достигнутого этим действием результата? Это ставшее есть то, что называется в математике *отношением* и — далее — *пропорцией*.

Когда мы имеем отношение (а виднее это на пропорции), то у нас не просто ряд чисел, взятых в своей непосредственной количественной значимости. Это — числа, которые между собою как-то связаны. Как же они связаны? Они связаны именно тем результатом, который бы получился, если произвести над ними определенное действие. Эти устойчивые числа несут на себе что-то подвижное и неустойчивое, что само по себе вовсе не связано обязательно только с этими числами. Пусть мы имеем пропорцию:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}\ldots$$

Что это значит? Это значит, что мы имеем, во-первых, ряд неподвижных чисел (числители и знаменатели этих дробей), а, во-вторых, эти числа поставлены здесь между собою в такую зависимость, что они несут на себе образ одного и того же арифметического действия, т. е. одного и того же числового становления. Вот это-то и есть наше ставшее, потому что только здесь мы действительно рассматриваем отдельные этапы арифметического действия в свете самого результата этого действия. Однако для этого не надо прибегать к пропорции или к нескольким пропорциям. Уже если имеется просто отношение $a:b$, то и здесь мы должны находить ставшее в анализируемом смысле, т. е. освещение устойчивых этапов определенного арифметического действия в свете результата этого действия.

4. Развернутую форму анализируемой категории *отношения* мы можем найти в том, что математики называют *рядом* (хотя чистый ряд как таковой, т. е. без диалектически положенного единства взаимоотношения его членов, мыслится еще до ставшего в пределах уже одного только становления, как это мы имели, напр., в § 19). Конечно, в данном месте нашего исследования речь может идти только о числовых, а не функциональных рядах (имея в виду наше понимание арифметики и алгебры в § 84). И типов этих рядов, очевидно, столько же, сколько и типов арифметических действий. Существуют арифметические, геометрические, степенные, биномиальные и пр. ряды. Во всех этих рядах мы имеем комбинации устойчивых чисел, но по этим числам пробегает определенное «отношение», получаемое как результат того или другого арифметического действия. Здесь, следовательно, цельный процесс определенного арифметического действия распался на ряд устойчивых изолированных чисел, которые, однако, скомбинированы соответственно типу данного действия.

Таков первый этап новой арифметической категории, возникающей вслед за категорией действия.

§ 121. Делимость чисел. Комбинаторика. Детерминанты.

1. а) Уже с первого взгляда видно, что полученная форма новой категории совсем не единственная. Мы имеем, следовательно, некую систему чисел, расположенных с точки зрения определенного отноше-

ния, царящего среди них. Система тут рассмотрена с точки зрения единообразного взаимоотношения элементов, входящих в систему. Но ясно, что возможно еще несколько и по крайней мере две других точки зрения на эту «ставшую» систему. Сначала система рассматривается *в целом*, без внимания к каждому отдельному типу. Говоря, напр., об «арифметической» или «геометрической» прогрессии, мы высказываемся сразу о всех ее членах без разбору. Важна только структура ряда, а она вполне определена первым членом ряда (или суммой ряда) и его «разностью» или «знаменателем». Но можно ведь выбрать любой отдельный член ряда и отвлечься от ряда в целом. Можно данную систему чисел привлекать только к какому-нибудь числу системы и рассматривать ее только с точки зрения этого последнего. Таким способом намечается иная диалектическая перспектива, хотя и вполне в пределах изучаемой нами сейчас арифметической категории, но все же — в явной антитезе к формулированному выше суммарному подходу. Так же как в логике, мы имеем кроме общих суждений еще и частные, кроме суммарных понятий еще и индивидуализированные, точно так же и в арифметике мы можем говорить об определенной системе чисел сразу, в целом, суммарно, и — о каждом элементе этой системы в отдельности, в его индивидуальной значимости. Раньше единство отношения элементов расплывалось по всей системе, теперь же оно притянуто к одному или нескольким ее элементам, в их отвлечении от системы в целом.

b) Но тогда сам собой подсказывается и *третий* подход. В логике кроме суждений общих и частных мы имеем еще суждения разделительные, в которых общность распределена между всеми отдельными ее представителями. Система чисел может быть рассматриваема так, что она в одно и то же время оказывается и общей, целой, и разделенной, индивидуализированной. Тогда вся система чисел положена перед нашими глазами со всеми своими элементами. Конечно, *все* эти элементы имелись и при суммарном подходе, но внимание там фиксировалось вовсе не на каждом из них, а значит, и не на всех них вместе. Только фиксируя каждый элемент системы в отдельности, мы можем потом получить и всю систему во всей ее едино-раздельности. Тут система чисел превращается в некую *таблицу*, которая всякий раз действует со всей едино-раздельностью своих элементов.

2. Система чисел с точки зрения единства их взаимоотношения, данная как безраздельная общность, есть отношение, пропорция и арифметический ряд. Та же система, но данная для каждого отдельного своего элемента или для нескольких, т. е. как различимая общность, создает еще новые категории, получающие в математике огромное значение. Тут, однако, тоже скрывается достаточная категориальная сложность, требующая внимательного анализа.

Итак, мы забываем о системе чисел в ее целом и привязываем ее только к какому-нибудь одному ее элементу. Таким образом, получается новая система чисел во главе с каким-нибудь одним числом, т. е. *какое-нибудь одно число рассматривается как система чисел*, как определенным образом составленное из целой системы чисел, как определенным образом вычисленное при помощи целой системы чисел. Конечно, всякое арифметическое действие тоже есть получение некоторого числа при помощи целой системы чисел. Но не будем путаться в трех соснах: под системой чисел понимается у нас не просто та или иная комбинация чисел, но *ряд, последовательность* чисел. Следовательно, в настоящем случае мы привязываем к данному числу известную последовательность чисел, составляем его при помощи ряда чисел или даже нескольких таких рядов. И вот здесь-то и возможно поразному смотреть на структуру числовых систем.

a) В течение нашего исследования мы уже много раз применяли к числу категории «смысла», «бытия» и «осмысленного бытия». «Смысл» арифметического числа есть, вообще говоря, его количество. Смысл пятерки заключается в том, что тут перед нами пять единиц, и больше ничего другого нет. Ту же самую пятерку мы можем рассматривать с точки зрения «бытия». Это значит, что нас тут интересуют самые *акты полагания*, из которых состоит пятерка. Оба подхода мы можем соединить и в один. Вот это разделение, которое кажется пустым в более отвлеченных теориях числа, становится весьма ощутительным, когда мы переходим к сложным и разветвленным структурам. Наше число, составленное при помощи целой системы (или ряда) чисел, можно брать именно чисто количественно или, так сказать, по его смысловому содержанию; можно его брать и по заключенным в нем актам полагания; можно, наконец, рассматривать его и по совокупности обеих точек зрения. Во всех трех случаях число будет составляться при помощи системы или рядов чисел.

b) Всмотримся в первый способ конструирования числа из системы чисел. Мы, стало быть, берем число в *его чисто количественной значимости* и спрашиваем себя, как его можно составить из того или иного ряда чисел, расположенных по тому или иному закону. Простейшей и яснейшей проблемой арифметики, относящейся сюда, является, очевидно, проблема *делимости* чисел. Иметь точное представление о делимости числа — это и значит рассматривать данное число при помощи целого ряда определенным образом подобранных чисел. В частности, вопрос о том, делится ли данное число N на q без остатка, есть, напр., вопрос о том, можно ли составить арифметическую прогрессию, в которой первый член есть 0, последний $=N$, а разность $=q$. Но и без этого ясно, что вопрос о том, каковы делители данного [числа], как оно из них составляется и даже делимо ли вообще данное число на другое данное, в диалектическом смысле есть не что иное, как *рассмотрение числа с точки зрения определенной системы других чисел, так или иначе связанных между собою*. Вся нелегкая проблема делимости чисел развивается именно под этой модификацией ставшей сущности арифметического числа.

c) Обратимся к числу как системе полаганий. Хотя актов полагания в числе столько же, сколько в нем и количественных единиц, но логически это совершенно разные категории. И мы сейчас же замечаем, сколь несхожую структуру мы получим, если остановимся именно на актах полагания. Итак, берем те *акты полагания*, из которых состоит данное число, и пробуем представлять их *как возникающие из определенной системы чисел*. Акты полагания единиц в числе тем отличаются от его количественного смысла, что они существуют и могут рассматриваться в своей полной изолированности, в то время как количество, будучи смыслом числа, обязательно берется как целое, как некая неделимая единичность, вне которой оно рассыпается и теряет свой смысл, т. е. перестает быть смыслом числа. Каждый акт полагания имеет значение сам по себе и, даже все вместе взятые, они остаются (как таковые, вне своего смысла) полной дискретностью. Поэтому привлечение некоей новой системы чисел для характеристики актов полагания, составляющих данное число, нисколько не затронет его количественно-смысловой значимости, а только произведет изменение в них как именно в них. Но что же это значит — произвести изменение в актах полагания как актах полагания? Это значит *производить из них тот или иной отбор и располагать их в том или ином порядке*. Раз количественная сторона числа остается без внимания, то остается только так или иначе комбинировать входящие в него акты полагания, или единицы. Другими словами, здесь мы наталкиваемся на тот отдел математики, который обычно носит название *комбинаторики*, или *учения о соединениях*. Мы можем иметь в виду тот или иной выбор элементов, тот или иной порядок элементов, наконец, то или иное объединение выбора элементов с их порядком и получить три общеизвестных типа «соединений» — *«размещения», «перестановки» и «сочетания»*.

Возьмем хотя бы «перестановки». Пусть у нас имеется P элементов, т. е. число P. Отвлечемся от того, что это именно P, а будем только оперировать с входящими в него элементами. И пусть нам скажут, что эти элементы, взятые в таком виде, должны быть составлены соответственно той или другой системе чисел. Какова бы эта система ни была, мы сможем произвести в них изменение именно в смысле того или иного их комбинирования, т. е. определенного отбора и порядка. Никакие иные характеристики нашего числа невозможны, раз мы с самого начала отбросили его чисто количественный смысл. Так с очевидностью вытекает, что комбинаторика есть рассмотрение чисел, взятых только в составляющих их актах полагания, с точки зрения той или иной системы других чисел.

3. По нерушимому закону диалектики количественный смысл и общечисловые акты полагания объединяются в нечто целое, и мы начинаем говорить о синтезе того и другого, об осмысленном акте полагания числа. Следовательно, число, рассматриваемое как появившееся из целой системы чисел (а значит, и операций), предстает и со всеми своими актами полагания, и со всей своей количественной значимостью. Мы получаем число, которое, во-первых, интересует нас уже само по себе, т. е. чисто количественно. А во-вторых, оно интересует нас как вычисленное на основании определенной системы чисел и, поскольку эта последняя основана на комбинировании актов полагания, как вычисленное на основании комбинаторного принципа. Это соединение числа как непосредственного количества с его комбинаторной исчисленностью есть *детерминант*.

a) Посмотрим, как *определяется* детерминант. Берется n^2 чисел, которые расставляются в виде следующей квадратной таблицы:

$$\begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}\,. \end{matrix}$$

В этой таблице a_{ik} первым значком — i обозначается номер строки, вторым, k — номер столбца. Составляем всевозможные произведения из всех этих чисел так, чтобы в каждое произведение входило по одному числу из каждой строки и из каждого столбца. Очевидно, мы получим произведение вида

$$a_{1p_1}, a_{2p_2}, \ldots, a_{np_n},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p$ есть определенным образом расставленные числа 1, 2, ..., n, причем число этих «перестановок», как известно, будет равно $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=n!$ Если в качестве основного порядка «перестановки» взять прямую последовательность 1, 2, 3, ..., n и под инверсией (беспорядком) понимать то явление, что большее число стоит в перестановке раньше меньшего, то мы получим в одних произведениях четное число инверсий во вторых значках, в других нечетное. Возьмем первые со знаком плюс и вторые со знаком минус. Тогда сумма всех этих произведений и образует детерминант n-го порядка. Обозначая через $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ число инверсий в перестановке $p_1, p_2, \ldots, p_n$, мы можем определить указанный детерминант как

$$\sum_{(p_1, p_2, \ldots, p_n)} (-1)^{[p_1, p_2, \ldots, p_n]}\, a_{1p_1}, a_{2p_2}, \ldots, a_{np_n}.$$

Если имеется детерминант второго порядка:

$$\begin{matrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22}, \end{matrix}$$

то он равен $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Здесь число, равное детерминанту, состоит из алгебраической суммы двух произведений, из которых оба имеют первыми значками основную перестановку, т. е. (1, 2), а вторыми значками — две возможные тут перестановки из двух элементов — (1, 2) и (2, 1), причем второе произведение как содержащее инверсию во вторых значках (2, 1) взято с минусом. То же самое легко усматривается на детерминанте 3-го порядка, который, очевидно, будет равен следующей алгебраической сумме произведений:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Таково обычное определение детерминанта.

b) Что же мы тут усматриваем с точки зрения *категориальной структуры*? Мы находим прежде всего, что некое число (которому равен детерминант) составлено здесь из некоей системы чисел, рассмотрено в свете этой системы, вычислено при ее помощи. Значит, уже по одному этому детерминант вполне правильно отнесен нами к категории ставшей сущности арифметического числа. Всматриваемся, что же это за система чисел и как она составлена. Оказывается, наше число представлено здесь как алгебраическая сумма некоторых произведений. Это значит, что наше число взято нами в своем количественном содержании; и то, что мы получаем в результате применения действующей тут системы чисел, есть непосредственное количество. Другими словами, здесь мы имеем структуру того же типа, какую имели при непосредственном вычислении арифметического ряда (напр. в арифметической прогрессии), только что отдельные слагаемые составлены здесь по более сложному закону, чем в обыкновенных арифметических рядах. Остается, следовательно, учесть закон составления этих слагаемых, и мы исчерпаем категориальную структуру детерминанта.

Что же это за закон? Возьмем ради простоты рассуждения детерминант 3-го порядка. В этом случае наши произведения будут состоять каждое из трех сомножителей, которые будут составляться так. Сделаем все перестановки из трех элементов. Их будет шесть:

$$\begin{array}{c} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \\ 1, 3, 2 \\ 2, 1, 3 \\ 3, 2, 1. \end{array}$$

Примем за основную перестановку первую — 1, 2, 3. Сделаем так, чтобы эта основная перестановка имела значение во всех шести перестановках, чтобы все они были на нее нанизаны. Тогда и получаем закон составления этих слагаемых из произведений:

$$\begin{array}{c} 11, 22, 33 \\ 12, 23, 31 \\ 13, 21, 32 \\ 11, 23, 32 \\ 12, 21, 33 \\ 13, 22, 31. \end{array}$$

Смысл этого распределения заключается в том, чтобы каждая из шести перестановок обязательно имела смысл основной перестановки 1, 2, 3, чтобы каждый элемент независимо от своего собственного значения имел бы также значение и своего положения в перестановке 1, 2, 3.

с) Нетрудно заметить, что количественно-смысловое значение нашего общего числа и участие в нем разной расставленности актов полагания, т. е. его «смысл» и его «бытие», построены по одному и тому же закону, по закону диалектической триады. *Количество* дано в виде суммы, следовательно, имеется в виду некоторая положенность чисел; и эти слагаемые суть некоторого рода произведения, следовательно, положенность перешла тут в свое инобытие, поскольку (§ 117) всякое произведение есть всегда некое воспроизведение одного в ином. Но если каждое слагаемое есть произведение, то все наше число есть сумма произведений. Это третий шаг в определении количественного смысла изучаемого числа. С другой стороны, переходя к изучению *актов полагания*, из которых составляется наше число, мы прежде всего видим, что тут признается за данный некоторый определенный порядок актов полагания (выбор этот вполне произволен), а затем тут же перебираются все возможные инобытийные виды этого порядка, с которыми, однако, основной порядок остается неразрывно связанным. Таким образом, три диалектических шага вполне различимы в структуре как количественного содержания изучаемого числа, так и актов его полагания.

d) Остается еще одна и последняя идея, чтобы детерминант открыл нам свой логический секрет. А именно, мы взяли в нашем числе чисто количественную сторону и чисто фактическую, акты его полагания. Само число, однако, не есть ни только абстрактное количество без осуществляющих его актов полагания, ни только слепые акты полагания без осмысливающего их количества. Но не сразу понятно, как акты полагания могут в данном случае определить количество. Конкретно вопрос стоит так: как каждое из наших произведений определяется входящими в него актами полагания? Если этот вопрос будет решен относительно каждого произведения в отдельности, то тем самым он будет решен и относительно всей суммы произведений, т. е. относительно всего изучаемого нами числа.

Вопрос ставится не просто об отличии одного порядка сомножителей от другого, так как этот вопрос уже нами разрешен при помощи использования триадического шага в области актов полагания, т. е. при помощи получения всех возможных перестановок. Речь идет о том, как данный порядок сомножителей, взятый в целом, влияет на получаемое при этом количество, т. е. на их произведение. Другими словами, это произведение мыслится нами сейчас как неизвестное, как произведение каких-то неизвестных, и требуется узнать, как на это общее неизвестное повлияет тот или иной порядок этих неизвестных сомножителей.

Спросим себя: что означает тут та или иная перестановка сомножителей? И даже поставим вопрос еще у́же. Не надо обсуждать общее отличие одной перестановки от другой, а достаточно пока отдавать себе отчет в простой замене одного сомножителя другим, носящей в теории детерминантов название транспозиции. В чем, стало быть, смысл транспозиции? Чтобы наш ответ на этот вопрос не показался странным, рассмотрим эту замену сомножителей в том их смысле, какой он имеет чаще всего для детерминантов, т. е. в смысле коэффициентов при неизвестных системы уравнений. Пусть, напр., мы имеем

$$a\frac{c'-b'y}{a'}+by=c;\ ax+by=c;\ a'x+b'y=c.$$

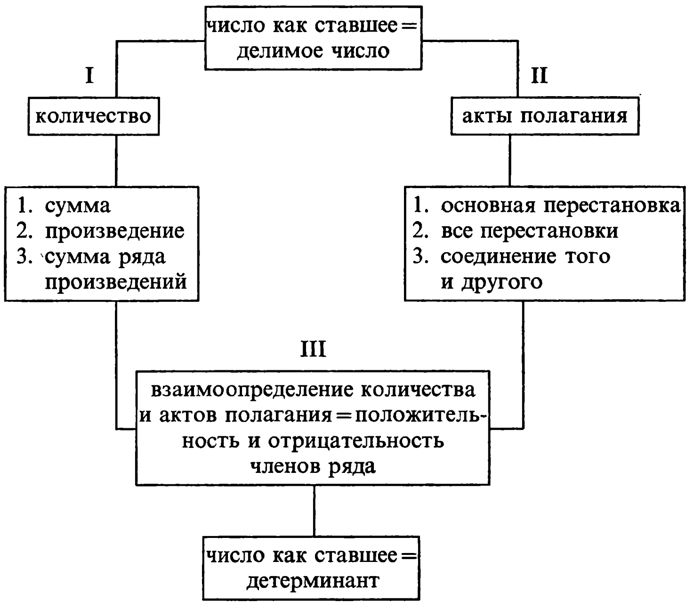
Определяя из третьего уравнения $x=\dfrac{c'-b'y}{a'}$ и подставляя его в первое уравнение, мы *заменяем* одно неизвестное другим. В чем значение этой замены? В том, что мы исключили одно неизвестное из двух и тем получили возможность его найти. Но сделали мы это только благодаря тому, что на место одного неизвестного стало другое неизвестное, *с другим знаком*. И значит, определить одно неизвестное в этом случае есть не что иное, как некоторым образом превратить другое неизвестное в это первое с обратным знаком. Замена одного сомножителя другим в наших произведениях означала как раз то, что мы переходили к нахождению, к определению этих неизвестных сомножителей. Если теперь мы будем считать нашу основную перестановку 1, 2, 3 положительной, то всякая другая перестановка будет положительной или отрицательной в зависимости от того, сколько у нас будет транспозиций. Если отсутствие всякой транспозиции оставляет перестановку положительной, то одна транспозиция сделает ее отрицательной, вторая, продолжая менять ее знак на обратный, вернет ее опять к положительности, а третья по той же причине сделает ее вновь отрицательной. Словом, тут мы приходим к той особенности детерминанта, которую мы отметили выше в его определении: если число инверсий в перестановке четное, то она положительная, а если это число нечетное, то она отрицательная.

Таким образом, диалектическая сущность того, что половина наших произведений оказалась отрицательной, сводится как раз к тому, что в данном случае мы их понимаем как неизвестные, которые должны быть найдены, определены при помощи той или иной перестановки их сомножителей, т. е. *отрицательность этих произведений есть результат того, что общеколичественная сторона нашего анализируемого числа и система актов его полагания вступили одна с другой во всестороннее диалектическое взаимоопределение*. Это сразу становится видно, как только мы воспользуемся детерминантами для решения системы уравнений. Минусы, с которыми входит половина всех произведений, составляющих детерминант, как раз определены тем, что мы переносили в разных уравнениях неизвестные с одной стороны на другую и потом подставляли в другие уравнения, перенося их после необходимых выкладок, может быть, и еще раз в другую сторону, чтобы отделить неизвестные от известных величин, получившихся в результате подстановок; другими словами, эти минусы вызваны именно тем, что мы приступили к решению уравнений и нахождению неизвестных, т. е. вознамерились найти непосредственный количественный смысл неизвестных при помощи определенной группировки их коэффициентов.

4. С внешней стороны детерминант производит довольно громоздкое впечатление. Этому способствуют также многие технические способы оперирования с детерминантами, находимые нами в математической практике. Напр., правило Сарруса для вычисления детерминанта удивляет своей внешней механичностью. Такова же и теорема Крамера для решения системы уравнений при помощи детерминантов. Внешняя громоздкость увеличивается учением о минорах, об адъюнктах, о сложении и умножении и т. д. Тем не менее должен быть какой-то простейший логический принцип для всей этой технической сложности, какая-то простейшая диалектическая категория, которая бы позволяла обнять все эти многочисленные числа и операции в одном простом единстве. Этот принцип и эту категорию мы и находим в синтезе

количественно-смысловой и количественно-фактической сторон числа, в синтезе чистого количества с чистыми актами полагания, причем то и другое появляется здесь в диалектически развитом виде. Берется чистое количество в развитом виде, берется акт полагания в развитом виде, и дается синтез того и другого тоже в развитом виде. Диалектически же развитой мы считаем ту смысловую установку, которая прошла по крайней мере три диалектических шага.

Отсюда понятной является и нижеследующая *схема диалектического развития понятия детерминанта.* В этой схеме категории I, II и III и категории 1, 2, 3 связаны между собою элементарной диалектической триадой. Все же вместе связано тут как то целое, которое появляется в результате диалектического взаимоопределения двух главных элементов числа — количественного смысла и актов полагания, принципиально таящихся во всяком числе, но здесь призванных создать из своего взаимоопределения новую диалектическую категорию.



5. Необходимо заметить, что детерминант *можно понимать и не чисто арифметически.* Под арифметикой (§ 81) мы понимаем оперирование над непосредственными значениями чисел в отличие от их функциональных отношений, относимых нами к алгебре и анализу. Детерминанты могут в этом смысле иметь чисто арифметическую природу. Но существуют еще *функциональные детерминанты,* место рассмотрения которых в алгебре. Существуют детерминанты *бесконечного порядка,* у которых строки или столбцы обладают признаками сходящегося

ряда. Место этих детерминантов, конечно, в анализе, равно как и рассмотрение детерминантов в целях решения системы уравнений относится к алгебре (в случае обыкновенных линейных уравнений) или к анализу (в случае дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами).

§ 122. Матрицы.

1. Детерминант представляет собою наиболее зрелый диалектический продукт ставшей сущности арифметического числа, понимаемого как отдельное число. Однако ставшая сущность числа отнюдь не есть только отдельное число. Наоборот, ставшая сущность, как мы видели в § 120, есть остановившееся становление числа, а таковое всегда предполагает некоторую как бы объемность, т. е. множественность и раздробленность, или комбинацию, систему чисел. Детерминант возник на почве диалектики *отдельного* числа, а ставшая сущность числа есть комбинация чисел. Отсюда сам собой возникает переход от безразличной общности комбинации к ее единораздельной системе. И теперь должна быть на очереди не просто система чисел вообще, для которой известен только общий принцип ее построения (отношение, пропорция, ряд), но и система чисел как именно система, т. е. система во всей положенности своих элементов. С другой стороны, поскольку наша диалектика уже достигла зрелости детерминанта, новая категория должна вместить в себе достигнутую ступень и новое понятие должно быть образовано на основе учения о детерминанте. Такой категорией и является *матрица.*

2. a) После изучения детерминанта матрица оказывается и чем-то простым, уже известным, и чем-то безусловно новым. С одной стороны, матрица почти ничем не отличается от детерминанта. Она есть таблица чисел, но и детерминант пишется в виде таблицы чисел. И если из матрицы можно получить известное количество детерминантов, то и всякий детерминант возможен только потому, что существует определенная матрица. Однако, с другой стороны, между детерминантом и матрицей существует и *огромное различие.* В основном оно сводится к тому, что детерминант всегда есть *определенное число,* матрица же есть *система* чисел. Это и заставило нас детерминант объединять с комбинированной представимостью *отдельного* числа, а матрицу—с числом, понимаемым *как система.* Детерминант есть отдельное число как система чисел, матрица же есть система чисел как система чисел. Это сразу накладывает неизгладимый математически-диалектический след на понятие матрицы, не только расширяя прежнее понятие детерминанта, но и дополняя его некоторыми совершенно не бывшими до того особенностями.

b) Если бы мы захотели представить себе более конкретно диалектическую сущность матрицы, мы должны [были] бы выдвинуть тут на первый план понятие *комплекса,* уже хорошо известное нам из теории мнимостей (§ 105) и из теории гиперкомплексных чисел (§ 113). Попробуем в этом разобраться.

Мы можем рассматривать комбинацию вещей, состоящую, напр., из 5 яблок, 3 орехов и 2 конфет. Это будет некоторая система чисел, которые в старой арифметике называли именованными. Но мы можем