в первом случае, чтобы дорасти до трансцедентного «остатка», во втором случае, чтобы умалиться до отрицательной бесконечности. Если есть действительно трансцедентное число, то, даже исключивши из него его соотнесенность с бесконечностью, мы все же получаем из него нечто такое, до чего отрицательное инобытие должно дорастать еще целую бесконечность времени. Во всяком трансцедентном всегда содержится так или иначе бесконечность *в бесконечной* степени, ибо мы ведь так и определяем трансцедентное: оно содержит в себе 1) инобытие, 2) инобытие инобытия и 3) то и другое как бесконечности в пределе. Значит, это всегда есть бесконечность, бесконечное число раз повторившая себя в себе. Поэтому, извлекая из нее простую «одномерную» бесконечность, мы всегда найдем, что эту простую бесконечность надо еще возвысить в бесконечную степень, чтобы она сравнялась с трансцедентным числом.

4. Следовательно, результат наших поисков трансцедентного числа таков. *Если по исключении из некоего числа* ω *соотнесенности с бесконечным оно все же в бесконечной степени превосходит отрицательную бесконечность, то число* ω*—трансцедентное число.*

Теперь обратимся к тому, что дает математика.

§ 111. Трансцедентное число (математическая конструкция).

1. История математического исследования трансцедентных чисел весьма несложная. Хотя с трансцедентными числами и математики оперировали издавна, но до 40-х годов прошлого века сущность этого типа числа совсем не изучалась. Только в 1844 г. французский математик Liouville впервые установил достаточный (хотя все еще не необходимый) признак трансцедентности числа. Он же доказал, что число *e*, основание натуральных логарифмов, не может быть корнем никакого квадратного или биквадратного уравнения с целыми коэффициентами *. Эрмит в 1873 г. доказал трансцедентность *e* на основании т. н. эрмитовского интегрального тождества **, применяя свой громоздкий аппарат (впоследствии упрощенный ***). Только в 1882 г. Линдеман **** доказал трансцедентность π, а в 1885 г. Вейерштрасс *****. значительно упростил это доказательство, сделавши к тому же вывод о трансцедентности тригонометрических функций (Sinω, если ω—алгебраическое число) ******. Кроме того, в 70-х годах Г. Кантор дал замечательно простое доказательство существования трансцедентных чисел вообще *******. Он установил два тезиса: 1) множество всех действительных чисел имеет мощность континуума, и 2) множество всех алгебраических чисел есть счетное множество. Отсюда сам собой получа-

* Journal des Mathematiques purget appliques. T. XV и XVI (1-я сер.).

** Contel Rendus, 1873, vol. 77, стр. 18—24, 74—79, 226—233, 285—293, а также в Собр. соч. 1912. Т. III, 150 слл.

*** *Гильберрем.*—Mathem. Annal. 1893. T. 43.

**** Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1882, 679 и Mathem. Annal. 1882. 20, 213.

***** Sitz. d. Berl. Akad. 1885.

****** Хорошее изложение разных доказательств—у *К. А. Поссе.* О трансцедентности чисел *e* и π. Известия Технологического Института. 1894.

******* Crelles Journ. T. 77. 1873.

ется вывод, что алгебраические числа не заполняют собою всего континуума вещественных чисел и что должны существовать еще и не алгебраические, хотя все-таки действительные числа. Эти вещественные, но не алгебраические числа и есть трансцедентные числа, причем [их] бесконечно больше, чем алгебраических. К этому учению можно было бы, конечно, добавить, что все трансцедентные числа тоже еще не составляют континуума, а образуют опять только счетное множество (что легко выводится из счетности коэффициентов дифференциального уравнения для каждого данного n-го положения трансцедентного числа, разлагаемого в алгебраический ряд). Поэтому должны существовать еще какие-то особые числа для заполнения всего вещественного континуума. Эти числа назвали *гипертрансцедентными*, но, кажется, до последнего дня [о них] ничего не сказано ясного.

Кроме указанных авторов заслуживают упоминания в интересующей нас проблеме только три автора, все уже XX века. Это Э. Борель*, Д. Д. Мордухай-Болтовский** и А. Ф. Гельфонд***.

Несмотря на то что вся эта литература не очень обширна, дать логический анализ всех этих учений можно только в большом специальном исследовании. Мы извлечем отсюда только наиболее принципиальные установки, чтобы вышеизложенная философия трансцедентного числа не повисла, в математическом смысле, в воздухе. А именно, 1) мы рассмотрим признак Лиувилля для трансцедентности числа. Затем 2) мы дадим характеристику главнейших представителей этого числа, т. е. Неперова числа e и числа π. При этом 3) придется коснуться и некоторых трансцедентных функций (к которым относятся прежде всего показательная, логарифмическая и тригонометрические), хотя специальному обследованию они должны быть подвергнуты, конечно, не в арифметике. Наконец, 4) огромный логический интерес представляет проблема взаимоотношения общетрансцедентальных, алгебраических (в частности, комплексных) и тригонометрических функций и чисел.

2. а) Итак, остановимся прежде всего на *достаточном признаке трансцедентности числа по Лиувиллю*. В указанных работах этот математик исходит для разыскания такого признака из абсолютной величины отклонения трансцедентного числа от рациональной дроби,

* Comptes rendus. 1899. Т. 78. Ср. уточнения у *Popken*. Mathem. Zeitschr. 1929, Т. 29.

** К теории трансцедентных чисел. Протоколы О-ва Естествозн. при Варш. Универс. 1913, и О некоторых свойствах трансц. чисел первого класса.— Матем. сб. 1927. Т. 34, 55—100, где автор дает очень интересные построения (напр., определение трансц. чисел при помощи корней ряда уравнений с целыми коэффициентами в условиях роста степеней и высот).

*** Давший целый ряд знаменитых построений, напр., доказавший теоремы Эрмита и Линдемана и решивший Гильбертову проблему трансцендентности e^{π} и др. при помощи теорий конечных разностей и комплексного переменного (Очерк истории и современного состояния теории трансц. чисел.— Естествозн. и марксизм. 1930, 1/5, 33—55). Он же нашел и необходимый признак тр[ансцедентного] числа.— О необходимом и достаточном признаке трансцедентного числа. МГУ. Учен. записки. 1933. I, 6—8.

которая его приближенно выражает. Если алгебраическое число x определяется неприводимым уравнением n-й степени, то для достаточно большого q мы имеем

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{A}{q^n},$$

где $A>0$ и не зависит от q. Это условие, очевидно, необходимо для того, чтобы число x было алгебраическим. Оно, конечно, не есть еще достаточное условие. Но тогда отсюда можно получить условие для трансцедентности числа, которое будет, наоборот, достаточным, но не необходимым. Если, какое бы ни было n, мы имеем, при достаточно большом q, что

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n},$$

то x уже не сможет быть алгебраическим числом. Оно будет *трансцедентным*. На основании этого неравенства можно так формулировать достаточный признак трансцедентности числа ω:

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\ln\left|\omega-\frac{p}{q}\right|}{\ln q} = -\infty.$$

Я утверждаю, что эта формула есть *не что иное, как точный математический дублет к развитому выше учению о трансцедентном и об его эманациях в инобытие* (§ 110, п. 2—3).

b) В самом деле, что мы тут имеем? Мы тут имеем 1) отношение двух целых чисел $\frac{p}{q}$, т. е. некое p взято в своем соотношении со своим инобытием q. 2) Это q тут не остается стабильным; оно меняется, получая последовательный ряд все новых и новых значений, т. е., другими словами, раз взятое инобытие переходит в свое собственное инобытие и изучаемое отношение становится развернуто-инобытийным. 3) Далее, это соотношение должно быть прибавлено к тому числу, которое претерпевает все эти соотношения. Так оно и будет, когда мы развернем трансцедентное число в ряд. Но тут нас интересует позиция, обрисованная в предыдущем параграфе, п. 2* 3, т. е. мы только ищем эту трансцедентную ω, *уже содержащую в себе* данное соотношение. И поэтому, согласно указанной позиции, мы *вычитаем* это соотношение из ω и получаем $\left|\omega-\frac{p}{q}\right|$. 4) Однако, чтобы определить ω согласно этой позиции, мы должны посмотреть, каково отношение этого трансцедентного «остатка» к инобытию, которое из него эманировало. Поскольку p мы соотносили с q и поскольку q у нас менялось, мы теперь должны сказать, что если из ω эманировала действительно бесконечность, то q должно у нас получить в конце концов значение бесконечности;

q должно стремиться к бесконечности. Только тогда $\frac{p}{q}$ будет на самом деле изображать собою соотнесенность с бесконечностью.

5) При этом мы должны оба числа изучаемого соотношения, т. е. и трансцедентный «остаток», и инобытийную бесконечность, представить не иначе как в атмосфере эманации. «Остаток» должен трактоваться как результат эманации, и инобытийная бесконечность должна трактоваться как результат эманации. Позже, в анализе Неперова числа e, мы увидим, что e, основание натуральных логарифмов, является самым основным и примитивным трансцедентным числом, так как оно говорит о соотнесенности с инобытием не чего другого, как самой обыкновенной *единицы*, так что, если угодно, e может считаться своего рода трансцедентной единицей, или первообразом трансцедентности вообще. Поэтому, если мы покажем, как данное число, конечное или бесконечное, появилось из e, то этим самым мы обрисуем данное число именно как результат эманации трансцедентного. Но всякое данное число может быть получено из e путем возведения его в ту или иную степень, т. е. свидетелем происхождения данного числа из трансцедентной эманации может явиться только его *натуральный логарифм*.

Но проводимая здесь позиция для разыскания трансцедентного числа 6) должна привести к тому, что между этими двумя бесконечностями, трансцедентным «остатком» и инобытийной бесконечностью, в свою очередь должна залегать бесконечность, так что, только подвергаясь бесконечному умалению или росту, эти две бесконечности могут встретиться. А 7) если, кроме того, инобытийная бесконечность есть отрицательная, то отношение между натуральными логарифмами трансцедентного «остатка» и самой инобытийной бесконечности, отношение, взятое в пределе (поскольку инобытие только еще растет в бесконечность), это отношение и есть не что иное, как отрицательная бесконечность.

Все это с математической точностью зафиксировано в указанном выше достаточном признаке трансцедентности по Лиувиллю.

3. Этот признак Лиувилля переработан Гельфондом (в указанной статье соответствующего заголовка) в *необходимый* и достаточный признак путем рассмотрения вместо нижней границы двучленов первой степени относительно данного числа нижней границы многочленов любой степени от него. Это, однако, не вносит ничего принципиально нового в наш анализ, хотя и действительно уточняет математическую теорию. Гельфонд оперирует здесь с т. н. высотой многочлена, которая, во-первых, растет вместе с номером соответствующего коэффициента, а во-вторых, берется в соответствующей степени, при стремлении того и другого в бесконечность. Следовательно, многомерность бесконечно становящегося инобытия соблюдена и здесь; прочее же все в философском отношении не существенно, так как различие между биномом и полиномом в философском отношении не может явиться принципом для новой теории.

4. Признак Лиувилля дает возможность без особого труда построить новые трансцедентные числа (путем разложения) и проверять

трансцедентность уже известных. Так, если мы имеем 1 и потом будем брать последовательно отношения этой 1 к некоей растущей функции, возведенной в степень, показатель которой будет тоже некоей растущей функцией, то, беря предельные отношения, мы получим из суммы всех этих отношений не что иное, как трансцедентное число. Напр., число ω, при $l>0$, будет трансцедентным числом, если мы его определим при помощи ряда:

$$\omega=1+\frac{1}{l}+\frac{1}{l^{1\cdot 2}}+\ldots+\frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot\ldots n}}+\frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot\ldots n(n+1)}}+\ldots$$

Тут мы имеем данное число, 1, и его отношение к его инобытию, т. е. к иному числу, $\frac{1}{l}$. Далее это отношение вступает в двойное становление. Одно становление — это последовательное повышение степени: $\frac{1}{l}, \frac{1}{l^2}, \frac{1}{l^3}\ldots$ Другое становление — это последовательное накопление предыдущих степеней: $\frac{1}{l}, \frac{1}{l^{1\cdot 2}}, \frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot 3}}$ и т. д. Оба бесконечных становления даны в пределе.

§ 111а. Трансцедентное число (e, отношение синуса к дуге и π).

1. а) Но отчетливее всего, проще всего, а самое главное, значительнее всего для всей математики строится знаменитая трансцедентность e, т. н. *Неперово число*, или основание натуральных логарифмов. Это, если угодно, совершенная идея и всякого предела. История философии дала бы нам немало аналогий, если бы мы стали прослеживать эту идею исторически. Тут прежде всего вспоминаются, конечно, софиологические учения античной философии. Учение об Уме в неоплатонизме, имманентно саморазвивающемся в Мировой Душе, есть учение об энергийно преисполненном Смысле, эманирующем свои смысловые потенции и объединяющем идеальную неподвижность Ума с реальной живой подвижностью сферы Души. Эта потенция, перешедшая в энергию, все еще вполне идеальна, но она как бы вобрала в себя все свои возможные судьбы в инобытии. Она не перешла реально в инобытие, но она идеально предвосхитила все свое возможное инобытие. Учение об идеале у немецких философов начала XIX в. относится сюда же. Это предел всех возможных взаимоотношений данной смысловой структуры с окружающим ее инобытием. Тут в идее дана полная тождественность смысловой структуры с инобытием, так что эта структура перестает быть отвлеченным и пустым принципом и голой потенцией, но превращается в универсальную энергию, смысловым образом несущую на себе всю бытийственную тяжесть данной структуры. Прибегая к обычному диалектическому схематизму, нужно сказать так. Потенция — отвлеченный принцип. Он переходит в свое инобытие и воплощается в своем инобытии. Это заставляет его превратиться из голого принципа в некую телесную оформленность. Переходя в инобытие, этот принцип там находит себя, т. е. осуществляется и воплощается в этом инобытии целиком и полностью. В результате — синтез потенции (или