

способов рассмотрения понятий тем, что она берет эти понятия как бесконечные сгустки бытия, как *пределы*. А в математике только там воочию видна диалектика, где идет речь о бесконечности, так как конечные величины хотя и подчинены диалектической антиномике, но последняя в них не выявлена непосредственно, а только с необходимостью предполагается при достаточно систематическом подходе.

Итак, «множество всех частей» множества должно с необходимостью и воочию выявить антиномику целого и частей в том случае, если будем оперировать с бесконечным множеством. И действительно. Пусть мы имеем множество φ *всех* вещей. Поскольку множество τ всех частей этого множества своею мощностью выше этого последнего, постольку множество φ эквивалентно только части множества τ . Но из чего состоит τ ? τ состоит все из тех же вещей, из каких и φ , т. е. всякий элемент τ есть и элемент φ . А это значит, по указанному выше определению части, что τ эквивалентно некоторой части φ . Но если φ и τ эквивалентны частям друг друга, то, опять-таки по указанному выше, и сами φ и τ эквивалентны. Итак: φ и τ и эквивалентны, и неэквивалентны. τ , как множество всех частей φ , не эквивалентно φ ; но так как φ есть множество *всех* вещей, то никакое τ не может его превзойти, и, будучи столь же бесконечным, оно совпадает с φ .

Поэтому, если среди аксиом учения о множествах попадаете и аксиома о *Potenzmenge*, о множестве всех частей множества, то *mutatis mutandis*¹⁵ и она не бесполезна для иллюстрации антиномики частей и целого. Эта аксиома формулирована у Френкеля так: «Если существует множество m , то существует и множество U , которое содержит в качестве элементов все подмножества m , и только их».

§ 49. Аксиома самождественного различия в теории вероятностей.

1. Прежде чем формулировать аксиомы теории вероятностей, сделаем ряд замечаний, которые послужили бы к философскому уяснению своеобразия всей той совершенно специфической области в дополнение к общей установке, намеченной в § 9. С понятием вероятности мы вступаем в область того, что в логике называется модальными категориями, среди которых обычно насчиты-

вают три — необходимость, возможность и действительность. Надо дать элементарное разъяснение этих категорий.

2. До сих пор мы не встречались с этими категориями. Почему? Это было потому, что мы имели дело исключительно только с самим смыслом (с «идеальным» бытием). Беря смысл сам по себе — число как число, — мы не можем сказать о нем ни того, что оно необходимо, ни того, что оно возможно, ни того, наконец, что оно действительно. Ибо эти три сферы нуждаются в числе и без него невозможны, само же число не нуждается в них и обсуждаемо само по себе. Число «пять» одинаково может быть и необходимым, и возможным, и действительным. Значит, самый смысл пятка нисколько не зависим от этих сфер. Что же получается при переходе в эти сферы? Получается то, что из сферы смысла мы должны перейти в сферу *факта*, к инобытию смысла, но не в том смысле, как мы находим инобытие внутри самого числа (и получали интенсивное, экстенсивное и эйдетическое число), а в том смысле, что мы перешли к инобытию в отношении *всей вообще* сферы числа. Теперь мы оперируем не просто с моментами чистого смысла, но все время смотрим на сферу возможного их осуществления, как бы примеряем их к действительности, наблюдая степень их реальности, степень возможного осуществления. В этой общей области взаимоотношения смысла и факта и зарождаются категории модальности. Их мы должны, однако, наметить подробнее и яснее, чем это обычно делается в логических исследованиях.

3. Возьмем тот или иной момент чистого смысла. Вообразим себе, что этот момент может предстать перед нами как осуществленная, овеществленная, *фактическая* действительность. Но мы пока не будем ничего предпринимать для осуществления этого смысла. Мы только запомним, что это осуществление должно потребовать каких-то новых актов, каких-то усилий с той или другой стороны, чтобы стать реальной жизнью. Каждый момент фиксируемого нами смысла должен превратиться в какую-то реальную силу или подвергнуться воздействию чьей-то силы; без этого невозможно никакое осуществление. Имея это в виду, обратим свои взоры на чистый смысл. Он, видим, есть полная этому

противоположность. В нем все вытекает само собою из целого и из отдельных моментов. Тут нет никаких «вещей», которые надо было бы «двигать»; тут нет никаких сил, без наличия которых ничего не осуществилось бы. Тут все ясно само собою, независимо от того, осуществляет это кто-нибудь или нет. Даже наша собственная мысль тут неважна. Я, например, могу не уметь логарифмировать, но самый логарифм от этого нисколько не страдает. Даже если бы никто никогда не логарифмировал и человечество не имело бы об этом никакого представления, все равно логарифм был бы логарифмом и, в частности, природные процессы так же осуществляли бы в себе эту функцию, как они осуществляют ее и сейчас, при нашем знании логарифмов. Вот эта точка зрения, когда мы противопоставляем смысл его факту без фиксирования, однако, самого факта, и ведет к установке *необходимости* смысла. Смысл сам по себе не есть необходимость. Но когда смысл берется на фоне своего осуществления, хотя в то же время само это осуществление не фиксируется, а только присутствует *отрицательно* как *принцип*, то так модифицированный смысл есть *необходимый* смысл, необходимость.

Смысл факта в освещении факта, но без самого факта есть необходимость. Факт же смысла в освещении смысла, но без самого смысла есть *случайность*. Необходимость и случайность, следовательно, возникают в сфере взаимоосвещения смысла и факта, но в условии отсутствия того члена, в сфере которого мыслится данный член. Бытие-смысл, для того чтобы стать бытием-необходимостью, должен отличаться от своей противоположности, потому что мыслится как окруженное темным фоном того, что не есть бытие-смысл. Что это именно такое, можно и не знать. Знаем только, что кругом нечто такое, что не есть и чистый смысл, не есть и чистое бытие. При желании мы можем перевести глаза с этого зафиксированного чистого бытия-смысла на смешанное и мутное бытие-факт. Но тогда первое будет мыслиться как окружающий фон, вернее, как непрístupные границы, и тогда чистое бытие-смысл станет неясным, присутствующим только отрицательно, как принцип возможных осуществлений. Получается бытие *случайное*. Когда мы хотим мыслить *бытие*, алогическим фоном для этого (или, как говорят, диалектическим отрицанием этого) обязательно

является *инобытие*, когда мы мыслим *смысл*, обязательно в качестве возможного принципа примышляется внесмысловая данность. Но когда мы мыслим *необходимость*, требуется отрицательное примышление *случайности*. Но это бытие исключает из себя всякую замутняющую его стихию, всякую нелепость и недостоверность, т. е. попросту всякое его *отрицание*, хотя последнее и должно быть положено вне самого бытия, чтобы это бытие могло от него отличаться. Точно так же случайность есть бытие, но это бытие исключает из себя всякую достоверность и закономерность, т. е. всякое свое *полагание*, утверждение (ибо полагание ведет к различию, к тождеству, т. е. к фигуре и т. д., т. е. к закономерности), хотя это полагание и должно мыслиться вне бытия случайности, чтобы было от чего этой последней отличаться. Поэтому более или менее точно можно сказать так.

Необходимость есть бытие. Необходимость есть бытие, которое полагает себя путем полагания вне себя своего отрицания, перенося свое самоотрицание из себя за пределы себя. Случайность же есть бытие, которое полагает себя путем отрицания себя внутри себя, т. е. путем самоотрицания, перенося свое самоотрицание извне на самого себя.

4. Смысл и факт есть абсолютная противоположность, т. е. хотя они и предполагают одно другое, но на них самих не отпечатлена эта взаимопредполагаемость. Это есть противоположность *для иного*. Чтобы она стала противоположностью *для себя*, т. е. чтобы каждый из ее членов отобразил на себе свою противоположность иному, необходима перестройка того и другого члена. Уже необходимость и случайность есть такие категории, которые демонстрируют собою некое взаимное сближение обоих членов изучаемой противоположности. Именно, в то время как «смысл» предполагает свое явление, т. е. факт не сам по себе, но в чьем-то постороннем сознании, «необходимость» уже в самом своем логическом содержании предполагает соотнесенность со «случайностью». Правда, смысл отображает здесь фактическое бытие пока еще очень абстрактно; а именно он покамест только требует, чтобы оно просто присутствовало, чтобы оно было *вполне принципиально*. Тут *A* указывает на то, что где-то и как-то есть еще и *B*, что этого

В не может не быть принципиально, в то время как раньше *А* существовало так, что *по нему* нельзя было узнать, есть ли где-нибудь *В* (хотя мы-то и знали, что оно где-то обязательно есть). Однако возможно, что по *А* мы узнаём не только о принципиальном наличии *В*, но еще и о *содержании* этого *В*, о его свойствах, о его *смысле*, так же как и по *В* узнаём о свойствах *А*. Это будет уже гораздо более интимное воссоединение смысла и явления, и тут будет недостаточно — с точки зрения модальности — одной пары категорий необходимости и случайности. Смысл в свете факта, но без самого факта есть необходимость. Необходимость же в свете случайности, но без самой случайности есть *вероятность*. Точно так же: факт в свете смысла, но без самого смысла есть случайность; случайность же в свете необходимости, но без самой необходимости есть реальная *возможность*.

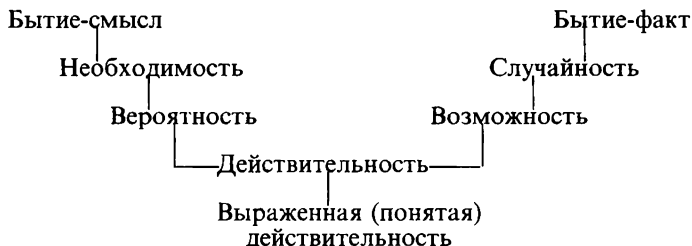
Необходимость есть тождество смысла и бытия в сфере самого смысла, равно как случайность есть тождество смысла и бытия в сфере самого бытия. Вероятность также есть тождество смысла и бытия в сфере самого смысла, равно как возможность есть тождество смысла и бытия в сфере самого бытия. Но необходимость привлекает для своего синтеза бытие в качестве внутрисмыслового бытия, поскольку самый синтез этот совершается в сфере смысла, оставляя прочее бытие вне себя как бесполезное марево, нужное только как логический принцип для ограничения (т. е. определения) смысла. Вероятность же, оставаясь по-прежнему смысловой конструкцией, вбирает в себя смысловое содержание этого случайного инобытия, пребывавшего во всей своей бесполезности и раздробленности. Смысл сам начинает тут перекрываться внешним себе инобытием, продолжая, однако, подчинять его себе. Но раньше он подчинял его себе так, что инобытие в нем растворялось без остатка (и чистый смысл только стал внутри обоснованным, т. е. стал необходимостью). Теперь же смысл не может просто растворить в себе инобытие, но инобытие накладывается на него вторым слоем, так как однажды оно уже поглотило его в себя и тем перекрылось определенным слоем внутреннего инобытия. Однако что же это значит — приятие второго слоя инобытия? Первый слой, появившийся в результате приятия в себя смыслом свое-

го инобытия, ушел на внутреннее самообоснование самого смысла, на конструирование «необходимости». Теперь чистый смысл уже в себе обоснован. Дальнейшее привлечение инобытия уже не может выполнять функции внутреннего самообоснования чистого смысла. Внутренне самообоснованный смысл, пришедший на себя новую энергию инобытия, может оставить его при себе только с его собственными, т. е. уже чисто внешними, функциями, которые ведь только и свойственны ему в первоначальной форме как именно инобытия. Однако мы сказали, что инобытие здесь понимается пока не в своей абсолютной, субстанциальной положенности. Покамест мы говорим о таком смысле, который принял на себя только *смысловое содержание* инобытия. Но ведь смысл у нас теперь есть самообоснованный смысл, необходимость; и что бы в нем ни находилось — пусть этот второй слой инобытия, — он все равно есть некое обоснование. Следовательно, получается внутренне обоснованный смысл, который как таковой обосновывает и внешнее инобытие, им на себя принятое, но, поскольку последнее берется только в своем смысловом содержании, он и обосновывает это внешнее инобытие только смысловым же образом. А это и есть *вероятность*. Вероятно ведь то, что имеет для себя основание; и так как всякое основание есть основание в сфере смысла, то вероятно то, что обосновано в сфере смысла. Но обоснование может быть как чисто смысловым, так и чисто фактическим. Фактически обосновать — значит, быть причиной. В смысловом же отношении обосновать — значит, сделать вероятным. Вероятность и есть такой самообоснованный смысл, который, кроме того, обосновывает еще и внешнее для себя инобытие, но обосновывает его только смысловым образом. Необходимость есть самообоснованный смысл, но для себя. Вероятность же есть самообоснованный смысл для иного, или необходимость смысла для иного. Вероятность утверждает, что для бытия есть смысл, но она как раз ничего не утверждает о том, есть ли само бытие.

С другой стороны, мы имеем возможность. Возможность мы отличаем от вероятности тем, что относим ее (как и случайность) в сферу факта, в то время как вероятность мы понимаем как нечто смысловое. Как необходимость, вбирая в себя смысловое содержание инобытия,

становится вероятностью, так случайность, вбирая в себя смысловое содержание смысла, становится реальной *возможностью*. Одно дело, когда вещи могут быть или не быть *по смыслу*; и другое, когда они могут быть или не быть *реально*. Одно дело — логическая (лучше сказать — смысловая) возможность, другое дело — фактическая *сила, потенция*. Первую мы и называем вероятностью, вторую же — *возможностью*.

5. Вероятность и возможность суть еще более глубокий синтез смысла и факта, чем необходимость и случайность. Можно, однако, этот синтез продолжить еще дальше. Можно говорить не о *смысловом* отождествлении смысла (необходимости) и факта (случайности), но о *фактическом* их отождествлении. Сначала смысл ни на что не указывал, но пребывал в уединении. Потом он стал указывать на свое инобытие, не входя при этом в его содержание и тем более не преследуя целей фактического с ним объединения. Это была «необходимость». Далее смысл стал указывать на самое содержание своего инобытия, так что, рассматривая смысл, мы тем самым рассматриваем и смысловое содержание его инобытия. Это была «вероятность». Теперь смысл указывает нам на самый факт своего инобытия, так что уже все равно, иметь ли с ним дело как со смыслом, иметь ли дело с ним как с фактом. Это фактическое субстанциальное тождество смысла и инобытия, смысла и факта, или смысла и явления, есть *действительность*. В ней встречаются и сливаются вместе логическая вероятность и фактическая возможность, когда обе они начинают одна другую на себе отображать. *Необходимость* была у нас смыслом в свете факта, но без самого факта и без осмысленности этого факта. *Вероятность* — это смысл в свете факта без самого факта, но с его осмысленностью. *Действительность* есть смысл в свете факта, но так, что она есть и осмысленность этого факта, и самый этот факт в его последней субстанции. Соответственно и со стороны инобытия: инобытие в свете смысла, но без самого смысла и его самообоснованности есть *случайность*; инобытие в свете смысла без самообоснованности смысла, а только с его содержанием есть *возможность*; инобытие в свете смысла, когда оно само есть смысл и по его содержанию, и по его самообоснованности, оказывается *действительностью*.



В таком виде можно было бы представить себе диалектическую таблицу модальных категорий, причем мы на данной стадии нашего исследования не входим в анализ еще особого вида модальности — *выраженной*, или понимаемой, действительности, о чем должно быть особое и весьма углубленное рассуждение.

6. После всех этих разъяснений мы можем приступить и к математической интерпретации категорий модальности. Математика вполне обладает аппаратом числовых конструкций модальности, и это в дальнейшем явится очень интересным предметом нашего специального исследования. В настоящую минуту мы можем сказать только то, что вся интенсивно-экстенсивно-эйдетическая сфера является, очевидно, сферой *необходимости*, что бытие вероятное и возможное получается в т. н. теории вероятностей, действительность — в т. н. статистике и даже модальность выразительной действительности можно выследить в некоторых отделах этих наук (напр., в т. н. вариационной статистике). Однако мы не будем здесь разрабатывать аксиоматику для всех решительно модальных категорий, так как это в значительной мере предвосхитило бы специальные отделы нашего исследования, так же как и в области интенсивного числа мы ограничиваемся только аксиомами арифметики. Однако мы все же не можем миновать самого главного, это — аксиом теории вероятностей. Чтобы перейти к ним, произведем общую числовую модификацию категории вероятности.

7. Вероятность отличается от необходимости тем, что вмещает в себе внешнее для себя инобытие, и вмещает только смысловым образом, так что она тем самым конструирует смысл инобытия, не конструируя, однако, его фактов. Это значит, что вероятность всегда есть некое смысловое отношение бытия и небытия. Мы смотрим на

бытие-смысл и видим, что оно указывает на смысл инобытия, не указывая его факта, т. е. указывает на его возможность. Если брать обычные примеры теории вероятностей, то можно сказать так. Пусть в урне находится N шаров, и пусть M из этих шаров черные, а остальные белые. Обычно говорится, что вероятность вынимания черного шара равняется $\frac{M}{N}$, т. е. под вероятностью события

A понимается в математике отношение благоприятных для него случаев ко всем равно возможным и несовместимым случаям вообще. Это и значит, что вероятность есть такой обоснованный в себе смысл, который обосновывает еще свое инобытие и обосновывает его смысловым образом. Если вероятность появления черного шара $= \frac{3}{10}$, то это значит, что бытие (представленное тут всеми 10 шарами) берется не само по себе, но с указанием на возможное здесь инобытие (представленное 3 черными шарами) и что эта величина $\frac{3}{10}$ есть обоснование инобытия не фактическое (так как неизвестно, когда и как наступят соответствующие факты получения черных шаров), но только смысловое.

Тогда понятным делается и то, какую форму примет вероятность, когда она станет действительностью. Действительностью бытие 10 шаров станет в том случае, если мы все эти 10 шаров реально вынем из урны, т. е. когда число возможных выниманий совпадет с числом наличных в урне шаров. В таком случае числитель и знаменатель изучаемого примера¹⁶ будут равны и вероятность окажется равной единице. Следовательно, *действительность есть такая вероятность, которая равна единице*. Это понятно еще и потому, что единица есть полное полагание, а действительность это прежде всего есть полное полагание. С другой стороны, не трудно себе представить, что *вероятность, равная нулю, окажется просто невозможностью*. Это не требует пояснений. Стоит только указать на то, что вполне представима и вероятность, равная бесконечности. Если вдуматься в формулу

$$\frac{M}{N} = \infty,$$

то станет ясным, что, поскольку здесь M должно быть тоже равно бесконечности, мы всегда будем иметь случай, благоприятный событию $[N]$, когда бы и как бы ни происходил этот случай. Другими словами, это *необходимость*. Это тоже понятно из более общих рассуждений. Все смысловое вообще отличается от фактического, инобытийного тем, что оно есть в бесконечной степени то, чем инобытийное является только в конечной степени. Если мы будем бесконечное число раз измерять углы эвклидовского треугольника и бесконечное число раз сумма их оказывается равной двум прямым, то это и значит, что данная теорема [о сумме углов треугольника] не есть ни действительность, ни возможность, но самая настоящая *необходимость*. Если бы оказалось, [что] два прямых угла получаются только для конечного числа треугольников, то теорема имела бы только *вероятное* значение. А если бы они получались для конечного числа треугольников, но больше никаких других треугольников не существовало бы, то это была бы *действительность*. Также если и были бы всякие другие треугольники с суммой углов в два прямых или еще с иными суммами, но мы свое суждение относили бы только [к] данному конечному числу фактически измеренных треугольников, то и в этом случае наша теорема была бы не необходимостью и не вероятностью, но действительностью. Итак, *вероятность, равная бесконечности, есть необходимость*.

Другими словами, математическая вероятность в собственном смысле, т. е. когда она не есть ни нуль, ни бесконечность, может помещаться только между нулем и единицей, т. е. может быть только правильной дробью.

8. Теперь, наконец, мы можем сказать специально и об *аксиоме самотождественного различия* в математической теории вероятностей. Нетрудно сообразить по аналогии с этой же аксиомой в арифметике (§ 45), что вероятность есть прежде всего некая совокупность изолированных моментов. Однако эта совокупность здесь вполне специфична. Она есть, как мы только что видели, отношение количества случаев, благоприятствующих событию A , к количеству всех равновозможных, несовместимых и единственных случаев вообще. Вот это отношение здесь и рассматривается. В арифметике числа строятся так, что они сравнимы между собою и определяют друг друга, так что если есть a и есть b , то есть и c ,

которое есть их сумма. Также если есть c , то в нем всегда можно отличить одно от другого и найти такое a и такое b , что их сумма как раз будет равняться c . То же самое мы находим в теории вероятностей. Если мы знаем, например, вероятность рождения детей вообще (в данной стране за данный промежуток времени), то мы можем сказать, что вероятность рождения мальчиков меньше вероятности рождения детей вообще и что последняя получится, если к этой вероятности мы прибавим еще вероятность рождения девочек. Отсюда и аксиома.

Аксиома самотождественного различия в теории вероятностей: **математическая вероятность события есть отношение количества случаев, ему благоприятствующих, к числу всех единственно и равновозможных, несовместимых случаев, причем вероятность частного случая события меньше, чем вероятность события вообще, и предполагает соответствующее дополнение до нее.**

9. Очень важно отметить, что те, кто занимаются аксиоматикой теории вероятностей, также сталкиваются с подобными постулатами. Я укажу на С. Н. Бернштейна, который счел нужным* ввести здесь в качестве первой аксиомы т. н. *аксиому сравнения вероятностей*. Он формулирует ее так: «Если a есть вид (частный случай в узком смысле слова) события A , то *вер. a < вер. A* ; обратно, если между вероятностями фактов a_1 и A существует неравенство *вер. a_1 < вер. A* , то оно означает, что *вер. $a_1 = a$* , где a есть некоторый вид события A ». С. Н. Бернштейн называет это аксиомой *сравнения*. Ее можно было бы назвать самыми разнообразными словами (например, по Гильберту, это была бы «аксиома связи» или «аксиома сочетания»). Мы же можем сказать только то, что единственное обстоятельство, выдвигаемое здесь, есть необходимость различения внутри данной вероятности большего или меньшего и их складывания в одну данную вероятность. Но это есть только результат функционирования категории самотождественного различия.

Аксиома эта почти не требует никаких пояснений. Само собою, конечно, разумеется, что вероятность рож-

* См. его «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей» в «Сообщениях Харьковского математич. общества» за 1917 г. и в общем курсе «Теории вероятностей». М.; Л., 1934. 11.

дения мальчиков меньше вероятности рождения детей вообще. Это первая часть аксиомы. Вторая часть гласит о том, что если вероятность смерти в течение года больше, чем смерти в течение месяца, то мы можем вычислить вероятность смерти и для более специфического случая, например для смерти 70-летнего по сравнению со смертью 20-летнего. Оказывается, что вероятность старику умереть в течение (примерно) трех недель *та же*, что и вероятность молодому человеку умереть в течение года. Следовательно, чтобы из первой вероятности получить вторую, надо ее соответственно восполнить.

II. ПОДВИЖНОЙ ПОКОЙ

§ 50. Аксиома подвижного покоя в арифметике.

Переходим ко второй большой составной категории в области идеальной структуры числа, к *подвижному покою*. Применить эту категорию к изученным нами областям математического предмета будет теперь легче, поскольку мы более или менее освоились со смысловым своеобразием каждой из этих областей и на большом примере уже могли почувствовать их диалектическое место.

1. Самождественное различие давало нам в применении к числу совокупность, которая складывалась из элементов. Совокупность и была самождественным различием этих элементов. Теперь, применяя категорию подвижного покоя, мы получим, очевидно, тоже совокупность элементов, но не в их самождественном различии, а в их *подвижном покое*. Если числовая совокупность действительно подчинена категории подвижного покоя, то это значит, что каждый элемент ее *движется* к другому элементу и ко всему целому и *успокаивается* на другом элементе и на всем целом. Раньше мы натолкнулись на совокупность как на систему различных моментов, натолкнулись на само различие моментов и на их тождество с целым. Но мы не знали, *можно ли перейти от одного момента к другому*, и брали многообразие внутри совокупности как данную, как мертвую, как утвержденную неизвестно кем и как. Сейчас мы видим, что элементы не просто различны, но что при всем их различии *можно перейти от одного к другому* и что каждый элемент именно *требует* такого перехода.