в ближайшую связь именно иррациональность. Непрерывная величина, как мы знаем, и есть синтез внутреннего и внешнего в условиях иррациональной текучести этого синтеза. Иррациональность, стало быть, погружена здесь в стихию алогически становящейся отрицательности. Четвертый пункт, *внутренняя дробность*, свидетельствует об участии в категории предела — второго момента иррациональности (кроме чистого отрицания); и предел оказывается так же заинтересованным во втором диалектическом моменте иррациональности, во внутренней дробности, как и в первом, в чистой отрицательности. Пятый и шестой пункты из вышеупомянутых, т. е. *чередование непрерывности с прерывностью и фигурная структура этого чередования*, подчеркивают синтетическую природу предела и его категориальную самостоятельность, а седьмой, момент *перво-принципности*, доказывает, что речь идет об иррациональности в ее смысловом перво-истоке, что предел есть перво-единство алогически и непрерывно становящейся числовой дробности. Отсюда и диалектическая формула предела.

Предел есть тождество внутренней дробности и внешней алогически становящейся отрицательности, данное как таковое в своем исходном перво-принципе. Или: **предел есть иррациональность, данная в своем исходном перво-принципе.** Или еще: **предел есть закон (или метод) построения иррациональности, потенциальная закономерность иррациональной стихии.**

§ 103. Продолжение.

Если мы пересмотрим основные определения в математике, относящиеся к учению о пределах, то нетрудно будет убедиться, что математика здесь также работает категориями, которые только что были развиты, хотя и формулирует их, конечно, чисто математически, а не диалектически.

1. Прежде всего стоит обратить внимание на интересное определение *точки скученности*, или *точки сгущения*. Для этого нужно знать, что такое окрестность. Если мы имеем некую точку A и имеем некую величину ε, могущую стать меньше любой заданной величины, то интервал $A-\varepsilon...A+\varepsilon$ называется *окрестностью* точки A. Так вот, *точка A называется точкой сгущения множества, если в любой сколько угодно малой окрестности A лежит еще бесконечное количество точек.*

Так, для последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}...$ точкой сгущения является 0, а для последовательности, содержащей 0 и 1, а также числа, построенные по закону $\frac{1}{n}$ и $1+\frac{1}{n}$ (при n целом и положительном), существуют две точки сгущения, а именно 0 и 1, в то время как числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ будут здесь т. н. изолированными точками, т. е. в окрестности которых совсем нет точек данной последовательности. Это скромное на первый взгляд утверждение о точках сгущения по своему логическому составу предполагает решительно все те категориальные моменты предела, которые мы выше установили. Тут и антитеза внутреннего и внешнего, п[е]рекрытие окрестности внешним точечным слоем; тут и непрерывно алогически становящаяся отрицательность — в переходе от одной точки бесконечного множества к другой на исчезающе[156] малом расстоянии; тут и внутренняя дробящая сила — в допущении возможности бесконечного количества точек при прогрессирующем уменьшении окрестности; тут и определенная закономерность строения этого алогического скопления бесконечности — в расположенности точек на исчезающе малых расстояниях. Последнее — смысловая закономерность бесконечного скопления точек — в понятии точки скученности еще не так развито и поставлено, как в [прежних] математических дефинициях, относящихся к пределу. Однако уже и здесь эта специфическая закономерность, порождаемая пределом, чувствуется вполне ощутительно.

Стоит только обратить внимание на то, что *точка скученности в случае, когда она для данного бесконечного множества является единственной и потому и предел этого бесконечного* ⟨...⟩,— как уже становится ясной вся важность этих рассуждений для понимания категориальной структуры предела вообще.

2. Более резко этот момент смысловой закономерности ряда, стремящегося к пределу, выражен в известной теореме Больцано — Вейерштрасса. Она гласит: «Каждое ограниченное бесконечное множество точек имеет по крайней мере одну точку скученности». Собственно, тут можно говорить и о неограниченном множестве, так

как ничто не мешает находить еще новые точки и даже бесконечное их количество — в окрестности той точки, которая именуется бесконечностью. Другими словами, бесконечную точку тоже нужно считать точкой сгущения. Итак, имеется ли ограниченное или неограниченное множество, в нем всегда есть хотя бы одна точка сгущения, или скученности. Но что это значит? Это значит прежде всего, что тут мы представляем себе перекрытие некоей области, или интервала, бесконечным количеством точек; и, таким образом, уже по одному этому здесь у нас двухплановая структура, не считая момента, объединяющего эти два количественные плана,— т. е. опять тут все та же антитеза внутреннего и внешнего. Эта антитеза заполнена здесь непрерывным и алогическим становлением. И вообще тут обнаруживаются все те моменты, которые нами уже получены. Но тут гораздо ярче, чем в предыдущем понятии точки скученности, выражен момент структурного построения бесконечного множества. А именно, оказывается, что только тогда точки могут оказаться входящими в бесконечное множество, когда все они *притягиваются к каким-нибудь центрам* или хотя бы только к одному такому центру. Этот центр, или эта точка сгущения, определяет собою специальную структуру взаимного расположения точек, т. е. *такую структуру, когда расстояния между точками исчезающе малы.* Это есть вполне определенная структура множества; и вот она-то и предопределена пределом. Предел как бы издали располагает особым образом точки бесконечного множества; он есть как бы принцип построения того числового поля, которое именуется данным бесконечным множеством.

3. Еще ярче эта принципная природа предела выражена в *признаке Коши для сходимости ряда*, т. е. для наличия в данной последовательности предела. Как известно, признак, установленный Коши для сходимости ряда, гласит следующее. Пусть мы имеем последовательность

$$\langle u_1, u_2, \dots u_N \rangle,$$

где $[N]$ может стать сколько угодно большой величиной. Если абсолютное значение любой разницы $\langle u_n - u_m \rangle$ может стать меньше сколь угодно малого количества $[\varepsilon]$, то упомянутый ряд сходится. Или, точнее, как бы мало ни было [ε], должно существовать такое [N], чтобы для всякого $\langle n > N \rangle$ и для всякого $\langle m > N \rangle$ было

$$\langle /u_n - u_m/ < \varepsilon \rangle.$$

Это условие необходимо и достаточно для сходимости ряда. Предел, стало быть, превращает последовательность чисел в такую упорядоченность, что между двумя его достаточно далекими от начала членами разность может стать менее любой заданной величины. Он создает последовательность как некую текучую иррациональность, распределенную так или иначе в зависимости от числовой величины предела. Упомянутая закономерность и перво-принципность предела на учении Коши о признаке сходимости заметна еще ярче, чем в предыдущих примерах.

4. Особая, специфическая структура сходящегося ряда, выраженная как некий определенный принцип, хорошо,— пожалуй, даже лучше, чем у Коши,— формулирована в признаке сходимости Даламбера. Как известно, по Даламберу, сходимость будет в случае, когда предел отношения между соседними членами ряда $\langle u_{n+1} \rangle$ и $\langle u_n \rangle$ при $\langle n \to \infty \rangle$, будет выражаться правильной дробью

$$\langle \lim_{n \to \infty} / \frac{u_{n+1}}{u_n} / = q \rangle;$$

при $\langle q < 1 \rangle$ — ряд сходится; когда $\langle q > 1 \rangle$ — ряд расходится; когда $\langle q = 1 \rangle$ — ряд неопределенный в смысле сходимости. Тут дано представление о подвижном отношении, пробегающем по ряду и рисующем его определенную полную структурность, зависящую от характера предельной устремленности этой структуры.

§ 104. Переход к мнимости.

1. Теперь мы подошли к огромному и принципиальнейшему вопросу, который до сих пор не нашел для себя почти никакой философской формулировки и остается по настоящий день чисто математической теорией, определяемой только одними математическими интуициями, без всяких признаков логической обработки. Тем не менее, ⟨...⟩ философское понимание этой области имеет фундаментальное значение для диалектического построения всей математики. И это есть проблема *мнимых (комплексных) величин.*