

Одно только можно сказать с полной уверенностью: ясные и строгие достижения точных наук являются одним из наиболее эффективных принципов для построения и логики вообще и в частности структурной логики. Для разъяснения того, что такое структура и как понимать структуру с точки зрения метода бесконечно-малых, конечно, можно было бы привлечь любой материал, напр. хотя бы из художественной области, где вопросы архитектоники играют перво-степенную роль. Однако тут пришлось бы еще убеждать в наличии самых этих материалов и вызывать к эстетическому чувству читателей. Гораздо целесообразнее использовать вместо этого точный и строго научный материал отдельных устоявшихся наук. В органической химии не только установлен точнейшим образом самый факт структуры, но имеется подробная классификация этих структур и вообще богато разработана теория химических связей. Разве может логика пройти мимо всех этих фактов без внимания? И разве логическая структура не есть просто отражение химической (в данном случае) структуры — для той философии, по которой всякое вообще мышление есть не что иное, как отражение бытия?

Один результат мы можем формулировать с полной ответственностью, хотя по необходимости он пока очень общий: *структура мышления так же погружена в непрерывную текучесть, как и все на свете, и поэтому к ней, как и ко всему, тоже приложим метод бесконечно-малых.* И это уже во всяком случае так, как бы мы ни понимали самое структуру. Гарантией этого являются точные науки, и прежде всего химия, где и сама эта категория на первом плане и где уже давно поставлен вопрос о непрерывной превращаемости элементов в связи с отмеченным фактом их радиоактивности. Но конечно, это далеко не единственная наука, где так четко объединяется структурность с непрерывностью.

14. ЖИЗНЕННО-ЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Именно во всех этих рассуждениях мы не должны забывать, что инфинитезимальные понятия не только просто имеют некое отношение к действительности, но что вековое развитие наук о природе доказало их совершенно неотъемлемую связь с нею. Мы их рассматривали в применении к логике, т. е. к науке о мышлении. Но бесконечно-малое есть *неотъемлемое достояние реальной действительности* еще и до всякого мышления и без всякого мышления. Надо иметь в виду, что и без построения логики как науки мы в нашем самом обыкновенном чувственном опыте постоянно интегрируем и дифференцируем и *не можем не интегрировать, не можем не дифференцировать.*

1. В самом деле, меняются ли вещи или нет, движутся или нет? Можно ли остановить непрерывное становление вещей или нельзя этого сделать? Казалось бы, на это может быть только один и совершенно недвусмысленный ответ. Но стоит только допустить,

что вещи непрерывно меняются, как тотчас же возникает вопрос: а как же мы узнаем эту вещь, если она вся целиком и непрерывно меняется. Как она может оставаться *той же* вещью, если мы только что признали, что она сплошь становится и меняется? Ясно, что все ее изменения мы относим к какому-то ее ядру или центру, а не просто их забываем. Мы их, несомненно, *суммируем*. И как же происходит это суммирование? Совсем не так, что все слагаемые остаются твердыми и неподвижными. Эти слагаемые *расплываются* в целом вещи, ибо вещь мы имеем все же как такую, как единичную, из каких бы слагаемых ни складывалось ее движение. С другой стороны, могут ли все эти бесконечно-малые изменения вещи быть таковыми в ней раз навсегда и сливаться в неразличимую массу? Это тоже невозможно, так как вещи реально меняются, и мы отчетливо воспринимаем это изменение. Так что же такое в конце концов реальное восприятие реально движущейся вещи, когда ни становление не дробится на дискретные части, ни дискретные части не теряют своей значимости в том целом, что называется восприятием вещи?

Я не знаю, как тут обойтись без процесса *интегрирования* и *дифференцирования*. Возводя изменения вещи к ее целому и прослеживая, как от них нарастает это целое, мы не делаем ничего другого, как просто-напросто *интегрируем вещь* и *интегрируем наше восприятие вещи*. Ведь надо же когда-нибудь гносеологу и логике всерьез обратить внимание на то, что такое, напр., длина дуги с точки зрения интегрального исчисления. Длиной дуги кривой линии называется здесь *предел* периметра вписанной в нее ломаной, когда число звеньев этой последней бесконечно возрастает, а сами звенья бесконечно умалются. Все наши отдельные, изолированные восприятия частей этой длины есть не что иное, как эти вот звенья ломаной, то большие, то маленькие. Как из них составить восприятие *целой* длины данной дуги? *Только* путем перехода к пределу через суммирование отдельных отрезков в условиях их бесконечного дробления. Но раз так, то что же это может значить иное, как [не] то, что восприятие длины всякой дуги есть интегрирование. А ведь мы же на каждом шагу в обыденной жизни судим о длине тех или иных кривых в тех или иных границах. Далее, разве можно в логике проходить мимо того, как интегральное исчисление понимает площади и объемы тел? О площади мы уже говорили. Но было бы так же просто рассказать и об объеме тела, как о некоторого рода интеграле. Разве это не значит, что воспринять объем тела можно только путем бессознательного интегрирования его элементов? С другой стороны, кто же не наблюдал *скорость* движения тела и не сравнивал проходимость им путь с этой скоростью? Кто не сравнивал скорости двух или нескольких тел, движущихся одновременно? Чем мы занимаемся, идя по людной улице, как не тем, что все время оцениваем движение трамвая, автомашин, велосипедов, лошадей, пешеходов? А известно ли всем, кто занимается логикой, что скорость есть *первая производная от пути по времени*?

Мы всегда наблюдаем ускорение и замедление движения. А известно ли логикам, что ускорение есть *вторая производная от пути по времени*? Что же остается сказать после этого? Не то ли, что восприятие всякой скорости и ускорения есть *бессознательное дифференцирование разных расстояний с точки зрения временного протекания тех или иных движений*?

2. Вы «измерили» глазами какой-нибудь предмет — этот стол, этот стул, этот шкаф и т. д., — и даже не измерили, а просто взглянули на него. Что это значит? Это значит, что вы пробежали по нему глазами. Но что значит пробежать? Ваш пробег состоит из отдельных изолированных точек или не состоит? Пробежать не значит перечислить какие-то изолированные точки. Пробежать глазами и тем более просто взглянуть на предмет — это значит иметь обязательно *непрерывное* восприятие. Но что значит непрерывное восприятие? Это значит не что иное, как суммирование бесконечно-малых приращений. Ни в каком случае нельзя обойтись без этого. Или — прерывность, или — суммирование бесконечно-малых. Но допустим, что это есть суммирование бесконечно-малых восприятий, и больше ничего. Есть ли это восприятие нашего предмета? Ни в каком случае. Ведь мы же взглянули на шкаф, а не на что-то другое. Значит, мы не просто суммируем, но суммируем до каких-то пределов, суммируем по какому-то закону, суммируем в определенных направлениях. Итак, без суммирования бесконечно-малых ощущений нет *непрерывности* в восприятии нашего предмета, т. е. в этом случае он распадается на множество дискретных вещей, не имеющих одна к другой никакого отношения, а без *предела* нет данной и определенной вещи, а есть безграничное и бессмысленное накопление бесконечно-малых ощущений, т. е. тоже потеря предмета. В одном случае теряется его непрерывность, а в другом случае утрачивается его осмысленность как именно данного предмета. Но ведь предел суммы бесконечно-малых есть именно интеграл и достижение такого интеграла есть интегрирование. А это значит, что даже измерить данную вещь глазами, т. е. просто взглянуть на нее, — это уже значит *интегрировать* ее в точном математическом смысле слова.

В течение дня мы сплошь имеем дело с измерением или по крайней мере оценкой длин, площадей, поверхностей и объемов. Я сел за стол — это значит уже употребил какие-то оценки высоты стула и стола и сравнил обе эти высоты. Я взял в руки перо — это значит оценил объем пера и то расстояние, на котором оно до этого времени находилось от меня. Я встал, надел пальто и шапку, вышел на улицу и стал идти по улице — это значит, что я все время оцениваю длины тех кривых, по которым я иду, объемы тех тел, которые я нахожу на вешалке и на себя надеваю, те величины и размеры, которые я встречаю на улице (ширину тротуара, рост встречаемых людей, размеры витрин или дверей магазинов) и т. д. и т. д. Что такое все это? Все это есть сплошное интегрирование бесчисленного ряда ¹⁵ функций, сплошное интегрирование своих ощущений.

Вы встречаете знакомого и говорите ему: «Как вы постарели!» или «Как вы помолодели!» Что это значит? Это значит прежде всего, что вы сравнили его теперешний вид с тем, что он был, напр., три года назад. За эти три года ваш знакомый постарел. Но ведь он жил, конечно, вполне *непрерывно* в течение этих трех лет? Совершенно верно. И вы теперь констатируете известный *результат*? Совершенно верно. Однако в таком случае вы, конечно, просто-напросто *проинтегрировали известную функцию* (т. е. вашего знакомого) *в точно определенных пределах* (а именно в пределах тех трех лет, в течение которых вы его не видели). Вы получили т. н. *определенный интеграл*.

Однако вовсе нет необходимости для подтверждения нашего ежесекундного интегрирования ссылаться на физические длины, площади, объемы или временные промежутки. Закроем глаза, заткнем уши, забудем все обоняния и осязания и погрузимся в средоточенное размышление,— и мы тут никуда не уйдем от ежесекундного интегрирования. Пусть мы что-нибудь мыслим, ну, хотя бы т. н. Смутное время на Руси в начале XVII в., Наполеона, Солнечную систему, римский сенат, план новой гидростанции. Что бы мы ни мыслили, мы всегда мыслим *нечто*. И как бы мы это ни мыслили, мы в нем нечего различаем и это различаемое соединяем в целое. Всякое такое нечто как едино-раздельное целое не может не быть непрерывностью — уже по одному тому, что оно есть нечто и это «нечто» разлито по всем его отдельным элементам. Но что же такое целое, определенное целое, возникшее из непрерывного суммирования своих частей? Оно опять есть интеграл. Без интегрирования никуда не деться, если только брать существующее в непрерывном становлении. Только ценою устранения непрерывного становления из вещей можно обойтись без интегрирования. Но вещи, которые не становятся непрерывно, не есть реальные вещи. Это фикция, фантом, жалкая абстракция или пылкая фантазия, но не действительность.

3. С другой стороны, всякое нахождение частных на фоне общего при условии непрерывного их возникновения, а также при условии знания способа или метода (если не закона) такого возникновения возможно только как *дифференцирование*. Найти производную — это и значит овладеть способом проявления ввне некоей функции в зависимости от ее непрерывного изменения. Если вы наблюдаете течение горной реки и видите, как стекающие с высоты струи воды образуют около какого-нибудь камня определенной формы водоворот,— вы бессознательно дифференцируете общую функцию потока воды по этому «аргументу», т. е. по времени протекания этого потока вокруг торчащего камня. Находясь в местности, подверженной периодическому влиянию ветров, вы, зная характер изменения ветра в известное время, несомненно, дифференцируете общую функцию ветра по времени. Так, в селении, расположенном недалеко от гор, вечером и ночью дует определенной силы ветер. Заметить и оценить это мы можем только путем дифференцирования. Когда мы говорим, пишем, ходим, работаем, даже просто слушаем, мы всегда имеем дело с некоторым непре-

рывным процессом и с целесообразным, закономерным получением тех или иных результатов — речи, устной и письменной, ходьбы, работы, слушания. Но тогда все это есть акты нашего бессознательного дифференцирования тех или иных функций речи, работы, ходьбы и т. д. по времени. Общий метод получения этих частных результатов на фоне непрерывного изменения той или иной функции в связи с протеканием времени и есть в данном случае производная. Так, я решил идти по улице быстро или медленно. Это значит, что я вычислил определенного рода производную (т. е. скорость) на основании общей функции своего хождения в связи с протеканием времени. Если бы балерина не дифференцировала своего движения по времени и не интегрировала бы его в течение всех моментов этого движения, танец ее не мог бы состояться и она осталась бы без движений. Впрочем, однако, и неподвижность тоже протекает во времени, и притом протекает непрерывно, так, что даже остановиться в своем движении нельзя без целого ряда актов интегрирования и дифференцирования.

4. Словом, абсолютно везде, где есть непрерывное становление (а где его нет?), мы всегда, как только раскрываем рот, чтобы нечто об этом высказать, уже дифференцируем и интегрируем, ибо везде тут мы нечто расчлняем, т. е. полагаем границы, пределы, т. е. устанавливаем законы для бесконечно-малых становлений. Наблюдая побеление на востоке при восходе солнца, мы интегрируем наше восприятие, ибо побеление, во-первых, есть непрерывный процесс, во-вторых, это есть суммирование бесконечно-малых нарастаний и, в-третьих, в нем есть определенная закономерность этого суммирования, т. е. его предел. Что же это, как не интегрирование? Софизм об Ахиллесе и черепахе только потому и обладает такой эффектной силой, что он дает нам движение вне категорий интеграла и производной. Ибо как только возникает вопрос о том, можно ли движение представлять как только состоящее из конечных отрезков, т. е. без перехода к пределу, так рушится здесь и весь софизм. Софизм об Ахиллесе и черепахе хорош как раз именно тем, что он доказывает невозможность воспринять реальное движение и скорость, а также и сравнивать скорости без процессов дифференцирования и интегрирования.

Может ли, софизм теперь, наука о мышлении обойтись без понятия интеграла? Обойтись без этого значило бы просто исключить всякое непрерывное становление и всякий переход к пределу, т. е. заморозить, остановить, удушить всякое движение в мире и в мысли. Едва ли эта концепция может рассчитывать на успех.

Можно сказать еще и так. Традиционная логика (да и вообще логика) очень злоупотребляет *анатомией* мышления и очень пренебрегает его *физиологией*. Мудро распределить анатомические и физиологические моменты в цельном организме мышления — это дело большого искусства философствовать и строить науку, ибо организм нет ни без анатомического строения, ни без физиологических функций, ни без определенного и полного взаимоотношения того

и другого. Когда школьная логика просто делит род на виды, и больше ничего, она явно злоупотребляет анатомией, если не прямо вивисекцией. Так никогда не может быть, если только мышление есть организм. Есть в мышлении некоторая общая «физиологическая» жизнь, которая и оживляет все органы и члены ее организма и которая воссоединяет их в одно живое целое. Но как подступить к этой «физиологии» мышления? Очевидно, надо прежде всего уметь чувствовать, понимать и фиксировать его *движение, подвижность*; далее, для этого надо уметь находить здесь *непрерывное движение, непрерывное становление*, разлитые по всем органам и членам мыслительного организма; наконец, надо уметь видеть, *в каком направлении*, по какому закону и принципу, *до какого предела* простирается становление этого взаимоотношения организма со своими органами и частями, *по какому методу* из общей жизни организма мышления образуются все его частности, все бесконечные, то более точные, то менее точные, его проявления и выражения. Однако мы уже доказали, что все это есть не что иное, как постоянное математическое интегрирование и дифференцирование.

5. Рассуждая о жизненно логическом значении математического анализа, необходимо иметь в виду также и то, что на этом значении базируются не только наши повседневные жизненные оценки и поведение, но и всякая развитая наука и что, таким образом, некоторого рода дифференцирование и интегрирование фактически налично даже и в таких науках или в таких отделах наук, которые не имеют ничего общего с чисто математическим дифференцированием и интегрированием. Однако здесь мы предоставим слово Энгельсу, который лучше, чем кто-нибудь другой, понимал философскую природу инфинитезимального метода и которому принадлежат следующие замечательные слова (соответственно той картине мироздания, которую имел в виду сам Энгельс):

«Наша геометрия исходит из пространственных отношений, а наша арифметика и алгебра — из числовых величин, соответствующих нашим земным отношениям, т. е. соответствующих телесным величинам, которые механика называет массами,—массами, как они встречаются на Земле и приводятся в движение людьми. По сравнению с этими массами масса Земли кажется бесконечно великой и рассматривается земной механикой как бесконечно большая величина. Радиус Земли = ∞ . Таков принцип механики при рассмотрении закона падения. Но не только Земля, а и вся Солнечная система и все встречающиеся в ней расстояния оказываются с своей стороны бесконечно малыми, как только мы начинаем интересоваться наблюдаемой в телескоп звездной системой, расстояния в которой приходится определять уже световыми годами. Таким образом, мы имеем здесь перед собой бесконечные величины не только первого, но и второго порядка и можем предоставить фантазии наших читателей—если им это нравится—построить себе дальнейшие бесконечные величины высших порядков в бесконечном пространстве».

«Но, согласно господствующим теперь в физике и химии взглядам, земные массы, тела, служащие объектами механики, состоят из молекул, из мельчайших частиц, которые нельзя делить дальше, не уничтожая физического и химического тождества рассматриваемого тела. Согласно вычислениям В. Томсона, диаметр наименьшей из этих молекул не может быть меньше одной пятидесятиллионной доли миллиметра. Допустим также, что наибольшая молекула имеет диаметр в одну двадцатипятиллионную долю миллиметра. В таком случае это все еще ничтожно малая величина по сравнению с теми наименьшими массами, с которыми оперируют механика, физика и даже химия. Между тем она обладает всеми присущими соответственной массе свойствами; она может представлять в физическом и химическом отношении эту массу и действительно представляет ее во всех химических уравнениях. Короче говоря, она обладает по отношению к соответствующей массе теми же самыми свойствами, какими обладает математический дифференциал по отношению к своей переменной, с той лишь разницей, что то, что в случае дифференциала в математической абстракции кажется нам таинственным и непонятным, здесь становится само собой разумеющимся и, так сказать, очевидным.

Природа оперирует этими дифференциалами, молекулами точно таким же образом и по точно таким же законам, как математика оперирует своими абстрактными дифференциалами. Так, например, дифференциал от x^3 будет $3x^2dx$, причем мы пренебрегаем $3xdx^2$ и dx^3 . Если мы сделаем соответственное геометрическое построение, то мы получим куб, длина стороны которого x , причем длина эта увеличивается на бесконечно-малую величину dx . Допустим, что этот куб состоит из какого-нибудь возгоночного вещества, скажем из серы; допустим, что три прилегающие к одной вершине поверхности защищены, а другие три свободны. Поместим этот серный куб в атмосферу из серного газа и понизим температуру последней надлежащим образом; в таком случае серный газ начнет осаждаться на трех свободных гранях нашего куба. Мы не пойдем вразрез с опытными данными физики и химии, если, желая представить себе этот процесс в его чистом виде, мы допустим, что на каждой из этих трех граней осаждается прежде всего слой толщиной в одну молекулу. Длина стороны куба увеличилась на диаметр одной молекулы, на dx . Объем же куба x^3 увеличился на разницу между x^3 и $x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$, причем мы, подобно математике и с тем же правом, можем пренебречь dx^3 , т. е. одной молекулой, и $3xdx^2$, тремя рядами линейно расположенных друг около друга молекул длиной в dx . Результат одинаков: приращение массы куба равно $3x^2dx$.

Строго говоря, у серного куба dx^3 и $3xdx^2$ не бывает, ибо две или три молекулы не могут находиться в том же пространстве, и прирост его массы точно равен поэтому $3x^2dx + 3xdx$. Это находит себе объяснение в том, что в математике dx есть линейная величина, но таких линий, не имеющих толщины и ширины, в природе самостоятельно, как известно, не существует, а следовательно,

математические абстракции только в чистой математике имеют безусловную значимость. А так как и она пренебрегает $3xdx^2 + dx^3$, то это не имеет значения.

То же самое можно сказать и об испарении. Если в стакане воды происходит испарение верхнего слоя молекул, то высота слоя воды уменьшается на dx , и продолжающееся улетучивание одного слоя молекул за другим фактически есть продолжающееся дифференцирование. А если под влиянием давления и охлаждения пар в каком-нибудь сосуде сгущается, превращаясь в воду, и один слой молекул отлагается на другом (причем мы отвлекаемся от усложняющих процесс побочных обстоятельств), пока сосуд не заполняется, то перед нами здесь буквально происходит интегрирование, отличающееся от математического интегрирования лишь тем, что одно совершается сознательно, человеческой головой, а другое — бессознательно, природой. Но процессы, совершенно аналогичные процессам исчисления бесконечно-малых, происходят не только при переходе из жидкого состояния в газообразное и наоборот.

Когда — благодаря толчку — движение масс уничтожается как таковое и переходит в теплоту, в движение молекулярное, то разве не происходит в этом случае дифференцирования движения масс? А когда молекулярное движение пара в цилиндре паровой машины, суммируясь, поднимает поршень на определенную высоту, переходит в движение масс, — разве это не интегрирование? Химия разлагает молекулы на атомы, имеющие меньшую массу и протяженность, но представляющие величины того же порядка, что и первые, так что молекулы и атомы находятся в определенных, конечных отношениях друг к другу. Следовательно, все химические уравнения, выражающие молекулярный состав тел, представляют собой по форме дифференциальные уравнения. Но в действительности они уже интегрированы благодаря фигурирующим в них атомным весам. Химия оперирует дифференциалами, числовое взаимоотношение которых известно.

Но атомы не считаются чем-то простым, не считаются вообще мельчайшими известными нам частицами материи. Не говоря уже о химиках, которые все больше и больше склоняются к мнению, что атомы обладают сложным составом, большинство физиков утверждает, что мировой эфир, опосредствующий световые и тепловые излучения, состоит тоже из дискретных частиц, столь малых, однако, что они относятся к химическим атомам и физическим молекулам так, как эти последние к механическим массам, т. е. относятся, как d^2x к dx . Здесь, таким образом, общераспространенное представление о строении материи тоже оперирует дифференциалами второго порядка, и ничто не мешает человеку, которому бы это нравилось, вообразить себе, что в природе имеются еще аналогии d^3x , d^4x и т. д.

Но какого бы взгляда ни придерживать относительно строения материи, факт тот, что она расчленена, представляет собою ряд больших, хорошо отграниченных групп относительной массовидности, так что члены каждой подобной группы находятся со сторо-

ны массы в определенных, конечных отношениях друг к другу, а к членам ближайших групп относятся как к бесконечно-большим или бесконечно-малым величинам в смысле математики. Видимая глазом система звезд, Солнечная система, земные массы, молекулы и атомы, наконец, частицы эфира образуют каждая подобную группу. Дело не меняется от того, что мы находим промежуточные звенья между отдельными группами; так, между массами Солнечной системы и земными массами мы встречаем астероиды, из которых некоторые не больше, скажем, княжества Рейсс младшей линии, метеоры и т. д.; так, между земными массами и молекулами мы встречаем в органическом мире клетку. Эти средние звенья показывают только, что в природе нет никаких скачков *именно потому*, что она сплошь состоит из скачков.

Поскольку математика оперирует реальными величинами, она применяет спокойно эти взгляды. Для земной механики масса Земли является бесконечно великой; в астрономии земные массы и соответствующие им метеоры рассматриваются как бесконечно малые; точно так же расстояния и массы планет Солнечной системы являются в глазах астрономии ничтожно малыми величинами, лишь только она оставляет пределы Солнечной системы и начинает изучать строение нашей звездной системы» (*Энгельс. Анти-Дюринг. 1938. 275—278*).

15. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНО-ЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ

На этом мы закончим наше краткое сообщение о применении метода бесконечно-малых к логике. Вернее, это не сообщение, а только предложение, только скромный намек на ту область, которая не может не быть огромной. Логика и математика не могут настолько расходиться между собою, чтобы не иметь ничего общего в своих построениях. И во всяком случае, логика не имеет никакого права настолько отставать от математики, чтобы совершенно не иметь никакого представления о том, что сейчас творится в математике. С другой стороны, те, кто любит говорить фразы о базировании философии на науке, должны же когда-нибудь перейти от фраз к делу, если только они считают математику за науку. О несовершенствах нашего предложения нечего распространяться. Они очевидны и так. Но следует во всяком случае усвоить то, что сама категория бесконечно-малого и сам метод бесконечно-малых уж во всяком случае необходимы в логике. Они, конечно, нисколько не заменяют других методов, ибо сама же математика содержит много других, принципиально различных методов, не говоря уже о науках нематематических. Мы, однако, хотели перейти от фраз к делу по крайней мере на одной науке, да и то из этой науки взяли только один метод, чтобы применить его в логике и тем базировать философию на науке хотя бы в этом отдельном вопросе. Дело других исследователей предложить еще другие математические методы в логике и даже другие нематематические.