§ 65. Аксиома ставшего числового бытия в арифметике. Теперь перейдем к обзору явлений конгруэнтности с математической точки зрения.

1. Явление числовой конгруэнции легче всего демонстрируется на т. н. *коммутативном* законе $a+b=b+a$. Когда мы складываем два числа, то оказывается, что сумма совершенно не зависит от порядка слагаемых. Что это значит и почему это возможно? Это значит, что для слагаемого совершенно *не важно то место*, где оно находится. Место это ничего нового в количественную характеристику слагаемого не привносит. Однако это не значит, что место само по себе есть полное ничто и никакой роли в сложении не играет. Наоборот, самый процесс сложения возможен только в силу наличности вообще разных «мест» для слагаемого. «Место» есть тот инобытийный фон, на котором разыгрывается вся картина данного арифметического действия. Без него не было бы и самого сложения. Однако единственная функция этого инобытийного фона заключается только в *гипостазировании* слагаемых, и тут совершенно отсутствуют всякие функции какого бы то ни было количественного воздействия на гипостазированные числа. Кроме того, инобытие здесь вполне нейтрально к *порядку* этих слагаемых и форме их взаиморасположения. Это значит, что идеально-числовая структура совершенно не зависит от своего инобытийного становления. Мы ее можем полагать при любой форме этого последнего, и она в идеальном смысле, т. е. в смысле своего отвлеченного количества, совершенно никак не меняется. Она всегда тождественна сама с собою, т. е. она всегда сама с собою конгруэнтна.

2. Однако здесь мы указали только на коммутативный закон в сложении. Этот «закон счета», как известно, далеко не единственный. Существуют еще *ассоциативный* и *дистрибутивный* законы; и кроме того, все эти законы применимы как к операциям сложения, так и к операциям умножения.

a) Вот обычная их арифметическая формулировка.

I. КОММУТАТИВНЫЙ (ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ) ЗАКОН:

a) в сложении —

$$a+b=b+a,$$

b) в умножении —

$$a \cdot b=b \cdot a$$

II. АССОЦИАТИВНЫЙ (СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ) ЗАКОН:

a) в сложении —

$$a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b,$$

b) в умножении —

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c=(a\cdot c)\cdot b$$

III. ДИСТРИБУТИВНЫЙ (РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ) ЗАКОН В УМНОЖЕНИИ:

a) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$

b) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

Это обычный вид формулировки, как он дается в арифметике. Не преследуя философских целей, он, конечно, и не может давать нам полной логической ясности и обоснованности, и нас при этом заметно беспокоят вопросы: почему тут эти, а не другие законы, почему тут только сложение и умножение и пр.? Это заставляет, с логической точки зрения, взглянуть на них несколько иначе при всей их непосредственной арифметической очевидности. Арифметически-то они очевидны, но логически они совсем не очевидны.

b) Начнем с конца. Дистрибутивный закон, очевидно, есть частный случай законов сложения — умножения вообще. Если мы имеем произведение $a\cdot[d]$ и если $[d]$ есть не что иное, как некая сумма $b+c$, то само собой очевидно, что $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$. Отсюда, хотя в нашем случае дистрибутивность умножения используется совсем для других логических целей (не просто для иллюстрации законов самого сложения и вычитания), все же, взятая сама по себе, она вполне доказуема на основании категории только простого сложения и умножения.

Дистрибутивный закон показывает, что совокупность можно распределить между частями другой совокупности так, что это никак не повлияет на общий результат операции с такими совокупностями.

С другой стороны, ассоциативный закон, как легко заметить, есть частный случай коммутативного закона. Если мы знаем, что $a+b=b+a$, то стоит только представить, что *b* равняется какой-нибудь сумме $c+a$, как делается очевидным и ассоциативный закон. В самом деле, если $a+b=b+a$, то, значит, в смысле объединения с *a* одинаковым образом ведут себя и отдельные части этого b. Ведь, когда говорится b, не имеется в виду, какое оно, большое или малое, часть чего-нибудь или само дано как целое. Если ему свойственна такая общность, то под этим b можно понимать и c, т. е. одно из слагаемых нашего общего b. А это и значит, что a и c могут свободно обменяться местами без влияния на общую сумму, т. е. обнаруживается действие коммутативного закона. Равным образом и закон $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ есть тоже лишь логическое следствие того же самого коммутативного закона, стоит только в коммутативном законе один из сомножителей представить как произведение новых сомножителей. Точнее будет сказать, что если в коммутативном законе *одна* совокупность может быть поставлена на место *другой*, то по ассоциативному закону *одна* совокупность может быть поставлена на место *элемента* другой совокупности.

Но тогда нетрудно уловить и общую схему этих трех законов счета: *коммутативный закон требует независимости арифметической операции от перемены порядка различных совокупностей; ассоциативный закон требует независимости от перемены одной совокупности на любой элемент другой;* и, наконец, *дистрибутивный закон требует равноправия в общей операции двух раздельных совокупностей с равномерным распределением одной из них по всем элементам другой.* Все же эти три арифметических закона порождены одной общеарифметической аксиомой: **закон конгруэнтности числа есть закон получения его из элементов, различающихся между собою исключительно только своей чисто количественной значимостью и абсолютно тождественных в смысле какого бы то ни было инобытия**, какого бы то ни было своего инобытийного положения. Итак, можно дать следующую формулу этой аксиоме.

3. а) Чтобы дать общую и строгую логическую формулу аксиомы ставшего наличного бытия в арифметике, будем рассуждать так. Ставшее есть то, что остановилось. Покамест оно не остановилось, оно было только становлением. Становление, по самому существу своему, неопределенно. Оно идет неизвестно откуда и неизвестно куда. То есть чистый алогизм бытия, в котором, как в таковом, невозможны никакие расчленения. Невозможно применить к нему, например, категорию тождества; и нельзя даже сказать, тождественно ли оно себе самому,

ибо оно в каждый момент все разное и разное и его невозможно поймать ни в какой точке; в нем все плывет сплошно. Но вот оно остановилось, т. е. мы перешли к ставшему. Это значит прежде всего, что становление оказалось чем-то, и прежде всего *самим собою*, оно стало тождественным с самим собою. Ставшее есть тождество становления с самим собою. Но что надо для того, чтобы установить тождество становления с самим собою? Для этого надо *вернуться* с конечной точки становления к первоначальной; и если оба направления становления окажутся тождественными по своему процессу и по своему результату, то искомое тождество и будет установлено. Итак, ставшее есть не что иное, как *тождество направлений становления в смысле их общего результата*.

К этому сводятся и указанные выше законы счета. Единственное, что утверждает коммутативный закон,— это тождество направления производства арифметической операции. О разных вариациях этого направления и об их тождестве в смысле результата говорят и другие два закона. Следовательно, мы могли бы сказать так.

Аксиома ставшего наличного бытия в арифметике: **арифметический счет имеет своим основанием тождество направлений своего становления.** Другими словами, арифметический счет зависит только от количественной характеристики чисел при любом инобытийном воспроизведении. Или: арифметический счет характеризуется законами коммутативным, ассоциативным и дистрибутивным в операциях сложения и умножения.

b) Впрочем, можно дать в кратчайшей и тем не менее превосходной формуле арифметическую интерпретацию конгруэнтности, не прибегая даже к самим законам счета, а только имея их в виду вообще. А именно, что мы, собственно говоря, делаем, когда пишем формулы этих трех законов в п. 2а? Пусть, например, мы высказали $a+b=b+a$. Что это значит? Это значит, что была некая величина c, которая составлялась из a и b. Мы сложили a и b, получилось c. Чтобы формулировать на этом основании коммутативный закон, мы должны были $(a+b)$ приравнять к $(b+a)$ на *основании равенства* того и другого с третьей величиной c. Пусть мы имеем: $a+(b+c)=(a+b)+c$. Чтобы вывести этот ассоциативный закон, мы должны были сначала вычислить левую часть этого равенства, определивши искомую сумму, например, как [*d*]; затем мы должны были вычислить правую часть и найти сумму для правой части. *Только когда в обоих случаях у нас получилось то же самое* [*d*], мы можем сказать, что ассоциативный закон в сложении верен. Так же точно мы поступаем и во всех законах счета, как сложения, так и умножения. Нетрудно заметить, что в глубине этих трех законов лежит одна огромной важности идея и она-то и есть настоящая идея арифметической конгруэнтности, если ее понимать в максимальной общности и отвлеченности, минуя все конкретные формы, в которых она может являться. Эта идея следующая:

две или несколько величин, равные порознь третьей величине, равны между собою.

Тут [все три] дедуцированных нами закона арифметического счета суть только проявления этой общеарифметической идеи конгруэнции; и они вырастают из нее как из своего глубокого и последнего основания. Эта идея есть и наилучшая арифметическая интерпретация той общедиалектической аксиомы ставшего числового бытия, которая дедуцирована выше.

Когда говорится, что две величины, равные порознь третьей величине, равны между собою, то, очевидно, предполагается, что эти две величины по крайней мере по внешнему своему виду *различные*, так как, будь они равны с самого начала, не было бы смысла и выставлять эту аксиому. Следовательно, обе эти величины имеют полное право быть внешне различными. Однако что же это значит? Могут ли они быть *количественно* различными? Конечно, нет. Могут ли они стоять на любом месте? Да, они могут стоять на любом месте, но этот принцип нельзя понимать в абсолютном смысле. Если бы тут был абсолютный принцип безразличия порядка действий, тогда можно было бы в математическом выражении числитель писать вместо знаменателя и обратно, показатель степени — вместо основания и обратно, и т. д. Конечно, не эту нелепость утверждает аксиома конгруэнтности. Но тогда что же остается? Сказано совершенно точно: *тождество направлений становления*. Становление есть тут, как известно, действие, арифметическая операция, но не в смысле количественной значимости вовлеченных в эту операцию чисел и не в смысле порядка отдельных моментов операции. Поскольку становление есть инобытийноалогическое, т. е. сплошно-непрерывное, развертывание, под[42] становлением в смысле арифметической операции можно понимать только вариирование операции в условиях полной сохранности ее смысловой структуры. Это и заставляет геометров связывать конгруэнцию с понятием движения и перемещения и утверждать, что конгруэнтность есть неизменность фигуры при перенесении ее в любое место. Тут как раз и имеется в виду *алогическое становление* фигуры (ее перемещение) при условии сохранности ее структуры. Точно то же имеем мы и в арифметике. Две величины, равные порознь третьей, могут обладать именно разными направлениями своего становления (например, $a+b$ и $b+a$); в этом и заключается то, что мы выше назвали разницей внешнего вида величин. Таким образом рассматриваемое арифметическое положение действительно с огромной точностью воспроизводит в арифметических терминах общедиалектическую аксиому конгруэнтности.

4. Необходимо отдавать себе полный логический отчет в диалектической *последовательности и назревании* числовой мысли в арифметике. Когда мы строили аксиомы едино-раздельности, арифметика созрела у нас до степени категории *счета*. Что надо для счета? Для этого нужно, чтобы каждое число было сформировано внутри себя самого и чтобы ясно было отношение сформированных чисел между собою. Первое было определено категориями самотождественного различия и подвижного покоя. Второе было дано через закон определенности числового бытия. Но, получивши идею арифметического счета, мы, в сущности, получили не что иное, как возможность бесконечно двигаться вперед и назад по натуральному ряду чисел. Надо было внести какие-нибудь дифференции в это безразличное движение по натуральному ряду, т. е. надо было получить возможность не просто выхватывать те или иные числа из этого ряда, но надо было уметь пользоваться и разными комбинациями этих чисел. Для этого надо было внести моменты становления в самую категорию счета. Получились разнообразные арифметические действия. Последние и есть ведь не что иное, как самый обыкновенный счет, но только с различными дифференциациями внутри себя, т. е. в условиях различного комбинирования чисел. Но ведь числа твердо держатся каждое на своем месте в общем натуральном

ряду чисел. Если мы допускаем любое их комбинирование, то возникает вопрос: не прикованы ли они к своему месту настолько крепко, что каждый отрыв их от данного места и приковывание к новому месту влекут за собою их собственную деформацию? Чтобы этот «отрыв» и это новое полагание не мешали их чисто количественным отношениям, требуется нейтральность инобытия, несущего на себе эти комбинации чисел и заново осуществляющего их на любом участке числового протяжения. Но это значит, что требуется не только непрерывность чисел и действий над ними, но еще и конгруэнтность как чисел, так и действий. А для этого надо воспользоваться категорией ставшего.

5. Только теперь, с присоединением аксиомы конгруэнтности, наш счет, который мы вывели в сфере единораздельности только отвлеченно, наполнился живым содержанием и превратился в реальные законы арифметического счета вообще. Но *это не значит, что невозможна арифметика без аксиомы конгруэнтности.* Наш общий перво-принцип конгруэнтности, формулированный в § 64.3, гласит вовсе не то, что решительно всякое арифметическое число конгруэнтно. Он гласит только то, что всякое арифметическое число «так или иначе определено с точки зрения конгруэнтности». А вполне возможна арифметика, где этот принцип будет действовать отрицательно, и мы получим здесь числа, лишенные принципа конгруэнтности. Ниже (§ 66.5) мы укажем теорему Паскаля как наиболее яркую для характеристики геометрической конгруэнции. Если возможна непаскалева геометрия, то так же возможны и непаскалевы числа. Это числа, к которым применимы все упомянутые выше законы счета, *кроме закона коммутативности умножения.* Если бы мы стали входить в подробности, то, между прочим, мы нашли бы, что для неконгруэнтности в этом смысле необходимо нарушение принципа непрерывности, так что не все неархимедовы числа суть непаскалевы, но все непаскалевы обязательно суть в то же время и неархимедовы. Это должно быть понятно ⟨...⟩, потому что в диалектической системе становление предшествует ставшему и, отвлеченно говоря, становление возможно без ставшего, но ставшее невозможно без становления. Нагляднее это дело будет обстоять в геометрической области.