было [ε], должно существовать такое [$N$], чтобы для всякого $\langle n > N \rangle$ и для всякого $\langle m > N \rangle$ было

$$\langle /u_n - u_m/ < \varepsilon \rangle.$$

Это условие необходимо и достаточно для сходимости ряда. Предел, стало быть, превращает последовательность чисел в такую упорядоченность, что между двумя его достаточно далекими от начала членами разность может стать менее любой заданной величины. Он создает последовательность как некую текучую иррациональность, распределенную так или иначе в зависимости от числовой величины предела. Упомянутая закономерность и перво-принципность предела на учении Коши о признаке сходимости заметна еще ярче, чем в предыдущих примерах.

4. Особая, специфическая структура сходящегося ряда, выраженная как некий определенный принцип, хорошо,— пожалуй, даже лучше, чем у Коши,— формулирована в признаке сходимости Даламбера. Как известно, по Даламберу, сходимость будет в случае, когда предел отношения между соседними членами ряда $\langle u_{n+1} \rangle$ и $\langle u_n \rangle$ при $\langle n \to \infty \rangle$, будет выражаться правильной дробью

$$\langle \lim_{n \to \infty} / \frac{u_{n+1}}{u_n} / = q \rangle;$$

при $\langle q < 1 \rangle$ — ряд сходится; когда $\langle q > 1 \rangle$ — ряд расходится; когда $\langle q = 1 \rangle$ — ряд неопределенный в смысле сходимости. Тут дано представление о подвижном отношении, пробегающем по ряду и рисующем его определенную полную структурность, зависящую от характера предельной устремленности этой структуры.

**§ 104. Переход к мнимости.**

1. Теперь мы подошли к огромному и принципиальнейшему вопросу, который до сих пор не нашел для себя почти никакой философской формулировки и остается по настоящий день чисто математической теорией, определяемой только одними математическими интуициями, без всяких признаков логической обработки. Тем не менее, ⟨...⟩ философское понимание этой области имеет фундаментальное значение для диалектического построения всей математики. И это есть проблема *мнимых (комплексных) величин.*

Диалектика имеет целью конкретное логическое конструирование предмета. Диалектика числа должна дать адекватно логическую конструкцию числа—со всей конкретностью его построения. Конкретность же чего бы то ни было возникает только тогда, когда дан и осмысленно обоснован его реальный образ, его оформление в смысле живого предметного лика.

Те три типа числа, которые возникают на почве внешнего гипостазирования числа (положительное, отрицательное и нуль), равно как и три типа, возникающие из внутреннего гипостазирования (целое, дробное, бесконечное), не могут претендовать на полную конструкцию смыслового образа числа. Эти числовые типы принципиально односторонни. Разумеется, в них не может не быть своего собственного оформления и своего собственного, специфического лика, ибо иначе они не были бы и самими собой. Однако тут нет конкретного оформления с точки зрения отражения в смысловой сфере полного лика числа.

Только там, где в числе привлечены сразу и его внутренняя и его внешняя стихия, может быть впервые поставлен вопрос о конкретном лике, или образе, числа. Это элементарно очевидно. Только с привлечением внутреннего содержания числа к его внешне субстанциальной данности может начаться рассуждение о *границе* числа, об *очертаниях* числа, о его конкретном *образе* и форме. Но и тут не всякая конструкция в одинаковой мере построяет конкретный образ числа.

2. В рациональном числе, там, где впервые зародилась антитеза внутреннего и внешнего, граница между этим внутренним и внешним не может, конечно, не наличествовать (иначе не было бы и самой антитезы), но она тут только *присутствует, наличествует, существует, а не положена диалектически.* Рациональное число уже предполагает, что такая граница есть, но пользуется оно этой границей как некоей абсолютной данностью, положенной неизвестно кем и чем и имеющей неизвестное происхождение. В понятии рационального числа ровно ничего не говорится о том, какова эта граница и какие смысловые категории затронуты для ее порождения. В рациональном числе 1) положена сама эта антитеза и 2) дана эта антитеза на стадии неразвернутого тезиса, т. е. когда внутреннее и внешнее прикреплены одно к другому в качестве отвлеченных принципов и внешне[е] еще

не расползлось в бесконечность становления и не увлекло с собою внутренней структуры числа. Граница, таким образом, здесь вполне на месте, но о ней ничего не известно, кроме того, что она существует. В рациональном числе фигурирует только самый *факт* границы, и, как всякий факт, он есть тут абсолютная данность, еще не возведенная на степень понятия, не вобранная в сферу чистого смысла.

Иррациональное число также немыслимо без антитезы внутреннего и внешнего, без различения внутреннего и внешнего и, стало быть, без наличия границы между ними, т. е. немыслимо без границы вообще. Однако и здесь нельзя говорить о том, что граница положена как смысловая категория. Единственное отличие иррациональной границы от рациональной — то, что здесь она дана в становлении, в движении. В рациональном числе граница существует между взаимно прикрепленными сторонами, внутренней и внешней. В иррациональном же числе внешнее инобытие перешло в становление и увлекло с собою внутреннюю стихию, отчего последняя утеряла свою целостность и превратилась в дробность. Но эта становящаяся граница здесь так же не фиксирована категориально, как и неподвижная граница в рациональном числе. Она предполагается здесь уже данной и используется как данность, хотя и неизвестен тот смысловой акт, в результате которого она идеально возникла.

3. Однако в пределах иррациональных структур уже намечается разная степень конкретности границы и оформления. В чисто иррациональном числе граница только становится, и больше ничего о ней тут не известно. Но в понятии непрерывности эта становящаяся граница внутреннего сливается с самим числом и, таким образом, полагается вместе с ним, полагается в меру его собственной положенности. Раньше граница вовсе не была положена, а бралась готовой, как положенная неизвестно каким смысловым актом. В непрерывной величине она слита с числом настолько интимно, что ее становление оказывается уже становлением самого числа, а положенность числа оказывается уже и положенностью ее самой. В непрерывности стихия границы, т. е. сама очерченность, оформленность, вошла во внутреннее содержание числа и объединилась с ним, и получилась некая оформленность, или образность, но — пока на [157] стадии

текучего и алогического, сплоченно-неразличенного становления. Если бы граница, очерченность, образность были положены как такие, мы имели бы категориальную структуру границы, и диалектика числа как конкретного смыслового образа была бы в основном закончена. Но тут граница и очерченность положены вместе с самим числом, и потому предстоит еще диалектика разделения этих двух моментов, прежде чем будет получена чистая и конкретная смысловая фигурность числа.

В непрерывной величине фигурность числа положена вместе с самим числом и алогически расплылась в нем. Прерывная величина вносит различения в эту алогическую растворенность фигуры числа в самом числе. В категории же предела впервые останавливается это бесконечное алогическое стремление и фиксируется как некая ставшая структура. Оформленность и образность, вошедшие в непрерывной и прерывной величине внутрь структуры и придавшие ей определенную смысловую содержательность (пока на стадии алогического становления), в понятии предела впервые фиксируются в своей едино-совокупной положенности, в своей ставшей, а не просто становящейся смысловой данности. Оттого предел есть ставшая фигурность внутреннего и внешне положенного числа, пребывающего во взаимно несоизмеримом подвижном алогизме. Предел есть положенность такой границы, такой структуры и числового очертания, когда этими границами и структурами определяется алогический процесс становления числа, по существу своему бесконечный. Непрерывность и прерывность слиты здесь в один процесс стремления выразить некую общую структуру становления, и эта структура и есть граница, предел — и в общем, и в специально-математическом смысле этого последнего слова.

4. Итак, мы получили до сих пор оформление числа, положенное в неразрывном единстве с самим числом, с его внутренно-внешним содержанием. Разная степень конструкции этого оформления зависит от разной степени конкретности самого числа. Ниже (§ [ ]) мы увидим на трех типичных пределах — ⟨...⟩ как эта нарастающая конкретность числа, взятого вместе с его фигурностью, чувствуется вполне осязательно. Если предел ⟨...⟩ есть стихия числа (единицы) в его общеэнергийной выявленности, где сама явленность, т. е. сама очерченность и фигурность, еще пока растворена во внутренно-внешнем

содержании числа и где нет раздельного фиксирования формы как таковой и числа как такового, то в пределе ⟨...⟩ начинается, рождается, а в пределе ⟨...⟩ завершается и наглядно рисуется такая оформленность числа, которая хотя и пребывает в полной с ним неразрывности, но уже осязательно на нем обрисовывается, выпукло на нем выступает и оказывается в значительной мере доступной для изолированного созерцания. В понятии ⟨...⟩ дано наиболее наглядно это совокупное содержание границы величины и ее внутреннего содержания — в конкретно выявленном взаимоотношении того и другого. Здесь наиболее зрелый плод совокупного полагания вещи вместе с ее смысловой образностью и очерченностью.

5. Следовательно, остается только отбросить то, ради чего данная образность есть образность, и мы получим уже чистую самостоятельную числовую образность, созерцаемую не на чем-нибудь другом и не в отношении чего-нибудь другого, а вполне самостоятельно, образность как таковую, как новую и самодовлеющую субстанцию. В категориях непрерывности, прерывности и предела числовая образность была хотя и положена, но эта положенность была связана здесь с формой и степенью положенности самого числа и потому получала не общую, а частную, вполне специфическую структуру. Это мешало числовой образности быть свободной структурой, и ее нельзя было вписать в таблицу основных математических категорий как самодовлеющую. Она тут пока еще играет второстепенную роль, и значение ее вполне прикладное. Но исключим из этого едино-совокупного обстояния образа-вещи чúсла его «вещественную» стихию и сосредоточимся на образности как таковой, на образности как самоцели, и — мы получаем уже совершенно новую категорию числа, вполне свободную и самоцельную; и тут уже не будет антитезы внутреннего и внешнего как основного и единственного фактора (при котором граница была бы чем-то второстепенным, хотя и само собою разумеющимся), но тут будет обратная тому ситуация: основную и единственную роль играет здесь сама граница, сама образность и оформление, а антитеза внутреннего и внешнего оттесняется здесь назад и начинает играть роль только смыслового фона, совершенно необходимого и очень нужного, но второстепенного и как бы окаймляющего выпукло данную и резко

выступившую вперед очерченность и фигурную сконструированность.

Число, данное как *чисто смысловая образность и фигурность числа*, как *отделенная от его внутренно-внешнего содержания чистая его структурность*, и есть *мнимое*, или *комплексное*, число.

К анализу этой глубочайшей категории математики мы теперь и обратимся.

**§ 105. [с)] Мнимая (комплексная) величина. Общее понятие.**

Мнимая величина может быть рассматриваема с разнообразных точек зрения, и в самой математике дается отнюдь не какое-нибудь одно-единственное ее определение, хотя, безусловно, все эти различия являются только разными сторонами одной и той же диалектической конструкции, и надо уметь их так связать, чтобы действительно получалась единая конструкция.

1. Одно из самых первых и элементарных определений мнимой величины — это то, что обыкновенно обозначается как $i$ и представляет собою *квадратный корень из отрицательной единицы*, $\sqrt{-1}$. Это вполне слепое определение мнимой величины, получаемое как необходимое завершение понятия числа, совершенно не раскрыто в математике по существу; и, кажется, можно с полным правом сказать, что никто ровно ничего не понимает в этом выражении $\sqrt{-1}$. В руководствах по математике эта мнимая величина трактуется просто как необходимое следствие из желания проводить любые действия над любыми величинами. Если бы мы не извлекали квадратного корня из отрицательных величин, то в силу этого отпали бы весьма значительные операции, появляющиеся тем не менее вполне естественно, в порядке самых обыкновенных вычислительных приемов. Операция извлечения корня из отрицательной величины появляется вполне естественно, и поэтому волей-неволей приходится считаться с нею. Но что она значит, что это, собственно, значит — извлечь квадратный корень из отрицательного числа — этого, можно сказать, ровно никто не знает. И потому это пресловутое $i$ вводят нехотя, как бы стыдясь столь неприличной вещи, и если вводят, то сейчас же стремятся избавиться от этого $i$ и перейти к «вещественным» числам и операциям.