

до 90° тангенс возрастает от 0 до $+\infty$. При дальнейшем¹⁵⁰ увеличении α от 90° до 180° тангенс изменяется от $-\infty$ до 0. В моменте, когда угол равняется 90° , происходит разрыв тангенса и он [от] $+\infty$ мгновенно переходит к $-\infty$. Имея это в виду, спросим себя: что нужно для осуществления этого разрывного момента и какие категориальные моменты его конструируют? Нужно, во-первых, чтобы речь касалась становления и, во-вторых, не просто становления, но становящегося α , [что] должен быть переменной величиной. В-третьих, этот α не просто есть переменная величина, но он должен и фактически меняться, причем это изменение есть опять-таки не просто изменение, но изменение, в котором бы целиком воплощалось становление как таковое, т. е. изменение непрерывное. И вот, наконец, когда α *непрерывно изменяется* от 0 к 90° , мы, наконец, вдруг замечаем это удивительное¹⁵¹ явление, что данная функция $\operatorname{tg} \alpha$ *разрывается* и лишается своей непрерывности. От чего это зависит? Это зависит исключительно от внутреннего чисто смыслового содержания тангенса, который именно потому, что он — тангенс, производит разрыв в точке 90° . Стало быть, необходимо, в-четвертых, чтобы внешнее непрерывное изменение получало отдельную структуру от *внутренней* значимости этого $\operatorname{tg} \alpha$. В данном случае эта внутренняя значимость действует как $\langle \dots \rangle$ и — в определенной точке разрывает протекание $\operatorname{tg} \alpha$. На этом примере совершенно ясно участие в категории прерывной величины таких моментов, как становление, изменение, непрерывность, внутреннее и внешнее и синтез внутреннего и внешнего.

Между прочим, на этом примере с тангенсом прекрасно видно то диалектическое понимание дробности, которое мы употребляем здесь и употребляли раньше. Дробность у нас не есть просто арифметическое понятие. Дробность есть целость, данная в своем инобытии так, что имеется только это инобытие целости, а не сама целость. В этом смысле тангенс есть дробящая и дробящаяся стихия, потому что ее внешний результат приводит к разрыву и дроблению цельного, структуры становления.

§ 102. Предел.

Если мы рассмотрели первый момент иррационального числа (становящуюся отрицательность) в свете

самого иррационального числа (и получили три особые категории — постоянной, переменной и непрерывной величины), если мы, далее, рассмотрели второй момент иррациональности (внутреннюю дробность) в свете самой иррациональности (и получили еще новую категорию — прерывной величины), — то теперь необходимо рассмотреть *само иррациональное* число (как синтез внешней алогически становящейся иррациональности и внутренней дробности) *в свете самой же иррациональности*. Что значит рассмотреть иррациональность в свете самой иррациональности, т. е. рассмотреть ее *как таковую*, в ее существе, в ее первоначальном и чистейшем существе? Это значит рассмотреть самый *исток* иррациональности, определить ее *исходную* сущность, найти самый ее *первопринцип*. Иначе можно сказать так. Поскольку эта новая структура есть синтез, она должна быть *границей* для первого момента, для тезиса триады. Граница должна дать первоначальное очертание сущности, отразить¹⁵² ее смысловую природу, ясно отличить ее от всего, что не является ею. Найти первопринцип — это и значит уметь провести границу или быть в состоянии сказать нечто, отличивши это нечто от всего прочего. Так вот и возникает вопрос: где же нам искать самый первопринцип иррациональности и, стало быть, где же находится смысловая граница, определяющая эту иррациональную сущность и дающая ее определенную и специфическую значимость? Где эта смысловая законченность иррациональности и как называется этот новый синтез внутренней дробности и внешней алогически становящейся иррациональности, синтез, уже освобожденный от самой иррациональной текучести и являющийся лишь ее первопринципом, ее внутренней закономерностью и исходным первоначалом?

Этот первопринцип и эта внутренняя закономерность иррациональности есть *предел*, вернее, то, что в математике называется пределом.

2. Эта фундаментальнейшая категория всей математики требует четкого разъяснения, и тут диалектика должна показать всю свою силу и основательность. Иррациональность имеет свой первоисток в пределе. Предел — внутренний исходный первопринцип иррациональности. Чтобы усвоить это учение об иррациональности, надо произвести ряд ограничений.

а) Предел не есть просто голая и *абстрактная идея числа*, изолированно пребывающая сама в себе. Если взять ряд, члены которого образованы по типу $\langle u_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rangle$, т. е., полагая $[n] = 1, 2, 3, \dots$, взять ряд

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ и т. д., то на основе

$$\langle \dots \rangle = 1 - \frac{1}{[n]+1}$$

легко видеть, что пределом этого ряда является $\langle \dots \rangle^{153}$.
 1. Равным образом, если взять ряд¹⁵⁴

$$\langle u_n = \frac{1}{2n} \rangle,$$

то при возрастании n до бесконечности мы получаем в качестве предела 0. Эта единица и этот нуль, являющийся пределами двух последовательностей, сами по себе взятые, отнюдь не есть пределы. Смысл единицы есть просто единица, и ни о каком пределе тут нет ровно никакой речи. Так же и относительно нуля. Пределом 0, 1 и всякое другое число становится не само по себе, не в силу своей чисто абстрактной значимости, но исключительно лишь в силу того, что *она является некоей притягивающей силой* для других величин, т. е. в силу того, что оно перестает быть изолированным и голым числом, но заряжается некоей числовой заданностью и как бы издали привлекает к себе целую бесконечность определенных образом расположенных величин. Так, в первом примере единица, являясь пределом последовательности, *тянет* к себе эту последовательность, *притягивает* к себе наподобие некоего магнита целую массу каких-то своеобразных математических точек. И об этом мы знаем не просто из числового значения единицы (не имеющего, понятно, никакого отношения к последовательности или пределу), но из характера той смысловой сферы, в которую погружена эта единица. Значит, в определение предела мы обязаны внести *момент закономерности протекания последовательности, постепенно осуществляемой по мере дальнейшего распространения этого протекания*. Предел есть всегда та или иная *размерность, расположенность и упорядоченность процесса*, динамический смысл

и закономерность построения последовательности. Предел не есть просто ординарное голое число или величина, но он есть *смысловой первоисток числового становления*. Отсюда начинает становиться понятным, что предел есть в некотором роде иррациональность, рассмотренная как иррациональность же, т. е. он есть иррациональное становление — с точки зрения не просто своего протекания и текучести, но с точки зрения смысловой закономерности этого становления. Это есть сомкнутая и неразвернутая закономерность числового становления, смысловая заряженность этого становления, методический его перво-принцип — и чистая возможность.

Но точно так же предел не есть и та или иная *приближенная величина*, возникающая на его основе. Эта приближенная величина не есть самый предел, но именно лишь приблизительное выражение предела. Если взять число π , то это π не есть ни 3,14, ни 3,145, ни 3,1415 и т. д. Никакое приближение, как бы оно далеко ни шло, не есть самый предел, но лишь приближение к пределу. Отдельные приближенные выражения предела суть конечные, изолированные количества, никуда не стремящиеся и ни для чего не являющиеся целью и предельной причиной. Предел *виртуален*, или, что то же, предел есть смысловая *цель и задание* для некоего числового становления. Каждое же отдельное выражение предела ровно ничего не говорит о самом пределе и, само по себе взятое, ничем принципиально не отличается ни от какого любого числа вообще. Если число, точно выражающее предел, например e , не есть обыкновенное число, но указывает лишь смысловой перво-принцип и потенциальную закономерность становящегося ряда, то число, приблизительно выражающее предел, также есть особое число, если его связывать с пределом, а именно число, *стремящееся к пределу, притягивающееся к пределу*. Само по себе число 2,1718 не есть предел, выражаемый знаком e , но если рассматривать его в контексте предельных отношений, то оно *влечется* к пределу так же, как предел является для него неким смысловым магнитом. Итак, предел не есть ни число, точно его выражающее (если брать его само по себе, т. е. как просто число, как таковое), ни число, приближенно его выражающее (если брать его тоже в изолированном виде), ибо предел есть смысловым образом заряженный перво-принцип становления, а не

отдельные становящиеся моменты, хотя бы и взятые в самом конце становления.

с) Вполне понятно и то, что предел не есть *само становление*. Когда мы имеем числовую последовательность, то это есть становление к пределу, но не самый предел. И тут также нельзя оперировать изолированными величинами, хотя бы даже это были и *все* величины, относящиеся к данной области. Взять все моменты, из которых состоит становление данного ряда, совсем не значит взять предел этого ряда. Это будет ряд, которому *свойствен* какой-то предел, но не *самый* предел. Тут также не хватает смысловой заряженности и потенциальной [осмысленности, и тут также это заменено изолированной структурой (ибо становящийся ряд, взятый как таковой, тоже есть некая неподвижность)]; становится становящееся, но само становление не становится, оно неподвижно, как и огонь жжется, но огненность есть отвлеченное понятие, оно не огонь и не жжется. Нужно брать не становление, но его *исходную закономерность*, развертывающуюся в определенной последовательности, потенциальную упорядоченность становления.

д) Не поможет тут также и *антитеза внутреннего и внешнего*, ибо эта антитеза слишком обща и она входит уже в простое рациональное число, не говоря уже об иррациональности. Предел не есть только внутреннее для приближенного выражения предела как для чего-то внешнего. Конечно, такое <...> вполне правильно, и предел есть на самом деле нечто внутреннее, по отношению к чему всякое приближенное его выражение оказывается чем-то внешним. Но это не *только* так, и тут еще нет логического определения предела. Это один из моментов определения, но не само определение.

е) Наконец, предел нельзя понимать и как нечто *обязательно иррациональное*. В вышеприведенных примерах, где пределом оказывается 1 или 0, совершенно ясно, что ни 1, ни 0 не есть иррациональность. Наоборот, эти величины вполне рациональны. Однако предел не есть и нечто *обязательно рациональное*. Исток рациональности не есть нечто иррациональное. Тут опять вполне уместна аналогия с огнем, который хотя и жжется, но понятие огня не жжется, или с треугольником, который хотя и треуголен, но сама треугольность, понятие треугольника отнюдь не треугольно¹⁵⁵. Но точно так же

нет никаких оснований считать предел и $\langle \dots \rangle$ обязательно рациональным. Точное числовое выражение предела может быть рационально (как в вышеприведенных примерах 0 и 1), но мы уже знаем, что точное числовое выражение предела как раз не есть предел.

3. После всех этих ограничений понятие предела становится гораздо более ясным и по крайней мере выясняется та область, где нужно искать определение предела.

Основной вывод предыдущих ограничений сводится к следующему. Предел есть закономерность алогического становления, находящаяся не вне его и не в каком-нибудь отдельном его моменте, но имманентно присущая всему становлению и внутренне оформляющая его протекание. Это, собственно говоря, и есть определение предела. Однако дадим это определение в более расчлененной форме.

а) Ясно до всякого рассуждения, что 1) предел может существовать только там, где даны не просто устойчивые и взаимно изолированные числовые структуры, но — только там, где налична стихия *становления*. Алогически становящаяся отрицательность только и может обеспечить продвижение к пределу, и без этого становления предел превращается просто в обыкновенное неподвижное и изолированное число. Далее, что такое становление? Становление есть отвлеченное тождество бытия и инобытия, и в нем еще не раскрыто ни то, *что* становится, ни то, *как* оно становится. Необходимо, следовательно, чтобы было *то, что становится*, т. е. необходимо, чтобы становление потеряло свой плоскостной (в смысле предметного безразличия) характер и стало рельефным, перспективным. Для этого надо, чтобы 2) становление было *изменением*, т. е. чтобы была налична та *величина*, которая становится, и чтобы становление стало предметно расчлененным. Предела здесь, конечно, еще нет, так как неизвестно еще о способах данности этого изменения. Покамест известно только то, что есть какая-то величина, которая как-то меняется, т. е. есть числовая антитеза внутреннего и внешнего. Спросим себя: можно ли мыслить предел без того, чтобы каждый отдельный момент становления не приближался к этому пределу? Конечно, вполне можно себе представить, что переменная величина стремится к своему пределу *прерывно*, но тем не менее, проходя через прерывную область, она все же должна приближаться к пределу. Прохождение через

прерывную область все же как-то приближает ее к пределу. Нужно только, чтобы в более глубоком смысле непрерывность все же была налична. Если есть прерывность в абсолютном смысле, то это значит, что становление мыслится здесь прерванным в абсолютном смысле, т. е. и предел мыслится как переставший быть пределом. Так нельзя представлять себе существо предела. 3) Становление должно быть не только изменением, но и *непрерывным* изменением — для того, чтобы образовалось само понятие предела.

б) Будем вдумываться дальше. Что еще надо присоединить сюда и чего не хватает для получения предела? Пусть у нас есть некое непрерывное изменение величины. Не всякая непрерывность имеет предел. Функция синуса, или синусоида, например, возвращается периодически в одни и те же точки и ни к какому пределу не стремится. Значит, из одной непрерывности мы предела не получили. Чего же тут еще не хватает? Очевидно, наша непрерывность должна получить какую-то определенную *структуру*, и в этой структуре непрерывности, по-видимому, и кроется вся диалектическая загадка предела. В понятии предела мыслится еще *направление процесса*. Непрерывное изменение *должно быть направлено в определенную сторону*, чтобы стремиться именно к пределу. Но для этого необходимо, чтобы мы при всей непрерывности изменения все же различали *один момент непрерывности от другого*. Если мы это различение производим, то мы получаем возможность *сравнивать один момент* непрерывного изменения с другим; а если есть возможность сравнивать, то есть и возможность судить о направлении изменения. Но что значит различать один момент непрерывности от другого? Это прежде всего значит, что непрерывность *везде разная*, т. е. что эта непрерывность *внутренне прерывна*, что она имеет *прерывную* структуру. Из недр этой непрерывности должна выбиваться наружу, на внешнюю поверхность непрерывного изменения, такая структура, которая бы обеспечила *дробление единого непрерывного процесса* на любое количество отдельных моментов, определяющих при их взаимном сравнении общую направленность процесса. Эта дробящаяся непрерывность обуславливает собою особую направленность изменения, хотя уже сейчас видно, что и этого еще недостаточно для конструирования категории предела.

4) Должно быть, стало быть, не только становление, изменение и непрерывность, но еще и такое непрерывно-изменчивое становление, которое по своему внутреннему смыслу дало как становление *дробящееся*.

с) Не может быть только дробности. Чистая прерывность помешала бы понятию предела. Пробивающаяся изнутри дробность, определяя собою прерывные точки общего процесса становления, не может мешать тому, чтобы непрерывность все же продолжала как-то функционировать. Это, мы сказали, прерывность *относительная*, т. е. она как-то объединяется с непрерывностью. 5) Предел возникает на почве *объединения непрерывных и прерывных* моментов становления, направленного к пределу; и стоит только удалить один из этих моментов, как предел тут же сразу и уничтожается,—при удалении непрерывности перестает существовать движение и приближение к пределу, и при удалении прерывности исчезает возможность судить о самом наличии этого приближения. В обоих случаях предел перестает быть пределом или перестает функционировать как предел.

4. а) Можно ли удовлетвориться этим? И этого мало. Непрерывно меняющееся становление, имеющее определенную прерывно-непрерывную структуру, оказывается той или иной комбинацией прерывности и непрерывности. Когда идет речь о пределе, мы, однако, не принимаем во внимание эти прерывные или непрерывные моменты как таковые, хотя им и свойственна определенная структура. Предел—легче и как бы идеальнее всей этой массивной телесности реального становления, т. е. реально построенного числового ряда, или последовательности. Он есть сама комбинация или, вернее, сама *скомбинированность* этих моментов, а не самые эти моменты, хотя бы и определенным образом скомбинированные. Существует то или иное чередование прерывных и непрерывных моментов становления, и существует определенный *порядок* этого чередования, определенный *план* и *закон* этого чередования. Вот он-то и интересен для конструкции предела, а не сама стихия становления. Этот план или фигурность становления внедрены в самую гущу становления, и в реальной числовой последовательности они неразрывны—этот план и то, что ему подвержено. Однако, в порядке абстрагирования, ничто не мешает эту смысловую фигурность извлечь из самой после-

довательности и формулировать самостоятельно. В таком виде, т. е. в виде смысловой закономерности чередования прерывных и непрерывных моментов, становление уже гораздо ближе к пределу, который и надо определить, как б) *структуру, или комбинацию, прерывности и непрерывности.*

б) Еще один шаг, и мы получаем точное определение предела. Упомянутая структура, или комбинация, вполне имманентна потоку становления. Но она не только имманентна. Имманентизм становлению есть все же некоторая распределенность по этому потоку становления, распространенность в течение потока. Но подобно тому как упомянутая структура прерывностей и непрерывностей извлечена из глубины становления и совлечена с него в некую самостоятельную данность, так необходимо из этой самостоятельно данной структуры тоже извлечь ее идею и смысл и не только извлечь, но и совлечь в новую самостоятельную данность. Всякая фигурность содержит ведь свое целое или свою целость в каждой своей точке, так что сама-то по себе эта цельность имеет вполне определенное и самостоятельное значение. Нужна ли для конструкции категории предела та фигурность со всеми подробностями своего строения? Конечно, не нужна. Надо сжать эту структуру до максимальной плотности — так, чтобы она превратилась вместо развернутого вида в одну заряженную смысловую точку, в одно напряженное задание, готовое излиться каждое мгновение вовне и предопределить собою числовую последовательность — любой длительности и протяжения. Структура непрерывно-прерывного ряда должна исходить из одной напряженной точки, которая не есть уже ни просто прерывность, ни просто непрерывность, но 7) *закон и происхождение, рождающее [лоно] и перво-принцип, осмысливающий собою развитую непрерывно-прерывную структуру становления.*

5. Это, наконец, и есть предел в математическом смысле слова. И из этого анализа вполне выясняется диалектическое место предела. Первый из указанных пунктов, *становление*, заставляет признать существенную роль категории *отрицания*, вернее, алогически становящейся отрицательности. Второй пункт, *изменение*, вносит в становление антитезу внутреннего и внешнего, которая, в соединении с третьим пунктом, *непрерывностью*, свидетельствует о том, что с категорией отрицания тут ставится

в ближайшую связь именно иррациональность. Непрерывная величина, как мы знаем, и есть синтез внутреннего и внешнего в условиях иррациональной текучести этого синтеза. Иррациональность, стало быть, погружена здесь в стихию алогически становящейся отрицательности. Четвертый пункт, *внутренняя дробность*, свидетельствует об участии в категории предела — второго момента иррациональности (кроме чистого отрицания); и предел оказывается так же заинтересованным во втором диалектическом моменте иррациональности, во внутренней дробности, как и в первом, в чистой отрицательности. Пятый и шестой пункты из вышеупомянутых, т. е. *чередование непрерывности с прерывностью и фигурная структура этого чередования*, подчеркивают синтетическую природу предела и его категориальную самостоятельность, а седьмой, момент *перво-принципности*, доказывает, что речь идет об иррациональности в ее смысловом перво-источке, что предел есть перво-единство алогически и непрерывно становящейся числовой дробности. Отсюда и диалектическая формула предела.

Предел есть тождество внутренней дробности и внешней алогически становящейся отрицательности, данное как таковое в своем исходном перво-принципе. Или: предел есть иррациональность, данная в своем исходном перво-принципе. Или еще: предел есть закон (или метод) построения иррациональности, потенциальная закономерность иррациональной стихии.

§ 103. Продолжение.

Если мы пересмотрим основные определения в математике, относящиеся к учению о пределах, то нетрудно будет убедиться, что математика здесь также работает категориями, которые только что были развиты, хотя и формулирует их, конечно, чисто математически, а не диалектически.

1. Прежде всего стоит обратить внимание на интересное определение *точки скученности*, или *точки сгущения*. Для этого нужно знать, что такое окрестность. Если мы имеем некую точку A и имеем некую величину ϵ , могущую стать меньше любой заданной величины, то интервал $A - \epsilon \dots A + \epsilon$ называется *окрестностью* точки A . Так вот, *точка A называется точкой сгущения множества, если в любой сколько угодно малой окрестности A лежит еще бесконечное количество точек.*