теорему Дезарга о проектности треугольника в § 63.5), делают невозможным объединение дезарговой, архимедовой и непаскалевой геометрий.

Что касается, наконец, *четвертой* комбинации, в которой отсутствует и непрерывность, и конгруэнтность, тó если вообще мыслимо отсутствие одной из этих категорий, то вполне представимо и отсутствие их обеих. Можно даже сказать, что эта геометрия и не может не быть непаскалевой, раз она неархимедова (как это видно из предыдущего).

Вообще говоря, в суждении о всех этих типах геометрических построений можно руководствоваться следующей схемой [47].

§ 67. Аксиома ставшего числового бытия в теории множеств.

1. Нам не нужно будет подвергать категорию конгруэнтности вновь принципиальному рассмотрению после того, как мы выше предприняли ряд разграничений и установок для арифметической и геометрической областей. Перенесем целиком в теорию множеств основной принцип конгруэнтности в тождестве направлений счетного, или построительного, становления и будем только наблюдать, какой эффект вызовет этот принцип в сфере самих множеств.

а) Прежде всего, что здесь является аналогом арифметического счета и геометрического построения? Выше (§ 56.1) мы видели, что таковым является *упорядочение*, или, другими словами, *типизирование* (установление и функционирование типа) множества. Следовательно, вопрос касается *тождества направлений упорядочивания*. Если аксиома конгруэнтности верна в отношении множеств, то, какие бы направления в смысле упорядочивания элемента мы ни брали, все они должны давать абсолютно тождественный результат, а именно прежнее и основное множество с его собственным типом.

Будем при этом помнить: речь идет вовсе не о произвольности комбинирования элементов как таковых. Такового произвола не было у нас даже в арифметике и в геометрии, и тем более его не может быть в отношении теории множеств, где такую первостепенную роль играет идея порядка. Речь идет о произвольности выбора направлений *становления* чисел, а не о тождестве самих чисел. Становление же, будучи само по себе алогическим, не способно ничего менять в логическом, т. е. в данном случае, в чисто числовом (как в смысле количества, так и в смысле порядка), и оно способно вносить различия только в условиях сохранения прежней количественной и качественной структуры. Следовательно, аксиома конгруэнтности требует сохранения общей структуры данного множества (т. е. его типа) при любом комбинировании его элементов, но это комбинирование должно быть не абсолютным, а, так сказать, экземплификационным. Мы не сдвигаем этих элементов с места и не меняем их порядка, а только мысленно объединяем их в разные подмножества. И оказывается, при каждом таком комбинировании образуется новое множество, хотя в него входят элементы только из тех, которые входили в данное основное множество.

Можно ясно сказать еще и так. Элемент множества, как мы знаем, несет на себе смысл целого, т. е. смысл всего множества. Теперь мы объединим его с элементом *другого* множества. Это другое множество, поскольку оно другое, есть совсем другая целость, и несет оно в себе совсем другой смысл. Стало быть, и элементы его несут на себе совсем другой смысл, чем элементы первого множества. И вот, оказывается, объединение этих двух элементов из разных множеств создает еще *новое множество*, которое ничего общего не имеет с первыми двумя. Элементы первых двух множеств вошли в состав третьего множества решительно с тем же самым смысловым содержанием, которое они имели и в границах своих множеств. *Элемент третьего множества конгруэнтен элементу первого или второго множества* (смотря по тому, откуда он взят). Другими словами, к какому бы новому множеству мы ни присоединяли данный элемент данного множества, он все равно остается самим собою, и в пределах этого нового множества он *точно так же* ориентирован на целое, как и в пределах первого множества. Правда, поскольку сюда входят элементы с другой ориентации, общая совокупность всех элементов множества наложит на наш перенесенный элемент печать и его нового местонахождения. Тем не менее стоит только отвлечься от целого, как мы вновь узнаем наш элемент первого множества, как он был до перенесения.

Наглядным и обывательским примером теоретико-множественного действия этой аксиомы конгруэнтности может служить такая вещь детского мира. Всем известны т. н. загадочные картинки. Дается, например, картинка леса или постройки, и спрашивается: а где же дровосек или где же плотник? Вы долго рассматриваете этот простейший рисунок и никак не можете найти человека. Потом вдруг вы обращаете внимание на несколько штрихов и объединяете их в специальную фигуру, отличную от всего прочего фона. Оказывается, дровосек тут все время был, но мы просто не выделяли штрихов, рисующих его фигуру, в отдельное множество. Спрашивается: изменилось ли что-нибудь во всем рисунке оттого, что мы увидели здесь человека? Ровно ничего не изменилось. Элементы картины, из которых создан дровосек, вполне конгруэнтны тем же самым элементам в том случае, когда они не дают нам никакого представления о дровосеке, а просто входят в общий рисунок наряду с прочими его частями. А мы можем выбрать *любые* комбинации на фоне нашего рисунка, от этого ровно ничего не изменится ни в самом рисунке, ни в отдельных его частях. Это и значит, что, какое бы направление в становлении упорядочивания мы ни взяли, все эти направления вполне тождественны в смысле общего результата упорядочивания элементов, захваченных данным становлением.

b) Таким образом, конгруэнтность здесь (как и раньше) мы понимаем двояко.

Во-первых, мыслится конгруэнтность множества с самим собою. Здесь мы видим: тип множества есть нечто до такой степени твердое и определенное, что он не меняется от того, с какой стороны мы к нему подходим. В теории множеств прямо существует предположение, что конечное множество при всяком изменении способа упорядочивания сохраняет свой тип. Из этого типа мы могли вырезывать другие типы, которые не будут с ним конгруэнтны, и наличие этих совершенно новых типов нисколько не мешает существованию общего типа. Последний остается сам собою при любых направлениях его рассматривания. Это и есть тождество направлений становления множества.

Во-вторых же, мыслится конгруэнтность множества при любом его «перенесении» и любой, так сказать, «среде», как и треугольник мыслится конгруэнтным другому треугольнику, если для последнего выполнены те же условия построения, что и для первого. Некоторый материал для этого второго способа представления дает указываемая дальше «аксиома произвольного выбора», хотя она формально и не имеет никакого отношения к понятию конгруэнтности.

Аксиома ставшего числового бытия в теории множеств: **упорядочивание множества основано на тождестве направлений его становления.**

2. a) Просматривая литературу по теории множеств с целью определения того, сумели ли математики уловить и зафиксировать идею конгруэнтности в сфере множеств, мы с огромным удовлетворением и полной неожиданностью наталкиваемся на одну очень популярную аксиому, которая так и носит название «аксиомы Цермело» и определяется как «аксиома произвольного выбора». Формулировка ее, однако, сильно отличается от нашей, и сходство в основном не должно затемнять перед нами всех расхождений. Остановимся на этой популярной и многоспорной аксиоме.

Сначала прочитаем ее. Формулируют ее обычно так: **если *M* есть множество, все элементы попарно содержат каждый тоже по крайней мере по одному элементу, и потому, попарно взятые, они совершенно различны по своим элементам, то существует по крайней мере одно множество,— а именно подмножество в качестве некоего объединенного множества,— которое имеет как раз один-единственный элемент, общий с каждым элементом из *M*, и не имеет никакого другого элемента.**

b) Что сказать об этой «аксиоме выбора», создавшей целую литературу бесполезных словоизлияний?— Прежде всего, если ее брать в таком виде, как она формулируется обычно, она *вполне излишня* в системе теоретико-множественных аксиом вообще, и в особенности у тех, кто не сопротивляется аксиоме полного упорядочения. Строго говоря, «аксиома выбора» отличается от «аксиомы полного упорядочения» только словесно. Ведь что мы называем полным упорядочением? Если упорядоченным множеством мы называем такое, в котором о каждой паре его элементов a и b мы утверждаем, что или $a>b$, или $b>a$ (т. е. или a является первым элементом, или b), то вполне упорядоченное множество есть такое, в котором *каждая часть* имеет первый элемент. У нас имеется множество множеств. Каждое входящее сюда множество есть, стало быть, четкая последовательность элементов.

Мы берем из каждого такого множества по одному элементу так, чтобы это были разные элементы. Ясно, что в полученном из этих элементов новом множестве будет соблюдена тоже четкая последовательность, раз сами элементы с самого начала составляли такую же четкую последовательность. Что же нового нам дало это «произвольно выбранное» множество по сравнению с полной упорядоченностью первого множества множеств? Ровно ничего. Поэтому кто признает полное упорядочение, тот может не тратить времени и слова на аксиому выбора.

c) Особенно математики убиваются над тем, что часто, несмотря на эту аксиому, невозможно действительно построить реальное множество, отвечающее требованиям аксиомы. Многие с серьезнейшим видом делают замечательное открытие, что одно дело — постулировать возможность множеств и другое — дать само множество как реальный математический индивидуум, утешая себя и других, что-де хоть и невозможно конструировать здесь реальное множество, но зато оно принципиально возможно. По этому поводу обычно высказывается ряд глубокомысленнейших суждений, являющихся действительно невообразимой новостью для тех, кто никогда не занимался философией. Вся эта словесность, однако, появляется только потому, что в самой аксиоме напирают обычно на то, что для нее совсем не характерно и что является только повторением аксиомы полной упорядоченности *.

d) Что же является тут самым главным, самым оригинальным и интересным? Таковым является здесь и самая возможность нового множества, и [48] то обстоятельство, что, *если* оно возможно, оно составляется *из тех же самых* элементов, из которых состоят и множества данного множества. Центр тяжести здесь не в отдельном индивидуальном множестве, о возможности которого спорят математики, но в том, что тип данного множества совершенно не [зависит] от того, в какие группы мы объединяем элементы, входящие в эти множества. Тип данного множества множеств всегда можно заменить

* Относительно того, какие именно теоремы основаны на аксиоме Цермело и насколько она необходима в разных отделах теории множеств, деловую сводку можно найти у В. К. Серпинского.— Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и в анализе // Математический сборник. 1922. Т. 31. Вып. 1.

типом некоторой системы подмножеств данного множества, и это будет совершенно тот же самый тип. Поэтому дело тут вовсе не в произвольности выбора таких подмножеств, которые окажутся упорядоченными ровно так, как основное, исходное множество. Значит, «аксиому выбора» мы бы так преобразовали в целях привлечения ее для иллюстрации нашей аксиомы ставшего бытия в теории множеств: **если дано какое-нибудь множество множеств, то из элементов этих последних всегда можно составить такую систему подмножеств, что ее тип будет конгруэнтен типу основного множества множеств.**

е) Этой аксиомой определяется то, что в пределах каждого множества мы можем как угодно менять направления в становлении упорядочивания его элементов, т. е. выявлять в нем любые *части*, из которых каждая будет, очевидно, упорядочена специфическим образом, и тем не менее общий результат всех этих направлений (если мы исчерпали все множество) будет вполне равносилен его первоначальной упорядоченности. Здесь намечаются контуры того самого универсально-математического принципа, который для арифметики постулировал равенство двух величин при условии равенства каждой из них третьей величине, если под этой величиной понимать множество, упорядоченное первоначально, и под второй — множество, упорядоченное путем упорядочения произвольно взятых частей этого множества. Такие два множества будут различаться между собою только направлениями становления своего упорядочивания, и они поэтому будут конгруэнтны: всякое множество конгруэнтно самому себе.

Отсюда и переход к *законам теоретико-множественных операций*, которые, конечно, специфичны в сравнении с соответствующими законами арифметики (так, например, дистрибутивный закон умножения слева вовсе не возможен, в то время как тот же закон справа имеет место). Легче всего видеть связь этих законов с анализируемой аксиомой в ассоциативном законе сложения. Пусть имеется множество трех множеств — A, B, C, где $A > B$ и $B > C$. Тогда возможны[49] такие вполне упорядоченные системы частей:

1) $A \cup B \cup C$.
2) $(A \cup B) \cup C$.
3) $A \cup (B \cup C)$.

Совершенно ясно, что, какую бы из этих трех систем частей данного множества мы ни брали, общая сумма трех множеств будет вполне одинаковая. Это и будет значить, что мы тут вариируем направление становления упорядочения. Однако конгруэнтность суммы во всех трех случаях выбора направления упорядочивания требует аксиоматической фиксации.

§ 68. Аксиома ставшего числового бытия в теории вероятностей.

1. Место арифметического счета, геометрического построения и теоретико-множественного полагания занимает в теории вероятностей *исчисление вероятности.* Ставшее бытие есть то, которое становилось и потом стало, остановилось. Это значит, что оно есть последовательность, но стационарная. Стационарная последовательность, чтобы быть именно стационарной, требует единства своей структуры,— точнее, самотождества этой структуры при различии тех или иных ее инобытийных особенностей. «Движение», «перенесение» и здесь является хотя и «грубой», но, кажется, наиболее ясной иллюстрацией наличия инобытийного становления структуры при ее смысловом и принципиальном самотождестве. Следовательно, если мы имеем определенную последовательность вероятностей в одном «месте», мы гарантированы, что та же последовательность вероятностей будет и в этом другом месте.

Аксиома ставшего числового бытия в теории вероятностей: **исчисление вероятностей основано на тождестве направлений их становления.**

2. С. Н. Бернштейн и здесь проявил некоторую проницательность, выставивши «аксиому о несовместимых событиях», не отдавая, впрочем, себе отчета в том, что под этой аксиомой кроется идея конгруэнции. С. Н. Бернштейн напирает в этой аксиоме на *несовместимости* событий. Для нас, однако, во-первых, эта несовместимость важна только как указание на *последовательность* (без которой нет структуры ставшего), а во-вторых, тут важна не столько и сама последовательность, сколько независимость ее от «направления ее становления», данного здесь в виде «перенесения» ее с одних событий на другие (вне этой независимости не может быть самотождества фигуры последовательности). Если иметь это в виду, то «аксиому о несовместимых[50] событиях» можно