§ 82. Терминологические замечания.

1. Относительно предложенной диалектической системы необходимо сделать ряд замечаний, долженствующих оправдать некоторое расхождение с обычным явлением соответствующего математического материала. С таким расхождением мы будем встречаться нередко; и необходимо по возможности указывать на его[91] наличие.

Относительно существующих руководств и пособий по математике необходимо сделать общее замечание. Все они появились в результате определенных исторических, психологических и педагогических мотивов и часто почти не преследуют целей логической последовательности системы. Так, материал, известный теперь под названиями «арифметика» и «алгебра», настолько разношерстен, что объединить его в какую-нибудь единую систему совсем невозможно. То, что полегче и что можно дать детям младшего возраста, отнесено к «арифметике», а то, что потруднее,— к «алгебре». С такой педагогической точкой зрения должны считаться педагоги, но не философы, преследующие цель логически последовательной систематики. Приходится или выбросить совсем такие термины, как «арифметика», «алгебра», «анализ», или придать им условный смысл и в дальнейшем уже не выходить за рамки принятого словоупотребления. Выбросить такие старые и популярные термины, конечно, невозможно. Но тогда надо вкладывать в них какое-то определенное и вполне точное логическое содержание, хотя оно и было только условным.

Прежде всего в «арифметике» мы находим такие, напр., главы, как учение о мерах и весах, имеющие к арифметике такое же отношение, как и к любой естественнонаучной дисциплине, даже, пожалуй, меньшее. С другой стороны, в «алгебре» много таких вопросов, как, напр., извлечение квадратного или кубического корня из чисел или техника логарифмирования, что по смыслу своему должно бы иметь место в «арифметике». Кроме того, логарифм есть трансцендентная функция, и неизвестно, как связать его с прочим материалом «алгебры». «Анализ» наполнен разными геометрическими построениями и приложениями, которым настоящее место, конечно, не в анализе, а в специальной науке. Да и самое название «анализ» мало того, что не очень точно, оно употребляется в совершенно спутанном виде.

Под «анализом» обычно понимается дифференциальное и интегральное исчисление, т. е. изучение функций в условиях бесконечного процесса. Тем не менее «аналитическая геометрия» — вовсе не та геометрия, в которой применены методы исчисления бесконечно-малых. Это, вообще говоря, изучение геометрических элементов с точки зрения *алгебры*, так что правильнее всего было бы назвать ее алгебраической геометрией. Там же, где применены методы исчисления бесконечно-малых (т. е. методы «анализа»), [учение] называется не аналитической геометрией (как это требовала бы логика), но почему-то *дифференциальной* геометрией, а частью этот материал излагается прямо в курсах самого же анализа. Неизвестно также, почему эта геометрия называется дифференциальной, а не дифференциально-интегральной (раз там применены не только дифференциалы, но и интегралы). А то, что составляет содержание т. н. теории чисел (напр., все рассуждения о делимости), ничем принципиально не отличается от содержания обычной «арифметики», равно как и «высшая алгебра» содержит в себе теорию всех тех же управлений, что и «элементарная алгебра», только что эта теория и эти уравнения здесь посложнее и потруднее. Такая педагогическая и историко-психологическая точка зрения в классификации математического материала, конечно, должна быть нами отброшена.

2. Что же составляет подлинный и логически выдержанный предмет арифметики и алгебры?

Арифметика есть учение о «числе в себе», т. е. о *непосредственном бытии* числа. Этим она резко отличается от алгебры, оперирующей не с числами, но с функциями. *Но тогда к арифметике надо отнести все типы числа, если только они имеют непосредственное значение.* Прежде всего к арифметике должно быть отнесено употребление *отрицательных* чисел. На каком основании это понятие отнесено к алгебре и что алгебраического в отрицательной величине? Раз арифметика действует с положительными числами и, кроме того, еще действует с нулем, то очень странно, если тут же не будет еще и категории отрицательного числа. Фактически арифметика и употребляет отрицательные числа (напр., в рассуждениях о купле и продаже, в учении о векселях и пр.), но в угоду логическому принципу маскирует это употребление, относя соответствующую терминологию в другую науку.

Далее, вполне арифметичны рассуждения и *о бесконечности*. Бесконечное число есть особого рода число. Оно оценивается в своей самостоятельной и непосредственной данности; и нет нужды выбрасывать его из арифметики. Точно так же необходимо внести в арифметику теорию *мнимых* величин, рассматриваемую почему-то частью в алгебре (обычно — мелким шрифтом, так что сами авторы, по-видимому, не знают, здесь ли подлинное место для нее), частью в анализе (хотя к последнему относится только теория *функций* комплексного *переменного*, а не арифметика мнимостей). Решительно нужно выбросить из алгебры также *действия над степенями и корнями*. Это вполне непосредственные операции над непосредственно и самостоятельно данными величинами. Сюда же надо отнести и логарифмирование, хотя его почти всегда отрывают от статьи о степенях и корнях, с которой оно существенно связано.

И вообще алгебра отличается от арифметики не тем, что она пользуется какими-то особенными действиями, которых нет в арифметике, или какими-то новыми типами чисел, которых нет в арифметике. Вовсе не в этом принципиальное отличие. Единственное принципиальное отличие алгебры от арифметики заключается в том, что тут — *инобытие* всех арифметических чисел и действий, инобытийный их коррелят. В них не вносится ровно ничего нового, и их система ровно ни в чем не меняется. *Но все эти числа и действия, все вместе, как некая целостная сфера, целиком переносятся в новую область; и в этой области они подвергаются, опять-таки все вместе, единообразной модификации.* Область же эта есть область *функциональных отношений*. Следовательно, в алгебре не будет ничего нового в смысле *категории* числа или *категории* действий, ибо все эти категории относятся к *сущности* чисел и действий, а вся сущность обрисована в арифметике. В алгебре — те же категории, но только иное их употребление, а именно употребление функциональное, употребление в составе функций и их преобразований. Это и есть сущность алгебры.

3. Другое дело — отличие алгебры от анализа. И то и другое есть учение о функциях. Но к алгебре относятся функции с подлинными величинами, к анализу же — функции при *бесконечно-малых процессах изменения* аргумента. Возникающие здесь сложные переплетения

алгебраических и аналитических методов будут у нас предметом рассмотрения в своем месте.

I. СУЩНОСТЬ (АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ)

§ 83. Разделение.

Как было установлено в § 81, та первая сфера интенсивного числа, которая у нас условно наименована *сущностью* числа, распадается на три основных раздела.

А. *Арифметика*, или учение о непосредственной сущности числа в ее бытии.

В. *Алгебра*, или учение о непосредственной сущности числа в ее инобытии.

С. *Алгебраический анализ*, или учение о непосредственной сущности числа в ее становлении (включая и прочие основанные на становлении категории).

А. Арифметика (сущность числа в ее бытии)

§ 84. Разделение.

Теперь наконец мы вступаем в область философского понимания обыкновенного математического материала.

Сущность числа есть такое «число в себе», которое утверждено как непосредственно данное бытие. Оно, это число, не указывает на какое-то другое, уже чисто числовое значение, но само есть это чисто числовое значение. Потому это есть всецело область арифметики. Алгебра создает только функциональный дублет к непосредственной значимости числа. Арифметической величине диалектически противостоит алгебраически-аналитическая величина, которая выражена опосредствованно, при помощи букв и функционных обозначений. Непосредственное бытие числа в себе, данное как простой акт бытия, есть акт полагания; акт же полагания есть

I. *натуральный ряд чисел.*

Сосредоточимся на этом примитивном акте полагания, рождающем из себя натуральный ряд чисел. Будем наблюдать диалектическую эволюцию только [э]того акта полагания. Другими словами, мы отвлечемся от того инобытия, которое выводит вообще за пределы арифметики и науки, давая функциональное построение непосредственно арифметических величин, ведет уже к алгебре. Будем оперировать только с указанными примитив-