§ 51. Аксиома подвижного покоя в геометрии.

1. Без труда формулируется та же аксиома для геометрии, поскольку здесь мы находимся в области инобытия числа, и категория подвижного покоя будет дана в своем инобытии. Это значит, что движение здесь мыслится не между отдельными единицами, из которых состоит чистое число, но между моментами инобытийными, т. е. пространственными, и покой будет мыслиться не в недрах самого числа, а среди инобытийно-числовых, пространственных моментов. Как в предыдущей категории различие дало различие не просто актов полагания и не единиц, но точек, а тождество оказалось не тождеством вообще, но пространственным тождеством точек, т. е. линией, плоскостью и телом, так и здесь мы должны оперировать с точками, этим бытием чисто числовых единиц, и должны от одной точки переходить к другой, наблюдая, что получается в результате этого движения и этого покоя.

Пусть мы двигаемся по линии от точки *A* к точке *B*. Чтобы показать, что мы именно движемся от *A* к *B* и что, придя в *B*, мы именно остановились, для этого, очевидно, нужно, чтобы мы имели не просто голые и изолированные точки *A* и *B*, взятые сами по себе, но в каком-то их специфическом взаимоотношении. Нужно, чтобы *A* уже *сама по себе указывала бы на B*, а *B сама по себе указывала бы на A*. Другими словами, нужно, чтобы обеим точкам была свойственна *идея порядка*, чтобы от *A* мы шли бы действительно к *B* и чтобы в таком случае и от *B* шли бы к *A*. Легче, однако, это демонстрировать на трех точках, потому что при существовании только двух точек еще есть возможность двигаться в обратную сторону. Когда же мы имеем на одной прямой три точки *A, B, C* и движемся от *A* в направлении к *C*, то тут уже во всяком случае нам придется пройти через точку *B*. Почему? Потому что точки *A, B, C расположены в определенном порядке*, связаны определенной последовательностью; и если вообще двигаться в этом направлении, то нельзя не пройти точки *B*. Таков *порядок* этой системы. В момент прохождения через *B* мы как бы на мгновение останавливаемся, а это и значит, что тут действует категория подвижного покоя и что она определяет собою единство направления и порядка.

Можно поэтому в следующем виде выставить нашу аксиому.

Аксиома подвижного покоя в геометрии: **геометрическая величина есть совокупность определенным образом взаиморасположенных элементов в их инобытии.** Или подробнее: **геометрическая величина есть совокупность определенным образом взаиморасположенных элементов, находящихся в состоянии движения по актам своего внешнего полагания и в состоянии покоя, достигаемого этим внешним движением.**

2. Из обычных формулировок аксиом сюда относятся т. н. аксиомы *порядка.* Их я взял бы почти в том виде, как они даны у Гильберта, хотя и в ином порядке — ради большей стройности и последовательности мысли. Именно, на первом месте я бы поставил то, что у Гильберта занимает третье место (II 3):

1. «Из трех точек прямой всегда одна, и только одна, лежит между двумя другими».

За этой аксиомой логически следует та, которая у Гильберта на первом месте (II 1), потому что сначала надо поместить одну точку между двумя другими, а потом уже говорить об отношении ее к этим другим, равно как только после этого следует говорить о продолжении движения за пределы этих двух точек (II 2). Таковы эти аксиомы:

2. «Если A, B и C — точки одной прямой и B лежит между A и C, то B лежит также между C и A».

3. «Если A и C — точки одной прямой, то существует по меньшей мере одна точка B, лежащая между A и C, и по меньшей мере одна точка D такая, что C лежит между A и D».

Это — аксиомы линейные. Необходимо также применение нашей категории и к плоскости. Здесь существует аксиома Паша *, дающая представление о продолжении и порядке плоскости. Ее можно формулировать так:

4. «Если в плоскости даны три отрезка AB, BC и CA, то прямая на этой плоскости, имеющая общую точку с одним каким-нибудь из них, имеет также общую точку с одним из обоих других».

Тут не сразу понятно, что имеется в виду. Имеется же в виду то, что отрезок, соединяющий две точки, находящиеся по одну и ту же сторону от данной прямой, не имеет ни одной общей точки с этой последней, в то время

---

* *M. Pasch.* Vorles. üb. neuere Geometrie. Lpz., 1882; 1926 [2].

как отрезок, соединяющий две не находящиеся по одну и ту же сторону от данной прямой [точки], имеет с нею одну общую точку.

Разумеется, должна быть «аксиома порядка» и в отношении пространства (каковой почему-то совсем нет у Гильберта). Ее легко получить по аналогии с аксиомой Паша на плоскости примерно так:

5. «Две плоскости, имеющие одну общую точку, имеют одну общую прямую».

Эта аксиома показывает, как пространство делится плоскостью и как за одной частью пространства следует другая, ибо представление о прямой, общей двум плоскостям, возможно только тогда, когда есть представление о двугранном угле, и притом по крайней мере о двух (если не о четырех) сложных двугранных углах, т. е. представление о разделении пространства и о переходе из одной его части в другую.

Стоит заметить, что предложенная чисто математическая формулировка аксиомы подвижного покоя в геометрии отнюдь не есть единственно возможная. Энриквес наряду с предложениями Гильберта указывает и другие, которые вполне тождественны им. Это, пожалуй, стоит привести.

Одна формула:

«Каждая точка *A* прямой *разлагает прямую* на два класса точек (части), которые можно обозначить названиями «правая часть» и «левая часть», таким образом, что

a) каждая отличная от *A* точка принадлежит одной из обеих частей;

b) если *A* находится налево (или направо) от какой-нибудь точки *B*, то каждая точка налево (или направо) от *A* находится налево (или направо) от *B*;

c) если *A* находится налево от *B*, то *B* находится направо от *A*».

Другая (относящаяся, как говорит Энриквес, к *становящейся* фигуре, но, собственно говоря, ни о каком становлении в настоящем диалектическом смысле тут нет и помину) [формула]:

«Точки прямой разбиты на два (естественных) порядка, из которых один противоположен другому таким образом, что при рассмотрении некоторого определенного порядка:

a) если даны две точки *A, B* прямой, то одна из них, например *A, предшествует B* и в таком случае *B* следует за *A*;

b) если даны три точки *A, B, C* и *A* предшествует *B* и *B* предшествует *C*, то *A* предшествует *C*;

c) между двумя точками *A* и *B* существуют промежуточные точки (предшествующие одной из них и следующие за другой);

d) не существует никакой первой (предшествующей всем) точки, и не существует также никакой последней точки».

Вышеприведенная плоскостная аксиома Паша может быть заменена другой (при условии Эвклидова постулата о параллельных линиях):

«Если две исходящие из одной точки *O* пары прямых пересекаются некоторой (не параллельной ни одной из четырех прямых) секущей в двух раздельных парах точек, то то же самое имеет место и для любой другой секущей, не проходящей через упомянутую точку *O* и не параллельной ни одной из четырех прямых».

Чтобы понять эту аксиому и ее своеобразную выразительность, необходимо иметь в виду вот что. Если мы имеем две пары линий, исходящих в упомянутом только что виде из одной точки, и если некая другая линия пересекает обе эти пары, то ясно, что обе эти пары линий находятся в одной и той же плоскости. Ведь, пересекая одну пару линий, наша секущая во всяком случае проходит через наши две точки той плоскости, в которой даны эти две линии, т. е. она всецело лежит на этой плоскости. То же самое и в отношении другой пары линий. Значит, обе пары линий в силу этого лежат на одной плоскости. Но тогда, очевидно, на этой же плоскости может быть проведена и всякая другая линия. И эта другая обязательно пересечет эти же две пары линий и тоже окажется в плоскости, общей обеим этим парам. Следовательно, если это возможно, то с проведением второй секущей мы остаемся в той же плоскости и единственное, что тут происходит, это *движение* по одной и той же плоскости.

Все различия геометрических формулировок анализируемой аксиомы указывают на то, что в философском отношении нельзя полагаться на чисто геометрические аксиомы. Их приходится заменять более общими формулами, выводимыми на общелогических основаниях.

Геометрические же положения должны быть только примером и приблизительным выражением. Аксиома дает *перспективу* в науке. И в свете этой перспективы должны появляться сначала более общие, а потом и более частные теоремы.

§ 52. Аксиома подвижного покоя в теории множеств.

1. Во множествах подвижной покой будет, как и везде, отражать на себе своеобразие данной множественной сферы. Множество отличается от арифметического числа тем, что элементы, из которых оно состоит, находятся между собою в инобытийном, а не в чисто количественном взаиморасположении. Тут, говорили мы, также *геометрическая* система взаиморасположения, но только с одним отличием от нее: это не пространственная, но чисто числовая фигурность. Поэтому множество и есть синтез арифметического числа и геометрической величины. Подвижной покой есть, как мы уже знаем, идея порядка. Во множестве, стало быть, содержится свой собственный порядок, упорядоченность,—такая, что в ней участвуют не просто счетно-числовые моменты и не только пространственное расположение элементов, а и то и другое вместе, в их синтетической воссоединенности.

Имея это в виду, можно было бы просто сказать, что множеству свойственна упорядоченность, или, что то же, всякое множество есть упорядоченное множество. Но тут не будет подчеркнут момент специфически множественной упорядоченности. Ведь упорядочено все—и числа, и геометрические фигуры, и множества, и даже континуум. Раз дается аксиома для множества, то должен быть отмечен и спецификум множества. Он и отмечается у нас во всех аксиомах о множествах. Однако в аксиоме подвижного покоя упорядоченность имеется в виду специально. Она, конечно, захватывается так или иначе решительно во всех аксиомах, поскольку упорядоченность (и притом специфически множественная) находится во всех множествах. Но в аксиоме подвижного покоя упорядоченность находит свое специальное выражение, поскольку упорядоченность и есть не что иное, как результат проявления именно подвижного покоя. Аксиому поэтому можно было бы так формулировать (аналогично предыдущим аксиомам множества).

Аксиома подвижного покоя в теории множеств: **множество есть совокупность определенным образом взаимо-**