

метности о бытии с одинаковым правом можно сказать и что оно конечное, и что оно бесконечное, и что оно континуальное, сплошное. Можно сказать, что существует только конечное, а бесконечность и континуум есть его виды (хотя тут надо было бы проанализировать, что значит «вид»⁷¹). Можно сказать, что существует только бесконечное, а конечное и континуум есть его виды. Можно сказать, что существует только континуум, а конечное и бесконечное есть его виды. Везде тут по-разному придется понимать термин «вид», но, не вникая в подробности, можно с некоторым грубоватым, но вполне реалистическим добродушием сказать, что одно тут «подчинено» другому и что каждая из этих категорий вполне «выводима» из другой. В одном случае «выведение» есть заполнение фона, в другом оно есть выделение и вырезывание на некоем фоне. Но зато уже ни при каком реализме недопустим ни мещанский субъективизм Брауэра и Бэра, ни рационалистическая импотенция Бореля и Лебега. Только «демон» Цермело немного высовывает свою голову из этого мещанского болота мелкого субъективизма, да и тут способен только беспомощно выставить правильный тезис, будучи не в силах претворить его в живую действительность.

§ 73. Аксиома выражения в теории вероятностей.

Наконец, необходимо дать не подробную, но все же принципиально определенную установку для дедукции вероятностной сферы и в области теории вероятностей. Ограничимся самым необходимым.

1. а) Выражение есть внешность, по которой узнается внутреннее. До сих пор (§ 49, 53, 57, 61.4, 62.5, 63.7) мы находили в теории вероятностей только такие категории, о которых нельзя было сказать, внутренние они или внешние. Самое это различие впервые зарождается там, где полагается различие факта и смысла, т. е. на ступени наличного бытия. Дальнейшее уже будет смыслом *факта*, т. е. чем-то внешним, поскольку и факт есть внешнее в сравнении с тем внутренним, которым теперь оказывается чистый, т. е. до-фактный, смысл. Раньше мы находили в теории вероятностей отдельные операции над вероятностями (§ 62.5) и закон больших чисел (§ 63.7). Необходимо, следовательно, подчинить эти операции и это применение закона больших чисел таким новым преобразованиям, которые бы превратили их в то, что,

будучи по существу внутренним, теперь организовалось заново и потому стало внешним.

б) Наиболее яркую форму этого теоретико-вероятностного выражения надо находить в учении о *законе нормального распределения вероятностей и вообще в теории построения нормальных и уклоняющихся от нормы кривых распределения*. Здесь, во-первых, сначала имеются в виду вообще теоретико-вероятностные операции, так как тут наличен целый ряд вероятностей, так или иначе получаемых из опыта или теории, и также — закон больших чисел, потому что здесь ставится вопрос, какую функцией является вероятность, когда по мере возрастания количества событий сглаживаются случайные отклонения отдельных событий от их математических ожиданий. Однако это еще не все. Именно, во-вторых, здесь разыскивается *закон распределения вероятностей*, т.е. здесь самое исчисление вероятностей является чем-то отвлеченным, внутренним, получающим внешнюю конкретность от нового оформления. Следовательно, и здесь аксиому выражения необходимо формулировать как **утверждение тождества внутренне-внешних направлений становления для исчисления вероятностей**.

Мы не будем анализировать ни предельных теорем Лапласа, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова, ни закона (Гаусса) нормального распределения вероятностей, ограничиваясь только их общей диалектической установкой. Но ясно, что тут мы находимся в сфере теоретико-вероятностного выражения⁷² — уже по одному тому, что оперируем с кривыми, которые всегда есть выражение в отношении аналитических данных. Но тут, кроме того, исследуется становление вероятностей, определенным образом сконструированное, а именно путем выключения всяких случайных отклонений, т.е. путем выявления чисто смысловой стороны становления. А сконструированное таким смысловым образом становление всегда есть выразительная форма.

2. Но в предыдущих параграфах мы констатировали разные диалектические типы выразительной измеримости. Арифметика дала нам разные типы преобразований, которые в геометрии соответствуют разным типам пространства. Если даже и не входить в подробности, то нельзя ли дать хотя бы общую установку для такого понимания вероятности, которое можно было бы назвать

неэвклидовским? Да, такая методологическая позиция уже давно намечена в науке, и в настоящее время она обросла солидным математическим аппаратом. Я имею в виду основные факты т. н. волновой механики.

В чем тут дело? Придется на минуту отклониться в сторону, чтобы наше утверждение о «неэвклидовости» вероятности стало более или менее понятным*.

а) В истории учения о свете известны две большие теории, связанные с именами Ньютона и Гюйгенса. Ньютона считают создателем *корпускулярной* теории света, по которой светящееся тело испускает из себя частицы, движущиеся в пустом пространстве наподобие самых обыкновенных материальных частиц, т. е. прямолинейно и равномерно, если отсутствует влияние всякой посторонней силы. Эта теория довольно удачно объясняла явления отражения и преломления, но она оказалась совершенно непригодной для объяснения интерференции и дифракции. Волновая теория, основателем которой считают Гюйгенса, рассматривала скорость света как волновую скорость. Работы Физо и Френеля, казалось, окончательно утвердили господство волновой теории. Знаменитая электромагнитная теория света у Максвелла вполне стояла на точке зрения светового эфира Гюйгенса, механические колебания которого и понимались как свет.

б) Однако эта теория наткнулась на большое препятствие, создавшееся благодаря сформулированному в 1905 г. «принципу относительности». Если кратко сказать, то этот знаменитый принцип основывается на такой последовательности идей. 1) Исходный пункт: отрицается абсолютность, т. е. повсеместная однородность и неподвижность пространства. 2) Отсюда вытекает невозможность ориентировать абсолютное движение относительно пространства, т. е. невозможность вообще определить абсолютное движение. Получается, что можно говорить только об относительном движении. 3) Но это значит, что невозможно судить и о тех абсолютных изменениях скорости света, которые она претерпевает в связи с прохождением света через те или иные подвижные системы. Скорость света признается всегда постоянной, так что есть как бы некая математическая

* Дальнейшее изложено главным образом по Я. И. Френкелю. «Волновая механика». Л.; М., 1934. I.

бесконечность, которая не увеличивается и не уменьшается от прибавления или отнимания никаких конечных количеств. Это подтвердилось и экспериментально (опыты Майкельсона, Морли и др.). 4) Постоянство скорости света вместе с ориентацией на нее всех реальных скоростей приводит к учению о сокращении тел в направлении движения с точки зрения неподвижной системы, причем это сокращение выражается простейшим образом с помощью т. н. Лоренцовых преобразований. 5) Геометрическое толкование этих процессов приводит к выводу за пределы Эвклидова пространства, так как вытекающая отсюда кривизна пространства уже не может равняться нулю. 6) Получающееся пространство по этому самому уже не вмещается в обычные три измерения, и обычные трехмерные векторные величины становятся четырехмерными векторами, причем четвертое измерение может быть рассматриваемо как результат движения, т. е. времени.

Вот эта-то релятивистская теория света и оказалась несовместимой с ньютоновским механическим атомизмом (хотя старые уравнения электромагнитной теории вполне совместимы с постоянством скорости света).

с) Но корпускулярная теория Ньютона в эти же самые годы получила неожиданное подкрепление, которое, впрочем, фактически еще дальше уводило от Ньютона к сближению с волновой теорией, но уже в новом понимании. Это подкрепление было создано *квантовой теорией*. Незадолго до работы Эйнштейна 1905 г. Планк, желая объяснить распределение интенсивности в спектре теплового излучения, предположил, что атом и испускает, и поглощает лучистую энергию *скачкообразно*, т. е. отдельными порциями, или квантами, энергии. При этом оказалось, что квант энергии связан с частотой колебания излучения, и связан очень определенным образом, а именно

$$\varepsilon = h \cdot \nu,$$

где ν — частота колебания, а $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ эрг. сек., величина постоянная.

Хотя сам Планк мыслил это свое открытие вполне в рамках старой электромагнитной волновой теории, Эйнштейн пошел гораздо дальше. В самом деле, если испускание световых квантов (их потом стали называть

фотонами) совершается одинаково в любой координатной системе, то скорость их всегда равна скорости света, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек., а если эта скорость уменьшается, то они должны просто уничтожаться. Это и случается, когда фотон поглощается материальным атомом. Он не присоединяется механически к атому, как это мыслил Ньютон, а как бы размывает его и размывается сам. И кванты, по этому воззрению, не распространяются сферическими волнами, а двигаются с собственной энергией и количеством движения (в виде пространственно-временной проекции четырехмерного вектора того и другого) как некоторые математические точки, сообщая атому в случае своего поглощения последним и свою энергию, и количество движения. В дальнейшем такие факты, как фотоэлектрический эффект или эффект Комптона, дали замечательное подтверждение идеям Эйнштейна. И в результате получилась необходимость признать сразу и волновую, и корпускулярную точки зрения на свет, который в одних случаях проявляется как монохроматические волны с определенной частотой колебания, а в других — как однородное корпускулярное излучение с энергией кванта $\varepsilon = h\nu$ (где h — планковская постоянная). Фотон имеет определенное направление движения, но это направление совпадает с направлением световых волн.

К этому можно присоединить и чисто количественное взаимоотношение результатов корпускулярного и волнового аспекта. С корпускулярной точки зрения интенсивность света есть количество частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению световых лучей. В волновом же отношении она есть квадрат амплитуды колебаний в данной точке

$$N \sim \psi_0^2.$$

С первой точки зрения число частиц, пересекающих в единицу времени единицу площади, равно произведению N на скорость света c , которое есть плотность тока частиц, характеризующее как трехмерный или (с присоединением четвертой проекции времени) четырехмерный вектор и (после перемножения слагающих четырехмерных векторов, т. е. с получением 16 величин) четырехмерный тензор. Но мы можем перемножать

слагаемые электрического и магнитного поля и тоже получим 16 величин, образующих свой тензор энергии. Последний будет вполне аналогичен тензору корпускулярной теории.

d) Таким образом, мы приходим к теории, которая сразу является и корпускулярной, и волновой,— другими словами, теорией сразу и прерывности, и непрерывности. В 1924 г. французский физик Луи де Бройль применил эту двойную точку зрения *к самой материи* (т. е. к электронам и протонам), которая с тех пор тоже рассматривается теперь как корпускулярно-волновая структура. Эта структура не сразу была формулирована как вполне оригинальная. Еще де Бройль думал свести «частицы» к «волнам» в том смысле, что каждая отдельная частица трактовалась как резкий ⁷³ максимум амплитуды той или иной волновой системы. Однако оказалось, что эти «волновые пакеты» (как их назвал Шредингер) совершенно не объясняют индивидуальных ⁷⁴ электронов в явлениях дифракции и интерференции, хотя скорость частиц и совпадает с групповой скоростью и со скоростью волновых пакетов. Как раньше ньютоновская корпускулярная теория не смогла объяснить ⁷⁵ явлений дифракции и интерференции, так и теперь пришлось отказаться от прямолинейного движения частиц по природе и признать, что движение это зависит от системы волн, сопровождающих эти частицы. Значит, необходимым оказывается и существование «волн», и существование «частиц», одно никак несводимо на другое. Но тогда как можно было бы приблизиться к пониманию и к охвату этого параллелизма или дуализма?

Тут-то мы и встречаемся с новым пониманием вероятности.

3. В самые последние годы господствует такая схема в волновой механике. Интенсивность света определяется числом частиц. Чем более интенсивны волны, тем оказывается большее количество частиц, и, чем они слабее, тем частиц меньше. Пусть мы имеем отдельный электрон. Ясно, что, чем интенсивнее волна, тем более *вероятность* появления электрона в данном месте. Вероятность эта, очевидно, пропорциональна интенсивности волны в данной точке. Имея упомянутую выше непрерывную волновую функцию ψ^2 , нетрудно определить среднее, или *вероятное*, число частиц в данном объеме,— стоит только

взять произведение этой функции на объем, $\psi_0^2 \Delta v$. Это произведение есть не что иное, как мера вероятности нахождения одной из частиц в элементе объема Δv , а ψ_0^2 есть *мера плотности вероятности* для нахождения частицы в данной точке пространства. Это толкование взаимоотношения волн и частиц как *соотношения вероятности* было введено Борном. И такое представление вполне удовлетворительно связывает волновую и корпускулярную точки зрения, остающиеся при всяком ином подходе очень трудно соединимыми.

Здесь удобнее всего видеть все различие новой волновой механики от старой классической. Когда требовалось определить положение частицы в старой механике, брали некое начальное положение частицы и ее скорость в этот момент, а затем интегрировали ньютоновские уравнения движения и получали нужные координаты положения (как функции времени). В новой же волновой механике мы находим не точное положение частицы, а только *вероятность* того, что она будет иметь это положение в данный момент времени. А так как вероятность эта измеряется квадратом амплитуды волн, связанных с частицей, то мы тут находим, в сущности, только закон распространения этих волн, или *волновую функцию* ψ , в зависимости от трех пространственных координат и еще от времени.

Такое положение дела еще более заостряется, если мы примем во внимание т. н. *соотношение неопределенности*, сформулированное Гейзенбергом. Пусть мы точно определили скорость частицы. Если так, то ведь сделать это могли только при помощи установления системы плоских гармонических волн с одной и той же амплитудой во всем пространстве. Но это значит только то, что положение нашей частицы оказалось совершенно неопределенным. Пусть мы точно зафиксировали положение частицы. Это можно сделать только путем сведения протяжения волнового пакета к нулю. А это значит, что скорость нашей частицы оказалась совершенно неопределенной, так как при этом условии одинаково вероятны все значения и направления скорости. Чем точнее определяется скорость, тем расплывчатее оказывается положение; и, чем точнее положение частицы, тем неопределеннее оказывается ее скорость.

Это соотношение нельзя толковать как печальную необходимость наблюдателя ограничиваться слишком

несовершенными способами при измерении столь малых расстояний. Тут нет ни малейшего субъективизма. Тут — объективная картина той неопределенности, которая царит на изучаемом участке реального бытия. И это, собственно говоря, есть не столько неопределенность, сколько *отсутствие детерминизма и механицизма*. Ньютонская механика предполагает механистический детерминизм бытия. Здесь абсолютно точно вычисляется наперед и положение частицы в зависимости от скорости и пройденного пути, и скорость в зависимости от достигнутого положения. Волновая механика в этом смысле *индетерминистична*: она оставляет «свободу» самоопределения частицам, откуда и вытекает столь большое значение идеи вероятности, связующей частицы и волны в одну цельную картину. Раньше думали, что электрон — это определенный индивидуальный электрический заряд, т. е. прерывистый заряд, связанный с той или иной орбитой. Теперь же оказалось, что электроны представляют собою непрерывное распределение заряда с плотностью, пропорциональной интенсивности волн (вышеуказанной величине ψ^2). Атом как бы размазан, расплывается по «пространству», причем само это «пространство», по-видимому, надо считать впервые только еще образующимся, а не существующим заранее наподобие абсолютной однородности евклидовского пространства. В сложных атомах эти волны образуют многомерное пространство. Но это последнее тут вовсе не фикция, раз оно определенным образом характеризует процессы трехмерного пространства.

4. Разумеется, набросанные только что мысли о «неевклидовой» вероятности нисколько не могут претендовать на обстоятельность и полную ясность, так как это относится к специальной науке, теоретической физике, которая как раз теперь переживает небывалый кризис, требующий разъяснения самых первичных основ знания⁷⁶. Но вышенаброшенные мысли претендуют на то, чтобы дать аксиоматическую установку на определенный участок математической мысли; и такая необычная вещь, как соединение идеи вероятности с разнородным пространством, осталась бы слишком отвлеченной, если бы мы не указали соответственного физического аналога. С этой точки зрения уже имела бы значение простая ссылка на волновую механику, а не только

попытка кратко формулировать относящийся сюда феномен.

Сообщение идеи вероятности с разными типами пространства имеет для нас исключительно важное значение еще и потому, что вероятность, относясь к бытию модальному, есть бытие максимально конкретное. Его мы выше (§ 9) характеризовали как бытие историческое, ибо в нем учитывается его самопроизвольность, которой совершенно нет в других типах числового бытия. Но с другой стороны, если брать геометрию, то ни топология, ни проективная геометрия, ни аффинная не есть полнота определений пространства. Только метрическое пространство дает наглядную физиономию пространственной фигуры; но метрика эта бывает разная, и эвклидовская метрика — наиболее бедная и бессодержательная. Вот почему идея вероятности в соединении с неэвклидовскими математическими точками зрения есть максимально конкретная позиция в математике вообще; и открывающееся здесь выразительное бытие числа обладает и наивысшей свободой самоопределения, и самыми богатыми физиономическими возможностями.

Тут — естественный конец аксиоматики.

г) ОБЩЕЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§ 74. Итог аксиоматики.

1. Мы проделали большую работу. Обозреть всю диалектическую судьбу числа как суждения — это значит построить огромную диалектическую систему; и кому хоть что-нибудь неясно в этой системе, тот должен затратить всякие усилия для достижения ясности, ибо, кто не обладает последней ясностью в диалектике аксиом, тот не сумеет разобраться ни в чем последующем. Правда, ясность мысли и ясность слова — совершенно разные вещи, и они часто не совпадают. Автор настоящего исследования имеет такие диалектические мысли, которые кажутся ему предельно ясными, но он не может этого сказать решительно о всяком своем слове, так как воплощение сложных диалектических построений в словах всегда означает напряженнейшую борьбу с человеческим языком, который упорно и даже отчаянно сопротивляется, когда его заставляют выражать что-нибудь отвлеченное. Поэтому надо еще раз обозреть всю