оно соотносит с точками данной вещественной прямой те или иные точки плоскости), подобно этому кватернион есть число (а следовательно, и пространство) четырехмерное (соотнося с данной вещественной прямой точки четырехмерного пространства). Отсюда выясняется и смысл некоммутативности умножения мнимых единиц кватерниона.

А именно, поскольку каждая единица связана здесь с новым измерением, она есть также символ известного *направления*. Направление же, комбинации направлений, естественно, зависят от самих направлений. В сложении направлений дело обстоит просто. Если A, B и C — точки, лежащие не на одной прямой, то вместо того, чтобы идти от A к B, а потом от B к C, я могу прямо идти от A к C и в смысле векторном $AC=AB+BC$. Иначе, однако, обстоит дело в умножении. Ведь что такое умножение? Умножение есть составление из множимого нового числа так, как множитель составлен из единицы. Ясно, что произведение тут определенно зависит от того, что считать множимым, а что множителем. Допустим, напр., что множимое положительно. Составляя из него новое число, мы, конечно, так же должны считаться с этим плюсом, как если бы и вообще помножали какое-нибудь положительное (а не отрицательное) число. Поэтому уже в умножении векторов на плоскости мы, вообще говоря, считаемся с порядком действующих тут сомножителей. То же самое и в кватернионах.

Немного позже мы сформулируем смысл некоммутативности умножения кватернионов еще более конкретно.

§ 113а. Гиперкомплексное число (интерпретация).

1. Прежде чем, однако, идти дальше, задумаемся, какой философский смысл можно было бы вкладывать в четырехмерное пространство и почему целесообразно брать комбинацию именно четырех единиц, а не больше и не меньше. В § ⟨...⟩ мы уже столкнулись с этим вопросом. И сейчас необходимо это понимать яснейшим образом.

а) Четырехмерное пространство является *первым полным пространством с точки зрения диалектики*. Считая точку за геометрический перво-принцип (поскольку она не имеет ни одного измерения и потому выше всякого оформления), мы обязаны за *бытие*, т. е. за первую расчлененную положенность и утвержденность, считать, очевидно, линию. Вполне естественно также в поисках инобытия линии переходить в другое измерение, т. е. в плоскость, что определенным образом погружает нас в некое становление (в отношении линии). Но ведь становление где-то останавливается и, переходя в ставшее, в дальнейшем уже перестает быть все новым и новым становлением, но вместо этого встречается с самим собою. Так и плоскость должна встретиться с плоскостью, т. е. с *другой* плоскостью, т. е. мы должны перейти в пространство, в третье измерение. Очевидно, полное диалектическое оформление наступает только вместе с *выразительной* формой, т. е. когда ставшее смысловым образом вмещает в себя и все свое инобытие, т. е. когда в нем, в его образной структуре, проявились его всевозможные инобытийные дифференции. Следовательно, на трехмерном пространстве должны быть запечатлены следы его инобытийного существования. Проще всего это инобытие там, где оно не задевает самой субстанции пространства, а лишь говорит о процессах, совершающихся внутри одной и той же, неизменяемой субстанции и структуры пространства. Так, напр., если бы мы составили вещественный кватернион, в котором первые три единицы указывали бы на три измерения пространства, а четвертая на массу или температуру или потенциальную энергию, то весь кватернион говорил бы нам о том или ином заполнении пространства, т. е. о том или ином распределении в нем массы, или температуры, или энергии; и наше означенное пространство оказалось бы *выраженным*, так как здесь оно вместило бы в себя свое инобытие. Но ясно, что это инобытие есть инобытие не *самого* пространства, т. е. не его последней субстанции, но только его *смысла*, его смыслового содержания, при нетронутости самого принципа пространства. Понимание кватерниона как отношения двух векторов трехмерного пространства проводил еще в 30-х годах итальянский геометр Беллавитис *.

Настоящая выраженность пространства, а следовательно, и первое полное его диалектическое оформление, наступает только тогда, когда оно вместит в себя свое инобытие *в субстанциальном смысле*, т. е. когда в нем будет выражено его инобытие, меняющее самый принцип его, самую его субстанцию. Тогда на трехмерное пространство мы должны смотреть такими же глазами, какими смотрим на двухмерное с точки зрения трехмерного и на одномерное — с точки зрения двухмерного, т. е. тогда мы должны постулировать некое четырехмерное пространство, и оно-то и будет подлинной (первой, по крайней мере полной) выразительностью пространства и, следовательно, первым полным его диалектическим оформлением.

b) Здесь, однако, необходимо устранить одно недоразумение, которое обычно вносит путаницу в проблему четырехмерного пространства и которое как раз особенно вредно для понимания кватернионов. *Вовсе не обязательно мыслить четырехмерное пространство как некую особую метафизическую действительность, не имеющую ничего общего с обычным четырехмерным пространством.* Хотя признание трехмерного пространства ничуть не более основательно, чем признание пространства любого числа измерений, все же в трехмерном пространстве (недаром для диалектики оно есть «ставшее», «наличное бытие») мы имеем нечто как бы в подлинном смысле «действительное», «фактическое», «эмпирическое». Но тут мы прямо должны сказать, что *чистого трехмерного пространства вообще не существует*, если уж на самом деле гнаться за «фактическим» и «эмпирическим». Фактическое и эмпирическое пространство никогда не трехмерно, ни в своем смысловом наполнении, ни в своем субстанциальном принципе. Что оно всегда чем-то наполнено, это понимают все. Если не понятно, как можно считать заполненным «чистое», пустое пространство, то я бы предложил здесь простейший аргумент. Если Москву и Киев считать математическими точками пустого пространства и если между Москвой и Киевом действительно «пустота», т. е. ничего нет, то почему я, живя в Москве, не нахожусь в это же время в Киеве? Если меня *что-нибудь* отделяет от Киева, то это есть именно *что-нибудь*, а не *ничто*, и если это — пустота, то эта пустота есть *фактически* такая сила, преодолеть которую можно только при помощи затраты огромных усилий. Итак,

* *G. Bellavitis.* Sposizione del metodo delle equipollenze. Modena, 1854.

пространство всегда так или иначе заполнено, оно всегда так или иначе некое поле сил, и уже по одному этому оно не просто трехмерно.

Однако оно не просто трехмерно и в другом смысле, в смысле вмещения своего субстанциального инобытия. Оно имеет ту или иную *кривизну*, и только Эвклидова геометрия приравнивает эту кривизну нулю, будучи, следовательно, как раз абстрактной, а не живой теорией живого пространства.

c) И вот, кватернионы есть арифметический аналог именно *выраженного* пространства, четырехмерного пространства. Это — *выраженное* число. И мы вспоминаем здесь нашу общую позицию, занятую в исследовании природы алгебраического, трансцедентного и гиперкомплексного числа, позицию энергийно-эманативного выражения. Но в трансцедентном числе эта выраженность только начала проявляться как конкретный образ (покамест еще плоскостной), а в алгебраическом она и вовсе только еще потенция. Зато в гиперкомплексном числе, в кватернионе, она стала законченной, фигурно осмысленной, выраженной действительностью.

2. a) Именно, здесь мы получаем одну вещественную прямую, которая и по направлению и по абсолютной величине оказывается носительницей четырехмерного пространства. Поскольку в кватернион входит три мнимых единицы, плоскость, пространство и четырехмерное пространство не даны тут сами по себе, вещественно, отдельно от заданной вещественной прямой. Но эта последняя *отражает* на себе и плоскость, и трехмерное пространство, и деформацию в связи с четырехмерностью. Мы имеем *одну вещественную прямую* или один и единственный вещественный вектор, который, однако, несет с собою четырехмерную значимость. Вспомним, что называется модулем обыкновенного комплексного числа. Это — абсолютная величина того радиуса-вектора, который указывает направление комплексной точки плоскости по отношению к началу координат. Его можно получить, рассматривая обе части комплекса как катеты прямоугольного треугольника; его можно получить и как квадратный корень из произведения сопряженных комплексных чисел. Тут он равняется $\sqrt{a^2+b^2}$. Аналогично для кватерниона мы имеем величину $\tau=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$, называемую *тензором* кватерниона. Она играет первостепенную роль во всем учении о четырехмерном пространстве.

b) Чтобы понять логическую сущность тензора, будем исходить из определения модуля обычных комплексных чисел. Модуль комплексного числа есть квадратный корень из произведения самого числа на сопряженное с ним. Во-первых, что значит $a-bi$ — число, сопряженное с $a+bi$? Понимать его надо, конечно, векторно, как и вообще комплексное число. Но это значит, что в данном случае линия мнимостей имеет обратное направление. Направление для нас имеет только единственный диалектический смысл: это — вид становления. Следовательно, постулируя для всякого комплексного числа сопряженное с ним, мы постулируем просто возможность противоположных направлений становления. Но что же дальше?

Дальше мы наблюдаем судьбу нашего вещественного отрезка AB после того, как он вернулся в комплексную область, т. е. после того, как он подвергся воздействию упомянутого становления. Раньше, будучи всецело вещественным, он давал нам определенное протяжение, равное *a* вещественным единицам. Теперь, взявши ту или иную точку *C* на плоскости, мы видим, что расстояние *AC* совсем иное, чем *AB*. *AB* претерпело *растяжение* (или укорочение, что в данном случае безразлично), и это растяжение определяется положением выбранной нами точки на плоскости. Наш отрезок *AB повернулся на определенный угол* и *растянулся*. Всмотримся в это растяжение.

Оно есть не только результат увеличения длины отрезка, но и результат поворота его на определенный угол. Но мы отвлечемся пока от этого поворота и будем рассматривать растяжение *независимо от направления*. Чтобы эта независимость от направления была не просто абстрактным допущением, но еще была и диалектически понятна, надо реально взять два противоположных направления и допустить, что это растяжение одинаково там и здесь. Если для взаимно противоположных направлений растяжение останется одним и тем же, то это и будет гарантией того, что растяжение действительно не зависит ни от какого направления вообще. Но как это сделать? Очевидно, необходимо допустить, что *растяжение находится в одном и том же отношении* к противоположным направлениям, что соотношение растяжения и направления в общем случае совершенно тождественно с этим же соотношением в другом случае. Другими словами, растяжение есть не что иное, как среднее геометрическое между числами, связанными с взаимно противоположными направлениями. Но числа с взаимно противоположным направлением и есть сопряженные комплексные числа. Отсюда и вытекает, что модуль (т. е. абсолютная величина) комплексного числа есть квадратный корень из произведения комплексного числа на сопряженное с ним.

Следовательно, определение модуля через сопряженные элементы есть в диалектическом смысле фиксация растяжения вещественного отрезка при данном переходе его в комплексную область, которое берется в аспекте полной независимости этого отрезка от всякого направления в комплексной области.

с) Теперь станет понятной и философская сущность тензора. *Тензор кватерниона играет в четырехмерном пространстве*, очевидно, *ту же самую роль, что модуль комплексного числа в двухмерной области.* «Тензор» значит «растягиватель». Одно растяжение мы получаем, когда переходим от линии к плоскости, т. е. отражаем плоскость на линии. Другое растяжение образуется при переходе в пространство. Но ведь мы представляем себе, что трехмерное пространство определенным образом *выражено*. Это значит, что мы соотносим его с четвертым измерением, хотя и не перешли в последнее в вещественном смысле, а только зафиксировали его на вещественном отрезке как мнимое. Тогда, следовательно, наше растяжение вещественного отрезка усложнится еще более, и — мы получим понятие тензора. Тензор одним махом охватывает всю деформацию, которая происходит с вещественным отрезком, когда он отображает на себе четырехмерное пространство.

d) Разумеется, соответствующее изменение получает и *направление*. На плоскости мы уже имеем определенный угол, на который повернулся наш отрезок. Полученное таким способом направление меняется в свою очередь при воздействии новой мнимой единицы, а эта трехмерная направленность усложняется еще дальше, когда заходит речь о третьей единице. Кватернион, таким образом, уже взятый сам по себе, гласит *о тройном процессе растяжения и тройном процессе поворота данного вещественного отрезка прямой*, причем поскольку он есть комбинация четырех разнонаправленных единиц, то и другое мыслится еще переносимым из одной области в другую (из одной системы координат в другую). Кватернион, таким образом, есть просто отрезок в четырехмерном пространстве, который вещественно явлен как определенная система растяжений и поворотов.

3. а) Особенно просто и рельефно это можно видеть на *умножении* кватернионов. Если сумма двух кватернионов не представляет собою ничего особенного, кроме обычного для комплексных чисел раздельного сложения вещественных и мнимых частей

$$q+q'=(d+d')+i(a+a')+j(b+b')+k(c+c'),$$

то умножение кватернионов весьма интересно, хотя и аналогия его с векторным умножением вообще вполне очевидна. Так как векторное умножение обыкновенных комплексных чисел значительно проще, то вспомним сначала его.

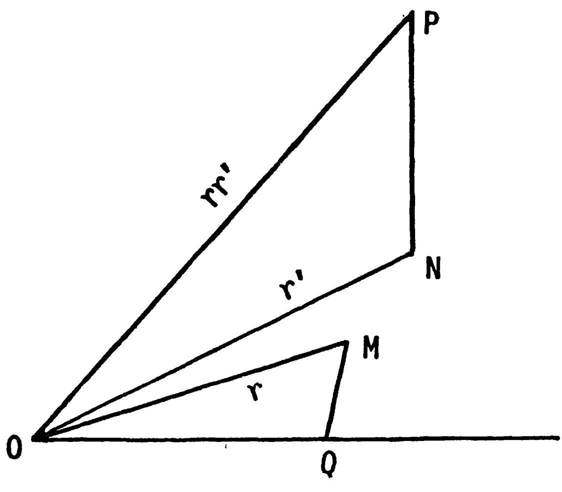

Рис. 10

OM и *ON*—два вектора, соответствующие двум разным комплексным числам. Требуется их перемножить. Так как умножить—значит повторить множимое столько раз, сколько единиц во множителе, то отложим на линии *x* вектор *OQ*, равный единице, и построим на линии

ON треугольник OPN, подобный треугольнику OMQ. Тогда OP будет как раз составлено из OM так, как OM составлено из $OQ=1$. Или —

$$OP:OM=OM:1,$$

откуда

$$OP=rr'; \ \angle POQ=\angle PON+\angle NOQ,$$

что при $\angle MOQ=\varphi$ и $\angle NOQ=\varphi'$ и, ввиду подобия указанных треугольников, при $\angle PON=\angle MOQ=\varphi$ дает

$$\angle POQ=\varphi+\varphi'.$$

Другими словами: чтобы умножить одно комплексное число на другое, надо модули их перемножить, а аргументы сложить. Или: при умножении одного вектора на другой его абсолютная величина растягивается во столько раз, сколько единиц в абсолютной величине другого вектора, а сам он вращается в положительном направлении на тот угол, который характеризовал направление этого другого вектора. Умножение комплексных чисел, следовательно, есть соединение *растяжения с поворотом*.

b) Точно то же самое мы находим и в кватернионах. Нетрудно представить себе усложнение этого поворотного растяжения для случая трехмерного пространства, а затем и для четырехмерного пространства. Аналогично поведению модулей в комплексном умножении можно утверждать, что тензор произведения двух кватернионов равняется произведению их тензоров (это легко доказывается путем введения сопряженных кватернионов). А отсюда, припоминая из аналитической геометрии выражение для расстояния точки от начала координат равного $\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$, мы можем сказать, что уравнение в кватернионах $q'=p\cdot q$ представляет собою не что иное, как определенное линейное преобразование точек x, y, z, w четырехмерного пространства в точки x', y', z', w', дающее в результате вместо одного вектора другой и умножающее указанное выражение для расстояния точки от начала координат на один и тот же постоянный множитель $\tau=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Тензор, таким образом, вполне характеризует растяжение отрезка, вступающего в четырехмерное пространство. Кроме того, из аналитической геометрии известно, что линейное преобразование x, y, z, при котором $x^2+y^2+z^2$ является инвариантом расстояния от начала 0, есть не что иное, как вращение или зеркальное отражение. Не иначе, следовательно, и в четырехмерном пространстве, где таким инвариантом будет $x^2+y^2+z^2+w^2$. Стало быть, когда линейное преобразование помножает $x^2+y^2+z^2+w^2$ на некоторый множитель τ^2, то мы и получаем вращение вместе с растяжением всего пространства до τ-кратных размеров.

Если мы станем изучать результат нескольких вращений, то уже чисто зрительно будет заметно, какое значение имеет последовательность вращений. В зависимости от разного порядка вращений будет, вообще говоря, получаться и разное «тело вращения». Но сложение вращений, как мы сейчас видели, эквивалентно умножению кватернионов. Отсюда становится понятной и столь характерная для кватернионов некоммутативность умножения. Она, видим мы теперь, есть не что иное, как зависимость суммы сложения вращений от порядка слагаемых. И, таким образом, отвлеченный аналитический признак кватерниона получает тут вполне понятное и убедительное истолкование.

4. Значение кватернионов получит для нас еще большее значение, если я укажу на ближайшую связь их с популярной ныне *теорией относительности.* Хотя Минковский исходил в своих рассуждениях о поворотном растяжении четырехмерного пространства совсем из другой терминологии (именно из матриц Кэли), Ф. Клейн * простейшим образом показал, что знаменитые «Лоренцовы преобразования», лежащие в основе теории относительности, есть не что иное, как вращение некоторого пространства, изобразимое притом весьма удобно при помощи кватернионов.

Хотя было бы и неуместно пускаться здесь в эти выкладки, все же привлечение их для теории кватернионов значительно обогащает наше представление о гиперкомплексном числе, и можно только рекомендовать усвоить эти в общем простейшие выкладки у Клейна всякому желающему усвоить себе философию гиперкомплексного числа вообще.

5. а) В заключение мы затронем один вопрос, который, возможно, уже возник у внимательного читателя, в особенности если он усвоил нашу первоначальную дедукцию гиперкомплексного числа (§ 113). Мы утверждаем, что гиперкомплексное число есть наивысшая форма арифметического числа, диалектически включившая в себя и претворившая в себе и алгебраическое, и трансцедентное число. Вместе с тем гиперкомплексное число есть энергийно-эманативное выражение вообще арифметического числа. Возникает вопрос: откуда же видно, что гиперкомплексное число есть энергийно-эманативное выражение числа? Если оно продолжает быть эманацией трансцедентности, являясь только наиболее оформленным и выраженным его оформлением, то где же в предыдущих наших рассуждениях указание на эту трансцедентность? Такой вопрос получает остроту еще и оттого, что в области самой трансцедентности мы пришли к более зрелой ее форме, к мнимой степени трансцедентности и констатировали тождество ее с двухмерным комплексным числом. Потом, чтобы завершить диалектику числа, мы перешли к четырехмерному комплексному числу, назвавши его гиперкомплексным числом, но мы ничего не сказали о том, какая же остается тут связь с трансцедентностью. Ведь если говорить о четырехмерном комплексном числе как о таковом, без всякой связи с трансцедентностью, то ведь его мы свободно могли бы вывести значительно раньше, не входя ни в какие учения о числах алгебраических и трансцедентных, т. е. непосредственно после учения о мнимых числах § 107. Это было бы и естественно: сначала говорить о двухмерных комплексах, потом о трехмерных, четырехмерных и т. д. Следовательно, если гиперкомплексные числа у нас появились *после трансцедентных*, то должно быть

* *Ф. Клейн.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Пер. Ц. А. Крыжановского. Под ред. В. Ф. Кагана. М.—Л., 1933. I, 106—107. Ср.: *Он же.* О геометрических основаниях Лоренцовой группы. Рус. пер. в «Нов. идеях в математике». 1914. V, 144—174.

установлено четкое отношение категории гиперкомплексов к трансцедентности.

b) Однако в этом вопросе я как раз не чувствую себя уверенно и не могу предложить читателю четкой и совершенно ясной мне математической концепции. Дедуцируя данную выше категорию гиперкомплексного числа, я в значительной мере шел по пути, который указывался мне интуицией, и совершенно не имел точных математических аналогов. Все же у меня есть некоторое предположение о связи гиперкомплексов с трансцедентными [числами], и, хотя я не настолько силен в математике, чтобы его доказать, я все же предлагаю его на обсуждение.

Д. Д. Мордухай-Болтовский в указанной выше работе* о трансцедентных числах из общей области трансцедентности выделяет трансцедентные числа, которые он называет *собственно* трансцедентными. Замечая, говорит он, что e можно определить как $y_{x=1}$, если $y'=y$, причем $y_{x=0}=1$; что $lg\,a$, где a есть алгебраическое число, можно представить как $y_{x=0}$, если $xy'=1$, причем $y_{x=1}=0$, и т. д. и т. д.,— мы можем считать, что трансцедентные числа вообще подходят под форму $N=y_{a=c}$, где c рационально, а y определяется условием $f(x, y, y', ..., y^{(n)})=0$, причем f есть полином с рациональными, или, что то же, с целыми, коэффициентами от $(x, y, y', ..., y^{(n)})$. Такого рода трансцедентные числа являются собственно трансцедентными, прочие же — гипертрансцедентными.

Тут вспоминается «определение» алгебраического числа: оно является корнем уравнения с целыми коэффициентами. Собственно трансцедентное число есть такое, которое может быть корнем *дифференциального* уравнения с целыми коэффициентами. Значит, гипертрансцедентное число — это такое, которое не может быть корнем дифференциального уравнения с целыми коэффициентами.

c) Едва ли математики понимают философское значение связи трансцедентности с корнем дифференциального уравнения. Если вспомнить наше учение о трансцедентной иррациональности в ее отличии от алгебраической (§ 110), то мы утверждали, что эта последняя оказывается одномерной, она есть простейшая и, так сказать, одноплановая иррациональность, математически определяемая только простым извлечением корня. Трансцедентная иррациональность — это многомерная, и прежде всего двухмерная, иррациональность. Мы показали на основании признака Лиувилля (§ 111), что трансцедентное число предполагает переплетение двух разных иррациональностей, так как логически мы имеем здесь становление становления. Отсюда и эманационный характер трансцедентности. Это переплетение двух *разных* иррациональностей привело нас к двухмерной комплексной области. Ведь измерение в пространстве, как мы тоже не раз доказывали (§ 55, 71), есть не что иное, как переход в *новое* инобытие, т. е. в новую иррациональность (такова плоскость в отношении линии, пространство в отношении плоскости, пространство $(n+1)$-го измерения в отношении пространства n измерений). Не связана ли эта переплетенность двух

* Матем. сб. 1927. XXXIV 61.

иррациональностей в трансцедентном с двухмерно-комплексным ее толкованием и вообще с двухмерно-пространственным или векторным ее толкованием?

Если так, то тогда понятно, почему трансцедентное число, не являясь корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, является тем не менее корнем дифференциального уравнения. Ведь последнее, содержа в себе производные, тем самым содержит помимо той простой иррациональности, которая возможна в алгебраической области, еще и другую, особую иррациональность, ту, которую мы получаем в результате дифференцирования, или, вернее, ту, благодаря которой возможен переход от функции к ее инобытию, а затем и к закону инобытийных соотношений между функцией и аргументом, т. е. к производной. Так или иначе, но дифференциальное уравнение обеспечивает двухмерную иррациональность, которой не хватает в алгебраическом уравнении.

d) Но если так, то тогда я спрашиваю себя: а если мне нужна трехмерная или четырехмерная иррациональность, то не значит ли это, что мое трансцедентное число отказывается быть корнем дифференциального уравнения? Другими словами, *число гипертрансцедентное не эквивалентно ли числу гиперкомплексному*, подобно тому как вещественная степень трансцедентности эквивалентна спирали, а мнимая ее степень — обыкновенному комплексному числу (и получаемой таким образом окружности)? Если это так, то тогда в нашем гиперкомплексном числе мы и получим дошедшую до последней диалектической зрелости и выраженности эманацию трансцедентного, которая зарождается в Эйлеровых тригонометрических выражениях мнимых степеней Неперова числа.

e) Поскольку до сих пор не существует исследования гипертрансцедентных чисел и еще нет указания их точных свойств, поставленный вопрос не может найти для себя того или другого ясного ответа. Если этот ответ будет отрицательным, то это будет значить, что наше учение о гиперкомплексах, отражая по своему содержанию давно известные истины математики (линейные алгебры, всеобщая алгебра) и потому едва ли уязвимое в этом отношении, окажется истиной только диалектического ума, еще не нашедшей своего математического соответствия (если иметь в виду связь гиперкомплексов с трансцедентностью).

6. а) Так или иначе, но гиперкомплексное число является с чисто диалектической точки зрения самым зрелым, самым сложным и самым развитым продуктом арифметического мышления. Когда мы говорили о внешнем инобытии числа (положительное, отрицательное, нуль), мы еще могли перейти к внутреннему инобытию (целое, дробное, бесконечное). Когда мы обозрели и внутренние, и внешние инобытийные судьбы числа, мы еще могли доискиваться той области, где то и другое совпадает (рациональное, иррациональное, мнимое). Но когда мы вместили в число не только просто его внутренно-внешнее инобытие, но и всякое инобытие, какое только для него возможно, то больше идти уже некуда. Алгебраическое число обобщило все предыдущие типы числа в том смысле, что поставило их лицом к миру с тем безбрежным инобытийно-иррациональным морем, которое их омывает. Оно запретило им бросаться в это море, но оно *сделало возможным* в него

бросаться. Потому оно — только потенция, потенция целости и потенция простой иррациональности. Трансцедентное число уже ринулось в это безбрежное море иррациональности, чтобы его охватить, чтобы его вместить в себя. И вот оно вместило его. Но оно вместило его сразу, целиком, как бы влило в себя, еще не размеривши его и не приведя в полный порядок. Однако тут рождается гиперкомплексное число, которое не только вмещает в себя всю бесконечность инобытийных бездн, но которое превращает ее в стройный, зрительный, фигурно-размеренный космос.

b) Дальше идти некуда. Все типы арифметического числа этим исчерпаны. Тут — последняя зрелость арифметического числа. Поэтому дальнейшее исследование возможно только уже на совершенно новой диалектической ступени, за пределами типов числа вообще. В самом деле, допустим, что число, вместившее в себя бесконечность своих становлений, продолжает вмещать в себя еще дальнейшие свои становления. В этом случае или данное становление вольется в бесконечность уже имеющихся становлений и в ней потонет, — тогда мы останемся при типе числа, который уже нами получен, и никакого нового типа не образуется; или новое становление возымеет совсем новое значение, которое может получиться, если новое становление не просто *вместится* в данное число, но *затронет самую его субстанцию*, вовлечет в становление само число настолько, что оно уже перестанет быть самим собою и превратится в новое число. В последнем случае мы, очевидно, покидаем область числа как такового, область тех или иных типов чисел, но переходим к проблемам *становления* самих чисел или к *арифметическим операциям.*

Так гибнет *тип* числа и рождается числовая *операция.*

§ 114. Дополнительные замечания к учению о типах числа.

1. Нарисованная в предыдущем диалектическая картина числовой типологии претендует, как и вообще диалектика, только на точность взаимосвязи категорий при определенной заданной точке зрения. При всякой другой точке зрения взаимосвязь будет иная. Нашу взаимосвязь числовых типов можно [обозреть] при помощи следующей схемы.

Перво-принцип = инобытие натурального ряда	Внешнее инобытие	Внутреннее инобытие	Внутренно-внешнее инобытие
Бытие	Положительное число	Целое число	Рациональное число
Становление (инобытие)	Отрицательное число	Дробь	Иррациональное число I. a) постоянное b) переменное c) непрерывное II. Прерывное III. Предел
Ставшее	Нуль	Бесконечность	Мнимое (комплексное) число
Выразительная форма	Алгебраическое число	Трансцедентное число	Гиперкомплексное число