Это, несомненно, имеет для нашей теории огромное значение. И понятным оно может сделаться для нас только в том случае, если мы будем иметь в виду наше общее учение о трансцедентности. Трансцедентное, учили мы, уже включает в себе все свои инобытийные возможности; следовательно, никакое инобытие не может внести в него никакого изменения. Поэтому, взявши эманационный аспект трансцедентного, т. е. $e^x = y$, и фиксируя царящее здесь отношение между x и y, мы и в сфере инобытия данной трансцедентности найдем это отношение непоколебленным (а производная и есть закон инобытийного соотношения аргумента и функции). Таким образом, разгадка производной от функции e^x заключается в инобытийной эманативности трансцедентного.

8. Наконец, уясняется из всего предлагаемого учения и подлинное диалектическое место *логарифма*. Если логарифм числа есть показатель степени, в которую нужно возвысить e, чтобы получить число, то ясно, что логарифм указывает на некоторый метод инобытийного роста e, т. е. на тот или иной способ *эманации трансцедентного*. Это есть как бы фиксация *возраста* инобытия, возрастающего в результате трансцедентных эманаций, или *скорости* его возрастания. Тригонометрические функции раскрывают нам размер и направление эманативной перспективы, логарифмическая функция говорит нам о скорости ее нарастания. Наконец, простая показательная функция свидетельствует о скорости или возрасте инобытия, эманированного вообще из недр какого бы то ни было числа.

Разумеется, различение Неперовых и Бригговых логарифмов [11*] не может иметь принципиального значения для настоящего исследования, и его не следует тут обсуждать.

§ 113. Гиперкомплексное число (общее понятие).

1. а) Алгебраическое число есть число, соотнесенное с своим инобытием и, следовательно, некоторым образом включающее его в себя. Включение это совершается здесь, как мы знаем, только в принципе, только потенциально. Поскольку инобытие мыслится здесь как простой, неразвернутый акт полагания, постольку оно в принципе есть целость, целое число. Следовательно, алгебраическое число есть потенция целого числа. Всякое число, которое в результате конечного числа операций может стать целым числом, есть число алгебраическое.

Диалектической противоположностью его является число трансцедентное. В нем вмещается его инобытие уже не только потенциально, а еще и энергийно. И это потому, что само инобытие дано тут не в виде голого бытия или полагания, но в виде полагания, перешедшего в становление, в развернутое инобытие, так что оно стало здесь инобытием инобытия, становлением становления. Когда число самой своей структурой свидетельствует о том, что оно может быть получено только путем учета этого многомерного становления, то это число есть трансцедентное. Уже простая иррациональность не может быть получена при помощи конечного числа операций. Но все же путем различных операций ее можно привести к целому числу, если отказаться от непосредственного его вычисления. Трансцедентное же число есть усложненная иррациональность,— как мы говорим, «многомерная»,— и поэтому, даже отказываясь от непосредственных вычислений, мы не в состоянии свести его на целое число. «Свести на целое число» — это ведь значит иметь для данного числа инобытие только как простую положенность, а тут она как раз не простая, а «многомерная».

Трансцедентное число всегда есть предел. Оно и не может не быть пределом, потому что иначе оно расплылось бы в многомерной иррациональности и мы не имели бы никакого закона необходимого тут становления становления, т. е. не имели бы и самого трансцедентного числа. Поэтому, если угодно, уже наличие в трансцедентном предела есть начало синтеза трансцедентности и алгебраичности. Алгебраическое число — устойчиво, неподвижно. Стихия инобытийного становления дана тут только принципиально, а не фактически. Трансцедентное же число все бурлит этим сложным становлением, и если бы тут было только это последнее, то оно набросилось бы на трансцедентность и увлекло бы его в свою бездну. Однако трансцедентность, несмотря на вмещаемый в себя вихрь становления, пребывает неподвижно в самом себе, оно управляет этим становлением и дает ему закон. Достигается это тем, что трансцедентность есть предел.

Но, конечно, наличие предела в трансцедентном не есть еще синтез трансцедентной инобытийной подвижности и алгебраической устойчивости. Предел входит в самую конструкцию трансцедентного и потому вовсе не есть какой-нибудь, но входит вместе со всем становлением трансцедентного в антитезу к числу алгебраическому. Зато гораздо более явным синтезом является мнимая степень трансцедентности. В самом деле, поскольку мнимая степень трансцедентности не есть само трансцедентное, может подняться вопрос о том, не является ли она некоторым синтезом.

Несомненно, некоторым синтезом она является. Если синтез бытия и становления должен положить бытийную границу для становления, то ведь мнимая степень трансцедентности, видели мы, получая комплексное истолкование, превращается в идеально выразительную образность трансцедентного, в его смысловое, эманативное оформление. Несомненно, начало покоя залегает в этом аспекте трансцедентного, и покоя не в смысле только предела (которого тут и без того не может не быть), но покоя в смысле зацветения не бывшими до тех пор телесно-изобразительными энергиями.

b) Однако можно ли это считать окончательным синтезом трансцедентного и алгебраического? Всматриваясь в него, мы начинаем замечать здесь совершенно отчетливые признаки *ставшего*. Ведь ставшее тоже есть синтез бытия и становления, хотя и не окончательный синтез. Здесь расплывающееся становление, сдерживаемое раньше только пределом, превращается в самостоятельную структуру, а не просто упорядочивается извне (как это способен делать предел). Раз из становления рождаются твердые очертания и отдельные его струи затвердевают в смысловую образность и фигурность, то, конечно, здесь перед нами синтез бытия и инобытия. Но необходимо твердо зафиксировать: комплексно понимая [12*], мнимая степень трансцедентного есть только начало этой образности, начало этой самостоятельной фигурности, которая вмещает в себе и алгебраическую устойчивость, потенциальность, и трансцедентную энергийность.

Для полного синтеза необходимо полное исчерпание как всего категориального содержания алгебраичности, так и всего категориального содержания трансцедентности — это возможно не по категории ставшего, но по категории выражения. Можно ли сказать, что то и другое исчерпано в комплексном представлении мнимой степени трансцедентного? Конечно, нет. Алгебраичность есть потенция целого. Следовательно, потенция целого должна войти в наш синтез. Тем не менее комплексная величина представляется нами *на плоскости*, т. е. она берет только один из возможных элементов пространства и не берет его целиком. Правда, поскольку в алгебраическом числе речь идет не о целости как таковой, но о потенции целости, вовсе не обязательно фиксировать какое-нибудь определенное пространство и отбрасывать все прочие. Тут необходимо дать *принцип* перехода из одного измерения в другое, не ограничивая себя никаким заранее данным количеством измерений. С другой стороны, трансцедентность есть эманативная энергия инобытия, становления. Осуществлено ли это в комплексном числе? Тут дана только «двумерная», так сказать, энергийность, поскольку с вещественной точкой вещественной прямой соотнесена та или другая точка плоскости. Ясно, что становление тут хотя и является становлением становления, но оно не уходит в бесконечность становлений, как того требовала бы трансцедентная энергийность. Следовательно, и с этой стороны мнимая степень трансцедентности не есть полный диалектический синтез числа алгебраического и трансцедентного.

Разумеется, вовсе [не] необходимо фиксировать всю бесконечность измерений и всю бесконечность становлений. Необходимо только показать, как вообще мыслится в этом случае переход от одного измерения к другому и от одного становления к другому и как вообще мыслится та или иная целость измерений и становлений. Все же, однако, это не осуществимо средствами простых комплексных чисел и требует нахождения новой математически-логической категории.

2. Проще всего это мы сделаем так. Вспомним, что в диалектике не только антитезис является отрицанием тезиса и введением инобытия к нему, но и синтез есть отрицание антитезиса и введение нового инобытия к нему. Если это инобытие правильно подобрано, то оно и вернет нас к тезису, который ведь и есть не что иное, как отрицание отрицания. Комплексное число характеризует определенным образом направленную величину, или *вектор* (вспомним: вещественная и мнимая часть есть ведь только два слагаемых вектора). Следовательно, необходимо еще инобытие этого вектора или *другой* такой же вектор. Оба вектора должны быть чем-то единым. Тут-то и кроется подлинный синтез, который создаст нужную нам категорию выражения.

Когда мы имеем $a+bi$, мы рассматриваем с точки зрения вещественной прямой — плоскость. Введем еще ряд таких же единиц мнимости: $j^2=k^2=l^2=-1$. Пусть с нашей прямой a мы рассматриваем уже не плоскость, а пространство. Это значит, что мы должны выйти за пределы нашей комплексной плоскости, т. е. должны нашу новую мнимость j направить по перпендикуляру не к прямой a, но ко всей плоскости $a+bi$. Допустим, что мы дальше хотим наблюдать судьбу и самого трехмерного пространства, т. е. смотреть куда-то в четвертое измерение. Тогда еще новая мнимость k направит наш взор и в эту сторону, и наша прямая a станет носить на себе значимость четырехмерного пространства. И т. д. и т. д. Имея такое усложнение комплексов, мы уже реально обладаем и потенцией абсолютной целости, о которой говорило нам алгебраическое число, и всей бесконечностью пронизывающих друг друга становлений, о которой нам вещало число трансцедентное. Здесь уже решительно всякое становление из тех, которыми богата трансцедентность, превращается в фигурную выразительность, в «направление», в «измерение», понимаемое так конкретно, что его можно отождествить даже с соответствующими геометрическими образами. И здесь мы действительно получаем ту принципиальную числовую целость, которая дает нам представление о наглядно зримой числовой комбинации.

Это и есть т.н. *гиперкомплексное* число.

3. a) Нужно сказать, что еще Гаусс, и притом еще в докторской диссертации 1799 г., предположил для некоторых уравнений необходимость корней не вещественных и не комплексных, но более сложных, о свойствах которых сам Гаусс, однако, отказался высказать какое-нибудь суждение. В начале 40-х годов к учению об этих новых числах пришли одновременно два математика, Г. Грассман и В. Гамильтон. Первый дал философско-математическое учение о многообразиях, в отношении которых геометрия должна быть только частным случаем; его два сочинения — «Учение о линейном протяжении» (1844 г.) и «Учение о протяжении» (1862 г.)*. Гамильтон еще в 30-х годах обобщал комплексные числа в том смысле, что изучал соотношения векторов в пространстве на манер соотношения векторов на плоскости, существовавшего для обычных комплексных чисел. В 40-х годах эта разработка продолжилась, и в 1853 г. вышло большое сочинение «Lectures on quaternions», где была дана теория т. н. *кватернионов*, т. е. комплексных чисел с четырьмя единицами (одной вещественной и тремя мнимыми), после чего мы имеем еще «Elements of quaternions» (1866)**. В дальнейшем кватернионами много занимались англичане, среди которых надо указать Моргана, Кэли, Сильвестра, Клиффорда и др. Кватернионы получили развитие в том смысле, что их стали привлекать для изучения взаимоотношения пар векторов в пространстве; возникли т. н. *бикватернионы****. Отсюда возникло и т. н. винтовое исчисление****.

b) В настоящее время эта теория гиперкомплексных чисел разрабатывается в двух науках. Во-первых, можно брать такие мнимые

* Оба перепечатаны — *H. Grassmann*. Gesammelte mathematische u. physikalische Werke. I. Lpz., 1894—1898.

** Есть нем. пер.: Elemente d. Quaternionen, deutsch. v. P. Glan. Lpz., 1882—1884. I—II.

*** О них можно получить представление по мемуару В. Клиффорда «Предварительный очерк бикватернионов» — приложение в книге «Здравый смысл точных наук». Пер. А. Р. Кулишер. М., 1910, 314—344.

**** Ср.: *А. П. Котельников*. Винтовое исчисление. Каз., 1896; *Он же*. Проэктивная теория векторов. Каз., 1899.

единицы, произведение которых относится к тому же самому классу мнимостей, так что каждая единица является здесь не больше, как результатом линейного преобразования другой. И можно, во-вторых, иметь в виду такие единицы, произведение которых создает новые неприводимые единицы. Вслед за античными греками первое учение можно назвать *линейными алгебрами* и второе — *всеобщей алгеброй.*

Мы не станем входить в анализ этих дисциплин, а только ради образца коснемся *кватернионов*, входящих в первую из них, в линейную алгебру.

4. a) Как показывает самое название, в кватернионе мы имеем дело с *четырьмя* единицами. Первой единицей здесь является вещественная единица, как и в обыкновенных комплексных числах. Три остальные единицы — мнимые с теми или иными коэффициентами; по Гамильтону, они обозначаются как i, j и k, и весь кватернион имеет такой вид:

$$q=d+ia+jb+kc.$$

Вещественная единица и операции с нею ничем не отличаются от обычных вещественных правил, так что

$$1^2=1,\ i\cdot 1=1\cdot i=i,\ j\cdot 1=1\cdot j=j,\ k\cdot 1=1\cdot k=k.$$

Что же касается мнимых единиц, то здесь сходно с обычными комплексными числами только общее их определение, т. е.

$$i^2=j^2=k^2=-1.$$

В этом смысле все, что в § 107 говорилось о мнимости как о квадратном корне из отрицательной единицы, остается и для кватернионов в прежней силе. Далее, однако, этим мнимым единицам принадлежит фундаментальное свойство, резко отличающее их от всяких других единиц.

b) А именно, этим единицам *не свойственна коммутативность умножения* или, точнее, с переменой порядка сомножителей произведение меняет свой знак на обратный, т. е.

$$j\cdot k=i,\ k\cdot i=j,\ i\cdot j=k,$$

но при этом

$$k\cdot j=-i,\ i\cdot k=-j,\ j\cdot i=-k.$$

Если не принимать интуиций, лежащих в основе кватернионов, то это свойство его мнимых единиц является вполне бессмысленным или по крайней мере необоснованным. В чем же, однако, тут дело? Дело в том, что мнимые единицы i, j, k противоположны друг другу не в области одного измерения (тогда, если i предполагает только плоскость, j и k тоже оказались бы на плоскости и отождествились бы с i), но они противоположны друг другу *как разные пространственные измерения.* Количественно будучи одним и тем же, они еще выполняют некую «качественную» функцию, а именно они демонстрируют *разные измерения.* Поэтому кватернионы есть не что иное, как *аналитическое выражение четырехмерного пространства.* Подобно тому как обыкновенное комплексное число есть число плоскостное, т. е. двухмерное (ибо оно соотносит с точками данной вещественной прямой те или иные точки плоскости), подобно этому кватернион есть число (а следовательно, и пространство) четырехмерное (соотнося с данной вещественной прямой точки четырехмерного пространства). Отсюда выясняется и смысл некоммутативности умножения мнимых единиц кватерниона.

А именно, поскольку каждая единица связана здесь с новым измерением, она есть также символ известного *направления*. Направление же, комбинации направлений, естественно, зависят от самих направлений. В сложении направлений дело обстоит просто. Если A, B и C — точки, лежащие не на одной прямой, то вместо того, чтобы идти от A к B, а потом от B к C, я могу прямо идти от A к C и в смысле векторном $AC = AB + BC$. Иначе, однако, обстоит дело в умножении. Ведь что такое умножение? Умножение есть составление из множимого нового числа так, как множитель составлен из единицы. Ясно, что произведение тут определенно зависит от того, что считать множимым, а что множителем. Допустим, напр., что множимое положительно. Составляя из него новое число, мы, конечно, так же должны считаться с этим плюсом, как если бы и вообще помножали какое-нибудь положительное (а не отрицательное) число. Поэтому уже в умножении векторов на плоскости мы, вообще говоря, считаемся с порядком действующих тут сомножителей. То же самое и в кватернионах.

Немного позже мы сформулируем смысл некоммутативности умножения кватернионов еще более конкретно.

§ 113а. Гиперкомплексное число (интерпретация).

1. Прежде чем, однако, идти дальше, задумаемся, какой философский смысл можно было бы вкладывать в четырехмерное пространство и почему целесообразно брать комбинацию именно четырех единиц, а не больше и не меньше. В § ⟨...⟩ мы уже столкнулись с этим вопросом. И сейчас необходимо это понимать яснейшим образом.

а) Четырехмерное пространство является *первым полным пространством с точки зрения диалектики*. Считая точку за геометрический перво-принцип (поскольку она не имеет ни одного измерения и потому выше всякого оформления), мы обязаны за *бытие*, т. е. за первую расчлененную положенность и утвержденность, считать, очевидно, линию. Вполне естественно также в поисках инобытия линии переходить в другое измерение, т. е. в плоскость, что определенным образом погружает нас в некое становление (в отношении линии). Но ведь становление где-то останавливается и, переходя в ставшее, в дальнейшем уже перестает быть все новым и новым становлением, но вместо этого встречается с самим собою. Так и плоскость должна встретиться с плоскостью, т. е. с *другой* плоскостью, т. е. мы должны перейти в пространство, в третье измерение. Очевидно, полное диалектическое оформление наступает только вместе с *выразительной* формой, т. е. когда ставшее смысловым образом вмещает в себя и все свое инобытие, т. е. когда в нем, в его образной структуре, проявились его всевозможные инобытийные дифференции. Следовательно, на трехмерном пространстве должны быть запечатлены следы его инобытийного существования. Проще всего это инобытие там, где оно не задевает самой субстанции пространства, а лишь говорит о процессах, совершающихся внутри одной