разнообразных, и в особенности в противоположных, направлениях. Максимальное изменение, которое тут может произойти с числом,— это вовлечение его в стихию чистого становления, но последнее тут всегда дано именно в чистейшем, беспримесном виде, как голый принцип, так что рождающаяся здесь иррациональность есть только результат извлечения корня.

Итак, сказать ли, что число сводимо к целому числу, или сказать, что оно хранит в себе одномерно-инобытийную потенцию,—это действительно есть одно и то же.

7. Так как мы рисуем сейчас алгебраическое число как некий общий тип числа, то нам нет нужды входить в рассмотрение того, что в математике называется алгебраической областью или алгебраическим полем (его называют также алгебраическим телом), хотя только эта отрасль математики показала бы нам подробно структуру алгебраических чисел. Мы не будем здесь делать этого, тем более что «арифметической теории алгебраических чисел» нам еще придется коснуться в своем месте.

8. А теперь на очереди тот тип числа, который является диалектической противоположностью алгебраического числа. Этот новый тип будет тоже выразительным типом, как и алгебраическое число, но здесь мы найдем выражение совсем иной структуры. Из предыдущего сама собой напрашивается идея построить такое число, которое бы, храня в себе свое инобытие (т. е. являясь выразительным), содержало его не в виде простой, одномерной положенности, но развертывала бы его в сложную, многомерную структуру. То становление, которое приносится инобытием, в свою очередь должно вступать в новое становление, получать усложненность, зависящую от привнесения в него еще новых, не зависящих от него моментов. Такая иррациональность уже не может равномерно расстилаться как результат простого извлечения корня. Она сама перешла здесь в свое инобытие, т. е. в нее вплетены моменты, не зависящие от извлечения корня и—тем более—не зависящие ни от какой другой арифметической операции. Такая иррациональность называется *трансцедентной*; и такие числа, данные в своем соотношении с многомерно-становящимся инобытием, называются *трансцедентными.*

К анализу этой труднейшей и темнейшей из всей математики числовой категории мы сейчас и приступим.

§ 110. Трансцедентное число (диалектическая категория).

1. Обычное определение трансцедентного числа в математике гласит: трансцедентное число есть то, которое не является корнем никакого уравнения с целыми коэффициентами. Это определение дается по методам того восточного человека, который, желая описать Карапета, указывает на Аванеса и говорит: «Совсем не похож!» Предоставим подобные методы кафедральным академикам и попробуем сами разобраться в этой проблеме, базируясь на тех весьма немногочисленных математических исследованиях, которые относятся к этой области. Но сначала формулируем трансцедентное число как общефилософскую категорию, как она получается в общедиалектическом контексте,—чтобы не пото-

нуть в математической схоластике и формализме,— а потом уже посмотрим, что́ дает в этом смысле сама математика.

2. Итак, трансцедентное число есть число, соотнесенное со своим инобытием в условиях развернутости (или многомерности) этого инобытия. Уточним это общее определение, полученное еще в конце предыдущего параграфа.

a) Самым главным или по крайней мере исходным пунктом этого определения является соотнесенность числа с инобытием. Следовательно, берем какое-нибудь (алгебраическое) число и берем его отношение к его «инобытию», т. е. к какому-нибудь другому числу. Это *отношение двух чисел* должно быть все время в центре нашего внимания.

b) Это отношение, однако, должно быть нами взято не просто как таковое. Наше определение трансцедентного числа гласит, что инобытие, привлекаемое здесь, само переходит в свое инобытие, в свое становление. Следовательно, и все только что взятое нами отношение двух чисел также должно перейти в свое инобытие, в свое становление. А это значит, что оно *должно осложниться* каким-нибудь действием или *рядом действий*, в результате чего оно потерпело бы ту или иную деформацию.

c) Достаточно ли этого? Если мы остановились бы только на этом, то у нас ничего и не было бы, кроме какого-то отношения двух целых чисел, деформированного той или иной арифметической операцией. Ни о какой трансцедентности не было бы ни слуху ни духу. В чем же дело? Для трансцедентности числа надо, чтобы *само* число вмещало в себя эту свою многомерную соотнесенность с инобытием. Значит, по меньшей мере эта соотнесенность *должна быть прибавлена к самому числу*. Мы должны рассматривать *само* число и *в нем самом* находить его соотнесенность с инобытием. Не может быть так, что число существует где-то само по себе, а его соотнесенность с инобытием где-то в другом месте, отдельно. Тогда получилось бы просто два разных числа, и притом алгебраических (если не прямо арифметических), и больше ничего. Следовательно, для трансцедентности необходимо *сложить само число с его инобытийной соотнесенностью*.

d) Но не получим ли мы и в этом случае опять-таки то же самое алгебраическое (или арифметическое) число? Несомненно получим, если остановимся только на этом. Сумма двух алгебраических чисел есть опять число алгебраическое. Что же мы должны сделать еще новое, чтобы приблизиться к этой неуловимой числовой трансцедентности? Обратим внимание на момент *развернутости* инобытия, о котором мы говорили. Философский (или, что то же, диалектический) смысл этого развертывания заключается не в чем ином, как в противополагании такому инобытию, которое дано как простой акт полагания. Что значит перейти в противоположность простого акта полагания? Это значит перейти в сплошно-неразличимый акт полагания, в алогическое *становление* акта полагания. Следовательно, наше инобытие, с которым соотносится изучаемое число, должно быть не просто ординарным актом, создающим ту или [иную] соотнесенность; и эта соотнесенность не должна быть чем[-то] устойчивым, как любое арифметическое отношение двух чисел, но она должна *уплыть в становление*, уйти в нерасчлененную даль все новых и новых становлений. А это значит, что и оба момента, из которых складывается эта соотнесенность, т. е. и первоначальное отношение данного числа к другому, и последующая модернизация этого отношения через приобщения к нему еще нового инобытия, *оба эти момента должны уйти в бесконечность становления*. Если этого не будет, наш принцип многомерной инобытийности останется только на стадии простого акта полагания, т. е. опять ничем не будет отличаться от принципа алгебраического числа. У нас будет введено новое инобытие в отношении старого, но это инобытие коснется только *содержания* старого инобытия; оно его единовременно и единообразно деформирует и тем самым только заменит одно арифметико-алгебраическое отношение другим, и больше ничего. А полнота диалектического противоположения требует, чтобы у нас выросла не только антитеза содержания первоначального отношения, но и антитеза самого его *факта*, антитеза самого *принципа* этого отношения. А тогда необходимо, чтобы и само первоначальное соотношение числа с его инобытием, и дальнейшая модернизация его на новое соотношение — *оба ушли в стихию становления*, и так как становление нерасчлененно и неопределенно, то и — в стихию неопределенного, *беспредельного* становления. Только тогда мы выполним задание, лежащее в основе диалектического отрицания инобытийности, характерной для алгебраического числа; и только тогда получим здесь действительно развернутое становление.

е) Указанное положение дела, однако, обязывает ко многому. *Всякая ли* бесконечность становления может иметься здесь в виду? Если мы будем без разбора, как попало, нагромождать одно становление за другим, то, во-первых, мы получим не что иное, как опять-таки арифметико-алгебраические числа, с тою только разницей, что их теперь будет бесконечное количество. А во-вторых, трансцедентного числа не получится еще и потому, что оно, как и всякое число, должно быть чем-то простым, а не распадаться на то или иное количество взаимно диспаратных операций. Эти операции могут им предполагаться, но тогда оно должно содержать имманентно своей структуре некий единообразный и простой *закон* этих операций. Напр., дробь $\frac{4}{5}$ предполагает не просто какое-то одно число, но это число усложнено привнесением определенной арифметической операции. Однако самая структура этой дроби содержит в себе вполне определенный *закон* этой операции. Трансцедентное число, предполагающее *бесконечное количество* тех или иных операций, должно *самой своей структурой* давать *закон*, по которому эти операции можно было бы развернуть. Совершенно не важно, что мы фактически не в состоянии произвести все эти операции. Имея *закон* развертывания этих операций, мы и не нуждаемся в производстве всех этих операций целиком. Мы можем остановиться где угодно; и если бы нам и было возможно произвести все эти бесконечные операции целиком, то мы из этого ровно ничего нового не получили бы. Такова важность обладания *законом* развертывания становления.

Этим законом развертывания становления для трансцедентного числа является понятие *предела*. Становление по сути своей, по характеру своего развертывания беспредельно. Но это не мешает ему иметь тот или иной предел, который характеризовал бы тот или иной *метод* данного становления. Беспредельность становления требует только, чтобы оно, если его рассматривать как таковое, нигде не останавливалось и чтобы тем самым не перестало быть самим собою и не перешло в ставшее. Но это значит только то, что предел становления не может наличествовать *в нем самом*. Если этот предел наличествует *вне* самого процесса становления и, следовательно, предопределяет не его абсолютные границы (остановку становления), а только лишь *характер и метод его развертывания*, то такому пределу становление нисколько не противоречит и даже, наоборот, от него-то и получает определенность своей структуры.

Итак, трансцедентное число должно быть *пределом* всех своих многомерно-инобытийных становлений или даже пределом объединения некоего алгебраического числа со всем его многомерно-инобытийным становлением.

2. Необходимо отметить, что только после введения этого последнего момента мы имеем право говорить об *энергийно-эманативной выраженности* трансцедентного числа. Когда шла речь о потенциальности алгебраического числа, то все дело упрощалось тем, что не нужно было реально производить никаких действий над этим числом или, точнее (поскольку в реальном производстве этих действий не нуждается также и трансцедентное число), не нужно было фиксировать реальный характер этих действий, а достаточно было указать только их общую арифметико-алгебраическую природу. Это и привело нас к тому, что мы просто постулировали одномерно-инобытийную соотнесенность как потенцию. В случае же трансцедентного числа мы, хотя и по-прежнему не нуждаемся в реальном производстве всех операций, все же, поскольку они реально предполагаются, должны иметь о них конкретное представление. А так как это последнее по содержанию и есть само определяемое нами число, то мы вынуждены в самом этом числе или, вернее, самим этим числом фиксировать закон, или метод, развертывания всех относящихся сюда операций. Вместе с тем и благодаря этому трансцедентное число оказывается не просто потенцией, но уже реальной мощью, *развернутой энергией всех своих инобытийных судеб* и даже, больше того, развернутой энергией всех своих инобытийных соотношений в сфере осуществления этих судеб. Трансцедентное число не только ушло в инобытие, оно ушло в бесконечную даль инобытия; и оно не просто как-то унеслось к своему инобытию, но определенным образом соотносится с инобытием решительно в каждый отдельный момент своего инобытийного существования; и оно не просто соотносится там и здесь в отдельные бесконечные моменты, но сразу отпечатлело на себе раз навсегда, однажды на всю вечность, все эти свои соотнесенности в сфере бесконечных скитаний, всю стихию непрерывно менявшейся самоориентации в беспредельных глубинах инобытийного становления. Оно есть мгновенно данное предображение всех своих вершинных судеб

в темной области инобытия, и оно — тот вечный предел, который объемлет в себе, и притом в одной точке, всю бездну возможных числовых самоотрицаний.

Это-то и называется *энергией* сущности, когда вся развернутая мощь этой последней не переходит реально и субстанциально в инобытие и не рассыпается, не умирает в нем, но пребывает вся собранной в одном нерасторгнутом мгновении, в одной неделимой точке, в одном никогда не достижимом для инобытия пределе, в одном бесконечно напряженном заряде, который ежемгновенно готов излиться в инобытие и заполнить его целиком, но не изливается, а пребывает в себе в своем абсолютном покое, в своей смысловой перегруженности. Это же свойство сущности можно назвать и ее *эманацией*, понимая под последней переход сущности в алогическое инобытие, но в такое инобытие, которое, будучи готово оплодотворить каждый момент инобытия, однако, пребывает в своей идеально-телесной собранности и в себе покоящейся вечности.

Таково трансцедентное число.

3. Легче проследить сущность трансцедентного числа на его эманативных функциях, взятых реально. Допустим, что эманация трансцедентного не остается в своей самозамкнутости, но реально изливается в инобытие, и спросим, что мы в этом случае должны назвать трансцедентным. Тут три вопроса: 1) что такое инобытие как результат эманации, 2) что такое трансцедентное как излившее эманацию и 3) каково отношение между тем и другим?

a) Что такое *инобытие как результат эманации*? Если бы трансцедентное никак не эманировало бы, то инобытие было бы чистым нулем. В самом деле, трансцедентное число вместило в себя все возможное инобытие; следовательно, на долю инобытия не осталось ничего, остался нуль. Но мы берем теперь трансцедентное в его реальной излиянности на инобытие. Что же именно тут изливается? Изливается само оно, трансцедентное. Но ведь оно — предел бесконечности. Значит, изливается сама бесконечность. А это значит, что инобытие из нуля становится бесконечностью. Если эту инобытийную бесконечность взять как таковую, непосредственно, забывая о ее связи с первоисточником, откуда она произошла, то она предстанет перед нами вполне самостоятельно, т. е. прежде всего как *положительная* бесконечность. Однако это было бы абстрактной точкой зрения на инобытийную бесконечность; это значило бы судить по поверхности, не заглядывая в глубину вещи. Итак, инобытийная бесконечность не есть бесконечность просто, но именно *инобытийная* бесконечность, т. е. бесконечность, инобытийная к той, первообразной, бесконечности, откуда она произошла. Это значит, что она, как *ино*-бытийная, есть *отрицательная* бесконечность.

b) Второй вопрос: что же такое трансцедентное число *после того, как оно излило из себя бесконечность*, ставшую инобытийной, отрицательной бесконечностью? Об этом можно было бы говорить путем ясного раскрытия того содержания, которое осталось в трансцедентном после эманирования бесконечности в инобытие. Но мы сейчас стоим на другой позиции. Мы забываем наше полное определение трансцедентного числа и хотим найти это число из обследования эманативных результатов трансцедентного. Мы не знаем, что такое это трансцедентное число, и назовем его каким-нибудь x или ω. И мы только формально спрашиваем: что делается с этой ω, если мы заставим ее реально излить из себя бесконечность в инобытие? Очевидно, в трансцедентном нечто останется, так как излившееся есть только бесконечность, а трансцедентное есть вовсе не просто бесконечность. Это такая бесконечность, которая вместила в себя все свое инобытие, и притом многомерное инобытие, охвативши и себя и его в некоем целостном, покоящемся пределе. Но, повторяю, не станем пока входить в категориальную структуру того, что в трансцедентном «осталось». Мы просто исключим из некоей гипотетической ω отношение некоего числа к бесконечности. Ведь трансцедентное, сказали мы, эманировало из себя бесконечность. Следовательно, включая в себя свою многоразличную соотнесенность с инобытием (и притом с бесконечным инобытием), оно после эманирования бесконечности должно исключить из себя отношение к этой бесконечности. Раз бесконечность оттуда излилась в инобытие, следовательно, исчезло там и это простое взаимоотношение с бесконечностью. Это и все. Но тут и возникает самый главный вопрос.

с) *Каково же отношение между трансцедентным*, излившим из себя бесконечность в инобытие, *и самим этим инобытием*, ставшим бесконечностью, и, показано выше, отрицательной бесконечностью? Тут волей-неволей придется коснуться и категориального раскрытия того, что осталось в трансцедентном после исключения из него соотнесенности с бесконечным. Спросим себя: сделалось ли оно от этого менее бесконечным, т. е. может ли оно стать от этого конечным? Разумеется, нет, потому что трансцедентное есть такая бесконечность, которая охватывает все свои многомерно-инобытийные судьбы в пределе. Это значит, что оно может порождать из себя целую бесконечность разных инобытий-бесконечностей и все же от этого не изнурится. Но тогда что же это такое — «оставшееся» в трансцедентном после эманирования из него бесконечности? Раз мы исключили отсюда соотнесенность с инобытийной бесконечностью, то, очевидно, в нем останется *та же самая мощь бесконечных эманаций*, но только, ввиду произведенного исключения, *мы не будем эту мощь относить к какому-нибудь инобытию, а будем брать ее как таковую*, в чистом виде. После произведенного исключения в трансцедентном останется только *самая способность вечного порождения*, останется бесконечная мощь бесконечных эманаций, бесконечная мощь бесконечных самовоплощений, или бесконечного роста, или иначе — *бесконечная степень бесконечности.*

Определивши так «остаток», спросим себя опять: в каком же отношении находятся между собою этот «остаток» и отрицательно-инобытийная бесконечность? Что нужно сделать с этой отрицательной бесконечностью, чтобы превратить ее в тот «остаток», который образовался в трансцедентном? И что нужно сделать с этим «остатком», чтобы превратить его в отрицательную бесконечность? Очевидно, *и в том и в другом случае надо опять проделать бесконечный процесс*, в первом случае, чтобы дорасти до трансцедентного «остатка», во втором случае, чтобы умалиться до отрицательной бесконечности. Если есть действительно трансцедентное число, то, даже исключивши из него его соотнесенность с бесконечностью, мы все же получаем из него нечто такое, до чего отрицательное инобытие должно дорастать еще целую бесконечность времени. Во всяком трансцедентном всегда содержится так или иначе бесконечность *в бесконечной* степени, ибо мы ведь так и определяем трансцедентное: оно содержит в себе 1) инобытие, 2) инобытие инобытия и 3) то и другое как бесконечности в пределе. Значит, это всегда есть бесконечность, бесконечное число раз повторившая себя в себе. Поэтому, извлекая из нее простую «одномерную» бесконечность, мы всегда найдем, что эту простую бесконечность надо еще возвысить в бесконечную степень, чтобы она сравнялась с трансцедентным числом.

4. Следовательно, результат наших поисков трансцедентного числа таков. *Если по исключении из некоего числа ω соотнесенности с бесконечным оно все же в бесконечной степени превосходит отрицательную бесконечность, то число ω — трансцедентное число.*

Теперь обратимся к тому, что дает математика.

§ 111. Трансцедентное число (математическая конструкция).

1. История математического исследования трансцедентных чисел весьма несложная. Хотя с трансцедентными числами и математики оперировали издавна, но до 40-х годов прошлого века сущность этого типа числа совсем не изучалась. Только в 1844 г. французский математик Liouville впервые установил достаточный (хотя все еще не необходимый) признак трансцедентности числа. Он же доказал, что число *e*, основание натуральных логарифмов, не может быть корнем никакого квадратного или биквадратного уравнения с целыми коэффициентами *. Эрмит в 1873 г. доказал трансцедентность *e* на основании т. н. эрмитовского интегрального тождества **, применяя свой громоздкий аппарат (впоследствии упрощенный ***). Только в 1882 г. Линдеман **** доказал трансцедентность π, а в 1885 г. Вейерштрасс *****. значительно упростил это доказательство, сделавши к тому же вывод о трансцедентности тригонометрических функций (Sinω, если ω — алгебраическое число) ******. Кроме того, в 70-х годах Г. Кантор дал замечательно простое доказательство существования трансцедентных чисел вообще *******. Он установил два тезиса: 1) множество всех действительных чисел имеет мощность континуума, и 2) множество всех алгебраических чисел есть счетное множество. Отсюда сам собой получа-

* Journal des Mathematiques purget appliques. T. XV и XVI (1-я сер.).

** Contel Rendus, 1873, vol. 77, стр. 18—24, 74—79, 226—233, 285—293, а также в Собр. соч. 1912. Т. III, 150 слл.

*** *Гильберрем.*— Mathem. Annal. 1893. Т. 43.

**** Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1882, 679 и Mathem. Annal. 1882. 20, 213.

***** Sitz. d. Berl. Akad. 1885.

****** Хорошее изложение разных доказательств — у *К. А. Поссе.* О трансцедентности чисел *e* и π. Известия Технологического Института. 1894.

******* Crelles Journ. T. 77. 1873.