньше как для изображения *логического* отношения между мышлением и чувственностью.

Невозможно себе и представить все ухищрения ученых в вопросе о взаимоотношении мышления и чувственного представления. Можно сказать, вся история философии, особенно Нового времени, есть история разных теорий о взаимоотношении мышления и представления или, в дальнейшем, мышления и ощущения. И результат всех этих теорий довольно-таки плачевный. Это — априоризм

и сенсуализм с бесконечными оттенками между ними. И это почти всегда подмена логической точки зрения разными натуралистическими исканиями, что из чего и как произошло. Но что бы и как бы из чего ни происходило, логическая значимость этим не определяется. Ньютон, Дарвин, Павлов — религиозные люди, а создавали материалистические системы. И наоборот, многие воспитанники духовных семинарий оказались у нас и материалистами, и революционерами. Пусть общее понятие «происходит» из чувственного опыта. Ну и что же из этого? Прежде всего, такое решение логической проблемы общего понятия не имеет никакой возможности ответить на критику Канта о том, что всякое отдельное чувственное восприятие пространственно-временной вещи уже предполагает априорные формы пространства и времени. А во-вторых, какое же это имеет отношение к *логической* природе мышления? А если известная теорема приснилась мне во сне в готовом виде, значит ли это, что данная теорема неверна?

Вместо всех этих жалких *ignorationes elenchi*² математический анализ дает нам точную и сильную, яркую картину именно *логического* отношения между понятием и представлением. Спросим себя, какой смысл имеет *в науке* чувственное представление? Не само же по себе, в самом деле, оно имеет тут значение. Ведь наука — это установление законов, нахождение *общих соотношений*, т. е. то самое, на что совершенно не способно чувственное представление. Хороша была бы физика, если бы она не шла дальше тех скоростей, которые можно уловить глазом! Не только о скорости света мы никогда не узнали бы и не могли бы о ней учить как о чем-то реальном; но мы вообще о скоростях больших <...> м[етра] в секунду не могли бы иметь никакого представления или должны были бы отрицать их реальность. Но если не само по себе имеет значение для логики чувственное представление, то какое же еще? Уже не такое ли, о котором говорят т. н. эмпирики, что отдельные чувственные представления сливаются в одно общее представление, т. е. такое значение, которое сводится к тому, что они бесследно гибнут и расплываются в мышлении? Однако тут мы, конечно, должны защитить чувственное представление от такого его оправдания. *Чувственное представление вовсе не гибнет; оно нужно для науки, оно — орудие науки; без него нет и самой науки.* Но в чем же тогда дело? В чем же тогда *значимость*, и именно *логическая значимость, представления в сравнении с понятием?*

2. Я не знаю более совершенного способа и сохранить для науки чувственное представление, и в то же время ограничить его в сравнении с научным понятием (так ограничить, как оно фактически ограничено в своем научном употреблении), *кроме толкования понятия как предела и представления как переменной величины, стремящейся к пределу.* Что чувственное представление с такой точки зрения является чем-то ограниченным, это ясно. Но вместо неясного термина «ограниченность» мы получаем тут яснейшую категорию из теории пределов, именно категорию *переменной вели-*

чины, стремящейся к пределу. Такая величина всегда *приблизительна*. Она *никогда не достигает* своего предела, но зато и может приближаться к нему *с любой точностью*. Таким образом, по самой природе своей она есть нечто *становящееся*. Переменная величина имеет предел, говорят математики, если разница между ней и ее пределом может стать меньше любой заданной величины, т. е. вечно стремится к нулю. Что этим чувственное представление буквально *спасается* для науки, это совершенно ясно. Вместо расплывчатого пятна неизвестно чего, вместо абсолютной текучести дряблого чувственного марева представление получает *определенную закономерность*, оно получает научный смысл, его уже нельзя просто отбросить, оно — настоящий фундамент науки. Но в то же время все его логическое значение держится, по нашей теории, только его *пределом*, т. е. понятием, *общим*, которое им управляет, как в математике предел управляет соответствующей ему переменной величиной. В этом пределе нет ровно ничего таинственного или сверхъестественного. Это — самая обыкновенная *конечная* величина. Но он безусловно дает *закон* для соответствующей переменной величины, *точь-в-точь* [как] в реальной и истинной науке: мы имели массу всяких чувственных представлений, но весь их смысл заключается только в том, чтобы мы добыли из них *закон* природы или общества, получили бы то *общее*, которое их осмысляет и для которого они являются материальной базой.

3. Имея все это в виду, попробуем дать более точное *логическое* раскрытие понятия предела. Способов такого раскрытия несколько, и тут возможно употребление самых разнообразных категорий. Предлагаемая нами конструкция отнюдь не единственная и, вероятно, не наилучшая, так как вопрос этот почти не обсуждается в логике; и дружная разработка его, конечно, тотчас же обнаружится бы и другие, более совершенные подходы. Однако за отсутствием исследований этого вопроса в философии попробуем дать тут некоторое логическое построение с единственной претензией — только на первое приближение к истине.

Первое, что представляется нам тут очевидным, это то, что предел вовсе не есть *ни только конечная, ни только бесконечная величина*. Хотя всегда было и много охотников свести предел на конечное число на том основании, что он фактически может быть конечным числом, это есть, само собой разумеется, просто устранение самой проблемы. Когда мы имеем то или иное число натурального ряда, мы, конечно, вовсе не имеем никакого понятия предела и не нуждаемся в нем. Предел интересен вовсе не своей конечностью. Предел, какой бы величиной сам по себе он ни был, интересен тем именно, что он есть *предел, граница* — для чего? Для *некоторого бесконечного непрерывного процесса*. Если нет того, что стремится к пределу, нет и самого предела. Однако что такое это стремление? Оно не может быть рядом конечных и взаимно изолированных величин. Это было бы не стремлением, а мертвым покоем. Следовательно, здесь необходима именно

непрерывность. И потому предел есть синтез конечного и бесконечного в абсолютно неделимом и непрерывном смысле: он есть и нечто устойчивое, определенное, конечное и в то же время требует некоего процесса, стремления, протекания, но — так, что в результате он есть некая совершенно неделимая цельность и единичность, без всяких разрывов и различий.

Это первое, что бросается в глаза при рассмотрении понятия предела. Но это только начало рассмотрения. Дело в том, что тут еще нет предела в том инфинитезимальном смысле, какой нам нужен в этой работе. В таком общем виде синтез конечного и бесконечного дается и в других математических науках, от которых нам сейчас предстоит отграничиться.

В самом деле, разве самое обыкновенное число из натурального ряда чисел не есть синтез конечного и бесконечного? Несомненно. Ведь мы же можем его делить до бесконечности. И совершенно ничто не мешает нам представлять себе, напр., ту же единицу или двойку как составленные из бесконечного числа дробных элементов. Разумеется, эта бесконечность таится решительно во всяком числе натурального ряда, и все-таки это — арифметика, а не математический анализ.

Существует по крайней мере *три разных математических способа* синтезировать конечное с бесконечным.

Во-первых, этот синтез может быть дан *конечными* средствами в *конечном*, в пределах *конечного*. Тут перед нами самое обыкновенное *арифметическое* число, т. е. такое, каким мы его знаем из элементарной арифметики. Тут бесконечность содержится внутри конечного, и тем самым не во всей своей свободе и независимости, но лишь как оформление конечного, т. е. как сплошное заполнение всегда наличных в нем разрывов.

Во-вторых, этот синтез конечного и бесконечного дается в математике еще и средствами *бесконечного*, т. е. мы получаем тут синтез конечного и бесконечного в *бесконечном*. При таком условии теперь уже конечное теряет свою свободу и независимость и становится только оформлением бесконечного, т. е. тем, что вносит в его неразличимость и непрерывность ту или другую оформленность, различимость, прерывность, упорядоченность. Таково *трансфинитное* число, которое есть всегда бесконечное множество, однако — не просто внутреннее сплошное и неразличимое, но — определенным образом оформленное, различимое, определенное и в *этом смысле* конечное. Если в арифметическом числе бесконечное находится на службе у конечного и никуда не выходит за его пределы, то в трансфинитном числе конечное находится на службе у бесконечного и за его пределами не имеет никакого самостоятельного существования.

В-третьих, синтез конечного и бесконечного еще дается в математике и так, что конечное и бесконечное сливаются в общий неразличимый поток, в общее *сплошное становление*, нисколько не перевешивая друг друга, а входя в этот синтез вполне равномерно

и на одинаковых правах. Это есть *инфинитезимальная* величина, т.е. то бесконечно-малое, которое мы и определяли выше как *непрерывный процесс*, как такое малое, которое *может стать* меньше заданной величины, как такое нарастание, которое стремится к нулю и как угодно мало от него отличается.

Эти три синтеза конечного и бесконечного в математике — *арифметический, трансфинитный и инфинитезимальный* — настолько ярко выражены в математике и представляют собою настолько обычное в ней явление, что никаких споров по этому предмету, кажется, не может быть.

Но что это дает нам для логической теории пределов? Мы видим, что проблема предела значительно усложнилась и что предел этот можно понимать по крайней мере *в трех разных смыслах*. При этом нас в этом исследовании интересует, как сказано, только предел в инфинитезимальном смысле. Что же такое предел как *инфинитезимальная* категория?

Очевидно, раз инфинитезимальная точка зрения базируется на *бесконечно-малом*, из этого бесконечно-малого мы и должны тут исходить. При исследовании предела в инфинитезимальном смысле мы должны исходить из *бесконечного и непрерывного становления*, и больше не из чего другого. Мы должны тут оперировать становлением, не внося в него ровно никакого разделения или различения. А какие это операции, это совершенно не касается самого становления. Эти операции могут быть и конечными, прерывными.

Попробуем провести здесь то же разделение, которое мы проводим и в отношении синтеза конечного и бесконечного вообще. А именно, наше сплошное и непрерывное числовое становление мы можем понимать *конечно, бесконечно и в виде непрерывного процесса*. Или, употребляя ходовые термины диалектической логики, мы можем это становление понимать как *бытие* (т. е. акт самополагания, самоутверждения), как *становление* и как *ставшее* (как «наличное бытие», как исчерпавшее всю сферу становления и потому «остановившееся»). Ниже мы увидим, что числовое становление как акт бытия есть дифференциал; числовое становление как именно становление (т. е. как положенное становление) есть непрерывность бесконечно-малого и числовое становление как исчерпавшее себя целиком и потому остановившееся, т. е. числовое становление как ставшее, есть интеграл. Однако сейчас мы еще далеки от исследования этих сложных категорий и пока интересуемся только пределом. Но интеграл, как мы увидим в своем месте, и есть некоторого рода *предел* (какой именно — сейчас не важно). Другими словами, предел в инфинитезимальном смысле есть не что иное, как числовое *ставшее*, а ставшее предполагает и то, что именно становилось, и само становление. Поэтому синтез конечного и бесконечного, находясь нами в пределе, содержит в себе два пласта: во-первых, это есть синтез *по типу становления* (тут наш предел отличается и от арифметического, и от трансфинитного); а во-вторых, *в сфере этого становления* синтез конечного и бесконечного произведен *по типу*

ставшего. И следовательно, предел в инфинитезимальном смысле есть *такой синтез конечного и бесконечного, который дан как непрерывное становление, но целиком исчерпавшее себя или как само непрерывное становление, но — в простом тождестве с собою*, без своего рассыпания и размыва на отдельные моменты. Поэтому предел здесь как бы вобрал в себя всю бесконечность непрерывных приближений к себе и держит их в одной неделимой точке.

Вот почему предел есть обязательно *закон* для стремления к нему приближенных величин, *метод* этого движения, или, попросту говоря, *направление* этого движения, *общее направление* его, то, что содержит в себе всю эту бесконечность индивидуальных приближений. Это потому, что он — ставшее; и это потому, что он — становление; и это потому, что он — устойчивое ставшее непрерывного и бесконечного становления, становление как целое. Невозможно себе и представить, чем оказалось бы общее цельное, родовое без этого учения о пределе. Сама категория закономерности, или закона, повисла бы в воздухе, если бы мы не обладали категорией предела. Только при полном прекращении всякого движения в материи, всякого ее становления можно было бы не пользоваться категорией предела. Но тогда во что же превратилась бы всякая общность, всякая цельность? Разве она не превратилась бы в механическую сумму, во внешнее насилие над абсолютно враждебными друг в отношении друга телами, из которых каждое отвергало бы и исключало всякое другое и уж тем более всю совокупность этих других? Вот почему и немыслима современная математика без теории пределов. Как же в таком случае мы можем строить *логику* без теории пределов, если логика есть только «итог опыта наук» (Ленин)?

5. ЛЕНИН О ПРЕДЕЛЕ, ОБ ОБЩЕМ И О ЗАКОНЕ

1. Задержимся еще на некоторое время на этом вопросе, чтобы больше привыкнуть к этой теории мышления с точки зрения учения о пределах. Дурные привычки неподвижной формальной логики, оперирующей с понятиями в виде каких-то инертных глыб или булыжников, держат логику на ступени колоссальной отсталости от науки, почему и указание некоторых трафаретных фактов из науки будет здесь совершенно нелишним. Понимает ли наука понятие как предел некоей последовательности или как закон некоего ряда, некоторой последовательности отдельных чувственных элементов? Конечно, да. Для этого даже нет необходимости забираться в математический анализ, а достаточно простой арифметики (только арифметики, разумеется, уже не конечных величин), достаточно элементарной механики или физики. Попробуем укрепить свое логическое понимание мышления на этих простейших примерах. *Общее* для нас не есть что-нибудь целиком оторванное от частного и индивидуального. Оно есть *закон* для него и, значит, охватывает