в смысле непосредственной значимости, превращается в то, что может иметь *такое* ⟨...⟩ непосредственное значение, в x; и все действия, которые над этим x производятся, суть действия *опосредствованные*, т. е. без всякого числового результата. Потому и действия эти, будучи сами по себе тоже бытием непосредственным (если их брать самостоятельно), становятся здесь характеристикой опосредствованной значимости бытия, чем-то в глубочайшем смысле инобытийным в отношении числа и числовых операций. Это судьба чисел в инобытии, взятая без всяких чисел; голая фактическая (потому здесь — «ставшее») положенность числа и его операций — без непосредственной данности самих чисел.

Итак, совершенно точно нужно сказать, что *функция есть число, взятое как чистое умозаключение вне всякой непосредственной значимости того, что участвует в данном умозаключении.* Непосредственная же значимость числа, данная как заполненное определенным содержанием умозаключение, есть уже не функция, а *доказанная теорема.*

§ 77. Функционал и алгоритм (уравнение).

1. С диалектической необходимостью мы приходим наконец и к *выразительному* числу, к выражению, вернее, к числу как выражению. Если понятию соответствует натуральная структура числа [83], определению — аксиома, суждению — действие и теорема, умозаключению — функция и доказательство, то что же соответствует последней категории из принятых нами основных — *выражению*?

Выражение отличается от абстрактного смыслового содержания тем, что оно есть не *мыслимое* только, но еще и *понимаемое.* Понимать — значит отождествлять свое сознание с предметом настолько, что и он целиком реализуется в сознании со всеми своими логическими и алогическими связями. Это, однако, совсем не значит только мыслить. Предмет понимаемый как бы заново перекрывается смысловым слоем, которого не было в нем, когда он брался на стадии только мыслимого, т. е. абстрактного. Понимаемый предмет несет на себе печать того, кто его понимает, хотя это не есть что-нибудь ему чуждое; это только нечто такое, что *выделено* в нем, новая группировка его элементов. А это все одинаково реально, как и общий отвлеченный смысл. Выражение и есть предметный коррелят понимания. Выражение есть соотнесенность чистого смысла с его инобытием, но смысла не специального, не того или иного (ибо иначе возможно получение какой-нибудь еще довыразительной категории, напр. становления или ставшего), но инобытие окончательно сформированного и осуществленного смысла, т. е. смысла, прошедшего и через становление, и через ставшее. Тогда, беря этот «ставший» факт смысла и соотнося заново с его инобытием, т. е. производя в нем новые членения, но уже не логические и не алогические, но и те и другие сразу, тогда, и только тогда, мы получаем *выражение* смысла вместо *самого* смысла.

Выражение потому всегда предполагает категорию *внешнего*, категорию *внутреннего* и категорию *отождествления* того и другого, что, собственно говоря, и есть само выражение. О чистом смысле нельзя сказать, есть ли он что-нибудь внутреннее или внешнее. Сам по себе взятый, он не есть ни то, ни другое. Таково арифметическое число. О тройке или пятерке ничего нельзя сказать на тему о внутреннем или внешнем (внутричисловых категориальных моментов, где, как мы знаем, есть и свое внутреннее, и свое внешнее, мы здесь не касаемся, а берем полностью сформированное число как нечто цельное и самостоятельное). О становлении также нельзя ничего сказать в этом смысле. В области категории наличного бытия уже начинается антитеза внешнего и внутреннего, потому что само по себе наличное бытие, или ставшее, трактуется как факт, т. е. как нечто *внешнее*, и притом как факт *осмысленный*, т. е. несущий на себе некое *внутреннее* смысловое содержание. Но сама категория ставшего, осуществляя чистый смысл, переходит в категорию именно *факта*, и потому здесь нет полноты *смыслового* самопроявления. Здесь внутреннее есть смысл, а внешнее есть не смысл, но факт. А полнота диалектики требует, чтобы была такая категория, где и внутренний абстрактный смысл, и внешнее конкретное его воплощение были бы *одинаково смысловым* [*и*], т. е. чтобы внутреннее было смыслом и *внешнее* тоже было смыслом. Такая категория есть категория *выражения*. Тут сразу дан и весь внутренний смысл, и отождествление того и другого до полной неразличимости.

2. Категория эта сложная, и тут возможны многочисленные подразделения. Однако для нас достаточно будет только двух видов математического выражения.

Во-первых, в выражении мы можем, напр., выделить выражение чистого смысла, отбрасывая выражение становления или ставшего. Выражение ведь несет на себе все внутреннее, т. е. все наши предыдущие диалектические категории, которые раньше не были ни внутренними, ни внешними, а здесь, в связи со своеобразием данной диалектической сферы, стали все внутренними. Мы можем, следовательно, выдвинуть во всей структуре выражения момент выраженности той или иной [из] предыдущих категорий. Ограничимся выделением выраженности последних двух категорий — ставшего чистого и ставшего заполненного. Конкретнее говоря, поставим вопрос: что даст в своем выражении — умозаключение и доказательство. Или еще конкретнее и ближе к математике: что даст в своем выражении *функция* и *доказываемая теорема*. Решим первую часть вопроса.

Надо найти выражение функции. Надо, значит, найти такую категорию, которая бы зависела в своем выражении от функции. Очевидно, такой категорией не может быть величина [y], если мы напишем как обычно:

$$\langle y=f(x)\rangle .$$

Это будет не *выражение* функции, а *сама* функция, т. е. категория, уже выведенная нами. Надо найти такой [y], в котором функция участвовала бы именно как *функция* со всем своим конкретным содержанием. Подставляя разные величины в x, мы получим разные y, но [84] отношения между x и y останутся в любых значениях x теми же самыми, сама-то функция останется совершенно без всякого изменения. Она в диалектическом смысле *не будет положена*, т. е. будет жить именно не *как функция*, но только лишь как мертвое вместилище того, что действительно тут живо, т. е. изменяющихся количественных значений x. Следовательно, чтобы была выражена сама функция, нужна величина, которая бы зависела не только от изменения своего аргумента, но и от изменения *самого своего вида*.

Другими словами, здесь мы получаем то, что в математике называется *функционалом*, т. е. величину, зависящую в своих изменениях не только от количественных значений x, но и от вида функции этого аргумента. Самое обычное оперирование с таким понятием (если не с термином) мы имеем в вариационном исчислении, где изучается, напр., интеграл типа

$$\langle J(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx\rangle$$ [85].

Здесь мы имеем функцию от двух аргументов (x и y), и она же, кроме того, является функцией производной от $y(y')$. И требуется узнать, *какой вид* надо придать функции $\langle J(y)\rangle$, чтобы интеграл имел максимум или минимум. Величина $\langle J(y)\rangle$, таким образом, определяется здесь выбором самой функции, а не только количественными подстановками. Она есть уже не просто функция, но функция в гораздо более узком смысле слова, *функционал*.

3. Во-вторых, мы можем задаться вопросом: как *выражается наполненное умозаключение, или доказанная теорема*? Чистое ставшее раньше дало функцию, потом функционал. А что даст наполненное ставшее, если оно раньше дало доказанную теорему? В выражении есть внутреннее, есть внешнее и есть отношение между тем и другим. По внешнему, если это есть действительно выражение, мы должны узнать внутреннее. В предыдущем случае роль внутреннего лучше всего поручить функции, которая меняет свой вид; величина $[J]$ будет иметь значение (количественное) в зависимости от вида подынтегральной функции. Здесь же внутренним должна быть не функция, но доказанная теорема, т. е. прежде всего непосредственно данная значимость числа. Ее-то мы и должны найти по некоему внешнему виду выражения. Мы должны иметь такое выражение, чтобы путем разного рода манипуляций добраться до некоей непосредственной числовой значимости и чтобы этот процесс получения оказался вместе с тем и процессом доказательства. Это не есть просто доказательство, потому что тогда мы имели бы здесь ту или иную теорему. Но это есть доказательство наличия некоей определенной числовой значимости, построяемое всецело на внешнем ее выражении, на выражении ее внешних судеб. Внешние судьбы ее известны, а сама она — неизвестна; и вот, изучая это известное, мы идем к [не]известному, ибо это — *выражение*, диалектический синтез известного внешнего и неизвестного внутреннего.

Другими словами, тут перед нами *уравнение* в самом широком и общем значении этого слова, когда какая-нибудь функция неизвестного аргумента дана как известная, т. е. приравнена той или иной числовой значимости, и, из этого приравнения исходя, мы должны определить сам неизвестный аргумент x. Пожалуй, выводимая здесь категория даже шире «решаемого уравнения», почему, может быть, целесообразнее было бы говорить вообще об *алгоритме* как методе исчисления чего бы то ни было с целью нахождения того или другого неизвестного.

Таким образом: *функционал есть число, данное как выражение чистой ставшести числа*, или *число как выраженность чистого умозаключения; алгоритм (уравнение) есть число, данное как выражение наполненной ставшести числа*, или *число как выраженность наполненного умозаключения.*

§ 78. Общность полученных категорий.

Для удобства обзора всех категорий общей теории числа см. таблицу.

Необходимо отметить, что, поскольку мы в данном месте нашего исследования занимаемся именно общей *теорией* числа, постольку все выводимые здесь категории оказываются весьма общими, *максимально общими*, какие только могут быть в математике. *Ни одна математическая наука не может их избежать*, как бы ни старались многие разверстать их между отдельными науками.

Что чистые арифметические числа действуют решительно в каждой математической науке, напр. в анализе, это ясно. Так же ясна универсальность таких категорий, как действие или теорема. Но пожалуй, не всем ясно, что точно такой же универсальностью обладает и категория *функции*. А это действительно так.

Прежде всего самые арифметические действия могут рассматриваться как некоторого особого рода функции, а именно функции, так сказать, инобытийно-нулевые, т. е. функции, в которых инобытийности, аргументной неизвестности — нуль. Однако если такая мысль покажется уродливой, то можно уже прямо указать на наличие в арифметике функций, носящих название *числовых* функций. В т. н. теории чисел (которая есть, конечно, не что иное, как арифметика, и притом арифметика целых чисел) мы определяем, напр., количество первоначальных [простых] чисел [An], меньших данного числа [n]. И оказывается, что это есть функция от [n]. Имеется, как известно, приближенное выражение этой функции [86] через [отношение]

$$\left\langle \frac{An}{n} \approx \frac{1}{\ln n} \right\rangle, \left\langle An \approx \frac{n}{\ln n} \right\rangle.$$

Число делителей данного числа также, оказывается, есть функция этого числа; сумма делителей — то же самое