одной и той же *одной и единственной* точкой. Это и значит, что синее переходит в голубое постепенно, *непрерывно* *.

Таким образом, если под аксиомой Архимеда лежит интуиция раздельных тел, под аксиомой непрерывности в аспекте бесконечного процесса лежит интуиция пустого и темного пространства, то под аксиомой Дедекинда лежит интуиция поля, качественного пространства, расцветающего в непрерывном разнообразии своих красок.

Интересным является также и постулат Кантора о непрерывности, вызванный сходными же интуициями. Кантор ** говорит: если на прямолинейном отрезке OM имеется два неограниченных ряда отрезков OA, OB, OC, ..., OA', OB', OC'... из которых первые растут, а вторые уменьшаются таким образом, что отрезки AA', BB', CC'... постоянно уменьшаются и в конце концов становятся меньше всякого данного отрезка, то на отрезке OM существует такая точка X, что OX больше, чем все отрезки первого ряда, и меньше, чем все отрезки второго ряда.

В этом постулате Кантора лежит тот же принцип, что и у Дедекинда, но в то время как последний подчеркивает в одном энергийном образе момент устойчивости, стабильности процесса нарастания, у Кантора, наоборот, подчеркивается момент подвижности этого нарастания. У Дедекинда каждая точка процесса квалифицируется сразу тройным образом — как конец предыдущего периода, начало последующего и как точка, отделяющая одно от другого. У Кантора, наоборот, каждая точка процесса мыслится как только *достигаемая* в этом тройном смысле; она как бы еще только собирается быть концом одного, началом другого и разделением. Обе картины — и Дедекинда, и Кантора — рисуются на фоне синтетически-качественной, энергийной выразительности. Постулат Дедекинда, другими словами, есть диалектический синтез постулата Архимеда и постулата становящейся непрерывности (синтеза) при посредстве постулата Вейерштрасса.

§ 61. Аксиома непрерывности в отдельных математических науках.

1. Формулировка аксиом непрерывности, развитая в предыдущем параграфе, легко приобретает и чисто

* Определение непрерывности у Р. Дедекинда. Непрерывность и иррацион. числа. Пер. С. Шатуновского. Од., 1909.
** ⟨...⟩ 1871. V 128 [20].

арифметическое, и чисто геометрическое значение, стоит только «числа» заменить «отрезками» (или другими геометрическими понятиями). Поэтому нет нужды загромождать изложение отдельной формулировкой принципа непрерывности в арифметике и в геометрии.

Стоит, может быть, только остановиться на этой аксиоме в применении к теории множеств и к теории вероятностей, так как здесь существует в математике более своеобразная терминология.

2. Что касается *теории множеств*, то здесь учение о непрерывности можно формулировать при помощи понятий *полного* и *сцепленного* множества, которые определяются следующим образом. *Сцепленное* множество есть то, в котором между каждыми двумя элементами можно иметь еще один элемент. Ясно, что понятие сцепления возникает на основе категории непрерывности в аспекте его становления (аналогично § 59.5). *Полным* называется такое сцепленное множество, в котором присоединение каждого нового элемента делает этот последний или наибольшим, или наименьшим. Нетрудно заметить и здесь некоторую аналогию с учением о непрерывности в аспекте ее полноты или непроницаемости (§ 59.4). В теории множеств непрерывным множеством и называют такое упорядоченное множество, которое является и сцепленным, и полным. Следовательно, аналогия с моментом ставшего (§ 59.6) должна привести к понятию *предела*. Самым общим положением здесь явится теорема Больцано — Вейерштрасса: «Всякое бесконечное ограниченное множество имеет хоть одну предельную точку».

a) Наконец, теория множеств выработала также большое учение, основанное на эманативно-выразительном понимании непрерывности. Конечно, можно было бы, в сущности, ограничиться и вышеприведенными постулатами Кантора и Дедекинда. Однако здесь они звучат достаточно отвлеченно, и теория множеств обладает в этом отношении более развитыми тезисами.

Именно, здесь прежде всего интересно определение *континуума*, данное Кантором. По Кантору, *континуум есть совершенно-связное точечное множество*. Чтобы понять диалектику этого понятия, вспомним некоторые основные определения из теории множеств.

b) Точка множества, не являющаяся для него предельной точкой, называется изолированной, и состоящее только из таких точек множество есть изолированное. Зато когда оно не содержит ни одной такой изолированной точки, оно называется *плотным в себе*. Однако множество может содержать свои предельные точки вне себя. В случае, когда оно содержит в себе все свои предельные точки, оно называется *замкнутым*. Замкнутое множество, когда оно не может быть представлено в виде суммы двух замкнутых множеств без общих точек, называется *связным* множеством. Другими словами, связность относится к предельным точкам множества так же, как сцепленность просто — ко всем точкам множества. И наконец, множество, которое является плотным в себе и замкнутым сразу, является *совершенным* множеством. Следовательно, совершенно-связное множество есть такое, которое состоит только из одних предельных точек, причем эти последние таковы, что между каждыми двумя из них можно указать еще одну такую же предельную точку.

Отсюда выясняется и все *диалектическое строение* континуума. Именно, для того чтобы существовал континуум, необходимо прежде всего сцепленное и полное множество. Сцепленность и полнота, вместе взятые, уже создают собою некоторую непрерывность. Однако что это за непрерывность в смысле диалектической судьбы самой непрерывности? Несомненно, сцепленность и полнота создают непрерывность только как *бытие*, как *едино-раздельную* структуру, т. е. как нечто только смысловое, только *идеальное*. Ведь континуум есть вид упорядоченности. Сцепленность и полнота тоже суть виды упорядочения. Но раз есть упорядочение, тем самым уже есть едино-раздельная структура, последняя же, взятая как такая, всегда есть нечто идеальное для того, в отношении чего она является структурой. Следовательно, непрерывность в смысле сцепленности и полноты множества есть идеальный момент континуума, *бытие* континуума, его едино-раздельная идеальная структура.

Далее, бытие, знаем мы, переходит в становление и непрерывность превращается в становящуюся. Содержится ли этот момент в континууме, как последний определен у Кантора? Несомненно, содержится. Уже понятие сцепления содержит в себе не только момент объединения (что необходимо для едино-раздельной структуры), но и момент специфического объединения, а именно такого, когда единораздельность мыслится как бесконечный процесс (поскольку сцепленность множества требует нового элемента между каждыми двумя, как они близкими ни были [бы] друг в отношении друга). Стало быть, континуум в смысле Кантора есть не только идеальное бытие, но он содержит в себе и переход в инобытие, в становление, т. е. непрерывность, лежащая в его основе, перестает быть плоской, изолированной, она покрывается новым слоем, углубляется, получает рельеф и тем самым стремится быть выразительным.

Однако, прежде чем перейти в сферу выразительности, еще необходимо перейти от становления к ставшему, к выражению внутреннего через отвлеченное задание, т. е. перейти к *пределу*. Последнее дано в определении континуума у Кантора при помощи моментов плотности в себе и замкнутости, входящих в понятие совершенного множества. Поскольку в этих моментах речь не просто о непрерывности, но и о пределах, момент ставшего уже оказывается включенным.

Однако и этого мало. В континууме Кантора даны не только предельные точки, они сами тоже вовлечены в новый поток становления, поскольку в нем мыслится еще и ⟨...⟩ связность. Но когда мы говорили об энергийно-выразительном, или эманативном моменте числа, мы как раз и мыслили *становление*, но не то становление, когда смысл впервые только еще вступает в свое инобытие и в нем погасает, но такое становление, когда смысл снова нашел себя в инобытии, растворился в нем, расцвел в нем и на нем, когда становление стало снова ⟨...⟩ включивши в себя, однако, и смысловой результат всех своих субстанциональных положений. Момент *связности* в Канторовом континууме, заставляющий сливаться в непрерывность уже не просто отдельные точки множества, но именно все его *предельные* точки, и демонстрирует для нас эту энергийную выразительность, которой не было в непрерывности на ступени ее идеально-бытийственной структуры.

c) Таким образом, в Канторовом континууме мы находим по крайней мере три различных диалектических слоя, совпадающих с обычной триадой: идеальный слой едино-раздельной структуры (полнота и сцепленность), реальное становление ее, или переход в инобытие (сцепленность), и — через ставшее как момент предела (плотность в себе и замкнутость) — синтез того и другого (связность), когда идеальная непрерывность снова находит себя в бесконечно-предельном процессе инобытия (связное совершенное множество).

d) Сравнивая это учение с постулатом Дедекинда, мы *не можем не заметить явного превосходства учения Кантора над Дедекиндом.* В то время как у Дедекинда (и Кантора) в постулате непрерывности имеется в виду ее обрисованность, ее зрительно-мотивированный переход от одного качества к другому, в учении Кантора о континууме подчеркнут момент *понимания* выразительного слоя непрерывности. Ведь здесь эта непрерывность вся перекрыта предельными точками. Это значит, что вся она состоит из точек, *притягивающих* к себе, из точек-идеалов, из точек-целей, из тех эманаций, которые своим исхождением из сущности привлекают к ней, вовлекают в свою стихию и своим привлечением к сущности всего чужого заставляют исходить ее вовне ⟨...⟩ бесконечными энергиями исхождения. Если под аксиомой непрерывности Дедекинда лежит интуиция разноцветных, но непрерывно взаимопереливающихся полей, то Кантор, строя свое учение о континууме, несомненно, исходил (может быть, тайно от себя самого) из образа таких же полей, но *скомбинированных в ту или иную фигурную предметность*, т. е. из той непрерывности, которая свойственна реальной комбинации реальных же вещей.

Когда мы рассматриваем, напр., цветок, то уже по одному тому, что он есть нечто целое, он есть и нечто в себе непрерывное. Тем не менее мы видим на нем несколько разных красок, напр. желтое на пурпурном и все вместе — на зеленом стебле, и мы видим тут много разных оттенков одного и того же цвета. Если бы мы просто фиксировали все это разнообразие, как собрание взаимно-изолированных вещей или красок, для нас достаточно было бы в смысле конструирования непрерывности[21] уже аксиомы Архимеда (§ 59.4). Если бы мы отвлеклись от всякой раздельной предметности и рассматривали бы цветок, не обращая внимания на стебель, листья, чашечку и пр., а исключительно только бы с точки зрения непрерывного перехода одного цвета в другой, нам достаточно было бы аксиомы Дедекинда и Кантора о непрерывности. Но когда каждый момент рассматриваемого цветка фиксируется не просто сам по себе, но как притягивающий к себе, *заставляющий* фиксировать именно его, когда он целесообразно группирует вокруг себя все прочее и является целью для всех других моментов, другими словами, когда вся эта непрерывность есть непрерывность пределов, тогда возникает континуум Кантора; и тогда перед нами начинает расстилаться непрерывность *фигуры* цветности, а не просто самой цветности; тогда перед нами та непрерывность в цветке, в букете, в человеческом лице, в разноцветном небе раннего солнечного восхода или позднего заката,—словом, везде, где разнообразие цветностей вызвано тем или другим прерывно-смысловым, а не чисто же цветностным принципом. Есть ведь какая-то непрерывность, разлитая по всему букету, несмотря на всю его раздельность и многоразличие входящих в него цветов. И ее не может не быть, так как, прервись она хотя бы на одно мгновение, букет уже распался бы на две или больше различных вещей. И вот эта-то — уже фигурная — непрерывность и есть континуум Кантора. Это и в диалектически-терминологическом, и в житейски-буквальном смысле выразительная, энергийная, эманативная, *понимаемая* непрерывность *.

3. Что касается *теории вероятностей*, то категория непрерывности тут имеет тоже богатое применение, хотя, кажется, здесь и не дано столь ярких формулировок, как в теории множеств. Самым отвлеченным и самым примитивным теоретико-вероятностным пониманием непрерывности является то, что здесь называют *геометрической* вероятностью.

Основной интуицией для этой последней является линия или плоскость и составленность того или другого из точек. Если наша вероятность такова, что число возможных случаев равно числу возможных положений точки на прямой или на плоскости (или числу положений прямой в пространстве и т. п.), то такая вероятность будет *непрерывной*. Если бы мы стали спрашивать, какова вероятность вообще положения точки M на прямой AB, то эта задача ввиду непрерывности данной прямой была бы вполне неопределенна. Но мы можем на данной прямой

* Учение о континууме Г. Кантор формулировал в «Основах общего учения о многообразиях». Рус. пер. в «Нов. идеях в математике». СПб., 1914. № 6. § 10.

взять какой-нибудь отрезок $\langle CD \rangle$ и сравнивать вероятность положения точки M на $\langle CD \rangle$ с длиной $\langle l_{CD} \rangle$ и $\langle l_{AB} \rangle$. Тогда задача получает определенность и мы сможем выставить такой принцип: *вероятность того, чтобы точка M оказалась на определенном отрезке $\langle CD \rangle$ прямой AB, пропорциональна длине этого отрезка.* Отсюда следствие: если M во что бы то ни стало находится на AB, т. е. вероятность этого ее нахождения равна единице, то *вероятность ее нахождения на $\langle CD \rangle$* равна $\langle \frac{l_{CD}}{l_{AB}} \rangle$.

Этот принцип непрерывной вероятности дает возможность решать массу задач, например, хотя бы знаменитую задачу о попадании иглы в ту или иную параллель [линий], начерченных на горизонтальной плоскости (задача эта была решена еще Бюффоном). Большинство задач подобного рода требует, однако, применения методов интегрального исчисления.

§ 62. Взаимодействие аксиом едино-раздельности и становления.

1. Достигнутая нами ступень числового становления имеет значение не только сама по себе, но она получает новое глубокое значение и в смысле взаимоотношения с предыдущей группой аксиом. Дело в том, что отвлеченно-диалектическое становление, математически специфицируемое в категорию непрерывности, будучи приложено к аксиомам предыдущей группы, впервые делает возможной разнообразную их модификацию — соответственно своей принципиальной алогичности, а предыдущие аксиомы едино-раздельности, будучи приложены к чистому алогизму непрерывности, впервые делают возможным получение различных новых оформлений уже из этого алогического материала непрерывности.

Остановимся сначала на воздействии, получаемом от аксиом непрерывности аксиомами едино-раздельности в арифметике.

2. а) Что касается *арифметических* аксиом едино-раздельности, то их видоизменение в зависимости от категории становления выясняется тотчас же, как мы вникнем в сущность становления, инобытийного, как мы знаем, в отношении идеального. Становление потому и есть становление, что оно есть выход смысла наружу, самоотчуждение смысла. Его мы поэтому называем еще алоги-