ряда. Место этих детерминантов, конечно, в анализе, равно как и рассмотрение детерминантов в целях решения системы уравнений относится к алгебре (в случае обыкновенных линейных уравнений) или к анализу (в случае дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами).

§ 122. Матрицы.

1. Детерминант представляет собою наиболее зрелый диалектический продукт ставшей сущности арифметического числа, понимаемого как отдельное число. Однако ставшая сущность числа отнюдь не есть только отдельное число. Наоборот, ставшая сущность, как мы видели в § 120, есть остановившееся становление числа, а таковое всегда предполагает некоторую как бы объемность, т. е. множественность и раздробленность, или комбинацию, систему чисел. Детерминант возник на почве диалектики *отдельного* числа, а ставшая сущность числа есть комбинация чисел. Отсюда сам собой возникает переход от безразличной общности комбинации к ее единораздельной системе. И теперь должна быть на очереди не просто система чисел вообще, для которой известен только общий принцип ее построения (отношение, пропорция, ряд), но и система чисел как именно система, т. е. система во всей положенности своих элементов. С другой стороны, поскольку наша диалектика уже достигла зрелости детерминанта, новая категория должна вместить в себе достигнутую ступень и новое понятие должно быть образовано на основе учения о детерминанте. Такой категорией и является *матрица.*

2. a) После изучения детерминанта матрица оказывается и чем-то простым, уже известным, и чем-то безусловно новым. С одной стороны, матрица почти ничем не отличается от детерминанта. Она есть таблица чисел, но и детерминант пишется в виде таблицы чисел. И если из матрицы можно получить известное количество детерминантов, то и всякий детерминант возможен только потому, что существует определенная матрица. Однако, с другой стороны, между детерминантом и матрицей существует и *огромное различие.* В основном оно сводится к тому, что детерминант всегда есть *определенное число,* матрица же есть *система* чисел. Это и заставило нас детерминант объединять с комбинированной представимостью *отдельного* числа, а матрицу—с числом, понимаемым *как система.* Детерминант есть отдельное число как система чисел, матрица же есть система чисел как система чисел. Это сразу накладывает неизгладимый математически-диалектический след на понятие матрицы, не только расширяя прежнее понятие детерминанта, но и дополняя его некоторыми совершенно не бывшими до того особенностями.

b) Если бы мы захотели представить себе более конкретно диалектическую сущность матрицы, мы должны [были] бы выдвинуть тут на первый план понятие *комплекса,* уже хорошо известное нам из теории мнимостей (§ 105) и из теории гиперкомплексных чисел (§ 113). Попробуем в этом разобраться.

Мы можем рассматривать комбинацию вещей, состоящую, напр., из 5 яблок, 3 орехов и 2 конфет. Это будет некоторая система чисел, которые в старой арифметике называли именованными. Но мы можем отвлечься от яблок, орехов и конфет и вообще от всяких вещей, но все же продолжать рассматривать соответствующие числа *как состоящие из различных единиц*. Мы забудем о вещах, но мы все же будем помнить, что пятерка состоит у нас не из тех единиц, из каких тройка, а тройка — не из тех, из каких двойка. Это помешает нам складывать $5+3+2$ в одну безразличную сумму, как мы не могли без всяких предварительных условий попросту сложить 5 яблок, 3 ореха [и] 2 конфеты. Такие числа называются, вообще говоря, комплексными и записываются так, чтобы их система не поглощала каждое из них до полного безразличия, но чтобы каждое оставалось самостоятельным. Наше комплексное число мы запишем в данном случае примерно так: (5, 3, 2).

Примеры этих комплексов мы находили в теории мнимостей, где величина $a+bi$ была такова, что невозможно было не считаться с индивидуальными особенностями тех единиц, из которых состоит a и состоит bi,— откуда и соответствующая запись. В теории гиперкомплексных чисел мы нашли т. н. кватернионы (§ 113), которые, являясь комплексом четырех разных единиц, так и действовали у нас со всей этой несводимостью одной единицы на другую.

Вот таким же точно «числом», вернее, системой чисел является и *матрица*. Она, конечно, не есть безразличное собрание каких угодно чисел. Она все же есть нечто *целое*, которое во всех своих элементах управляется определенным законом. Однако это не то целое, каким является, напр., арифметическая или геометрическая прогрессия и где целое не дано конкретно во всех своих элементах, а только в известном законе его построения. Матрица — это есть система чисел, которая хотя и является чем-то закономерно-целым, но в которой каждое отдельное число положено не просто принципиально, но во всей своей фактической индивидуальности.

3. а) Отсюда и *основные свойства* матрицы. Все они связаны именно с индивидуальным значением каждого ее элемента.

Матрица нулевая тогда, когда все ее элементы равны нулю. Две матрицы считаются равными не тогда, когда равны числа, составленные тем или другим способом из их элементов (как в детерминантах), но *когда одинаковы все их соответствующие элементы* при равном числе горизонталей у каждой и равном числе вертикалей у каждой. Сложить одну матрицу с другой — это значит сложить их соответствующие элементы. Можно даже сказать, что матрица есть в некотором роде *векторное* число, поскольку арифметика способна отличать вектор от скаляра.

Умножить матрицу на обыкновенное скалярное число — значит умножить на него каждый ее отдельный элемент. Здесь же и все обыкновенные законы счета. Оригинально (как и вообще в комплексных числах) умножение матрицы на матрицу. Умножить в этом смысле — значит составить новую матрицу так, что каждый ее элемент на пересечении i-й горизонтали и j-й вертикали получится, если каждый элемент i-й горизонтали первой матрицы умножили на соответствующий элемент j-й вертикали второй и сложили все полученные этим способом отдельные произведения (имеются в виду сомножители и произведения одного и того же порядка). В умножении матриц, вообще говоря, *не* *соблюдается коммутативный закон*; и это наиболее характерное для матрицы свойство мы уже имели случай воочию видеть при рассмотрении умножения кватернионов (§ 113). В то же время здесь действительны ассоциативный и дистрибутивный законы (как и вообще в комплексах).

В этом же ряду особенностей матричного исчисления необходимо отметить то, что *произведение матриц может обращаться в нуль* (матрица равна нулю, когда все ее элементы равны нулю) *даже в том случае, когда матрицы-сомножители и не суть нули.* Напр., при любых a и b

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0.$$

Это обстоятельство вполне аналогично комплексной области, относительно которой Вейерштрасс доказал даже следующую теорему: при обычных законах сложения и умножения, когда, кроме того, нуль есть единственный делитель нуля, *комплексных чисел с тремя единицами не существует* (так как они сводятся или к вещественным числам, или к комплексным типа $a+bi$). По этой теореме, стало быть, выходит, что если вообще существует комплексное число больше, чем с двумя единицами, то тут при коммутативности умножения существуют делители нуля, отличные от нуля, т. е. деление тут неоднозначно. Фробениус и Пирс расширили теорему Вейерштрасса в том смысле, что доказали единственность гиперкомплексной системы при некоммутативности умножения, но с однозначностью деления; эта система — кватернионы с вещественными коэффициентами. Стало быть, только числа типа $a+bi$, строго говоря, могут считаться допустимыми в арифметике, если не придавать ей матричного расширения. Однако матрицы при всей их важности для разных отделов математики и естествознания и связанности с ними и по своей структуре (таковы, напр., функциональные матрицы) все же коренятся в арифметике как в сфере, вообще говоря, непосредственной значимости чисел.

b) Матрицу можно понимать как совокупность детерминантов. Имея квадратную матрицу с n^2 элементами, можно получить один детерминант n-го порядка и известное количество детерминантов низшего порядка, которое легко вычисляется, если принять во внимание, что число детерминантов 1-го порядка равно n^2 (или $m \cdot n$, если матрица прямоугольная), число детерминантов 2-го порядка равняется квадрату числа сочетаний из m по 2 (или $C_m^2 \cdot C_n^2$, если $m<n$) и т. д. Матрица имеет свой *ранг*. Матрица считается ранга r, если в ней есть по крайней мере один отличный от нуля детерминант, в то время как прочие детерминанты в ней высшего порядка все равны нулю. Всякая матрица ранга r есть сумма r матриц ранга 1. Таково формальное отличие матрицы от детерминанта, становящееся внутренно понятным только с указанным привлечением «векторного» представления.

4. Но особенно важно для понимания матрицы и детерминанта еще одно обстоятельство, играющее большую роль в математической практике.

a) Именно, общая категориальная основа изучаемой области арифметики определяет собою одну особенность, на которую мы не указывали и которая получит свое настоящее значение в алгебре. Дело в том, что ставшее, полагая твердые границы для становления, впервые реально осуществляет диалектику *постоянства, неизменности.* Когда мы имеем дело с числом как таковым (натуральные числа, разные типы числа), мы хотя и имеем перед собой нечто устойчивое, но эта устойчивость тут еще не положена диалектически; она существует в числе вместе со всеми другими категориями. Также и в отношении арифметических действий нужно сказать, что хотя они и существуют благодаря становлению, т. е. благодаря некоторого рода движению, действию, изменяемости, но сама изменяемость тут не утверждена специфически. Только когда неизменное-в-себе и изменчивое-в-себе, т. е. бытие и становление, числа и действия, объединятся в одно общее диалектическое обстояние, мы тогда сможем говорить в собственном смысле об изменяемости и неизменности. Другими словами, здесь мы наталкиваемся на бытие, в котором то и другое *положено, утверждено.* Выражаясь математически, *ставшее* впервые делает возможным суждение об *инвариантности.*

Пусть дан тот или иной геометрический образ. Сам по себе он, конечно, неподвижен. Однако, чтобы эта неподвижность была действительно диалектически положена, необходимо, чтобы существовала такая сфера, где эта неподвижность четко противополагалась подвижности. Только тогда из взаимоопределения этих явлений мы получаем источник фиксации того и другого. Именно, пусть наш геометрический образ как-нибудь меняется, испытывает *преобразования.* Если при этом нечто остается в нем неизменным и мы видим, что́ именно, то тогда, ясно, неизменное у нас окажется зафиксированным, диалектически утвержденным. И если раньше этот момент был неподвижен *в себе,* то теперь он уже неподвижен в себе и *для себя,* что стало возможным только потому, что он предварительно оказался неподвижным для иного. Пусть, например, мы заметили, что при любых увеличениях и уменьшениях радиуса окружности отношение самой окружности к диаметру остается неизменным. Стало быть, это есть некоторый инвариант. Пусть мы имеем два полинома с двумя переменными, и пусть эти последние потерпели некоторое преобразование. Как бы мы ни меняли в этом смысле наши полиномы, оказывается, что, произведя соответствующие вычисления, мы найдем, что некоторая функция коэффициентов наших полиномов остается совершенно неизменной. Она, стало быть, инвариант. И т. д.

И вот спрашивается: если категория *ставшего* приводит нас к понятию инвариантности, то не имеет ли ближайшее отношение к этому последнему и теория детерминантов и матриц, которая тоже ведь возникла на диалектической категории ставшего?

b) Пожалуй, несколько удивляет то обстоятельство, что теория инвариантов сравнительно слабо связана с детерминантами и матрицами или что по крайней мере эта связь не выдвигается на подобающее место. Нужно прямо сказать, что с диалектической точки зрения *связь* *инвариантов с детерминантами и матрицами самая непосредственная*, как бы математики ни сводили эту связь на удобство вычислительных схем. Если не входить в подробности, изложенные выше, а взять самый общий признак детерминанта, то ведь это есть совмещение двух слоев — количественно-смыслового и фактически полагающего. Но как раз это совмещение и обусловливает собою указанную выше категорию инвариантности. Самое суждение об инвариантности делается возможным только в то мгновение, когда смысл, перешедший в становление и фактическое осуществление, вдруг остановился и, перейдя в ставшее, в факт, превратился в ту устойчивость, на фоне которой стало доступно судить об изменяющихся моментах. Детерминант и матрица суть именно такие диалектические формы с двойным накладыванием; в них определенное число или система чисел даны *как осуществленные* при помощи системы чисел, т. е. уже в самом их понятии заложена некоторая инвариантность: неизменное число, являющееся детерминантом, осуществлено в результате некоей процедуры комбинирования чисел, являясь неизменным среди изменчивого. Но тут, в детерминанте и матрице, это отношение неизменного и изменяемого дано только в категориальном виде, т. е. в фиксированном, в застывшем виде, так что изменяемые элементы даны здесь не в процессе своего изменения, но в устойчивом результате этого изменения.

Отсюда само собой делается понятным то, что инвариантная значимость детерминанта и матрицы выяснится только тогда, когда мы *заставим их функционировать в какой-нибудь иноприродной среде* и посмотрим, как меняется структура и числовое значение этих математических образований в зависимости от воздействия этой среды.

5. Два-три примера из этой области будут нелишними.

а) Популярнее всего здесь учение о т. н. линейной зависимости и *линейном преобразовании*. Линейная зависимость есть не что иное, как обобщение понятия о пропорциональности. Линейным же преобразованием с n переменными называется преобразование такого типа:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Эти $(x_1, \ldots x_n)$ мы можем понимать, во-первых, как разные измерения n-мерного пространства, так что указанное преобразование будет говорить о переходе одного вектора данного пространства в другой вектор того же пространства. Эти же переменные, далее, можно понимать как координаты точки того же пространства n измерений, так что наше преобразование есть переход от одной точки к другой. Можно, в-третьих, считать, что переменные являются компонентами одного и того же вектора при разной системе координат. Тогда наше преобразование есть преобразование самих координат.

Спросим себя: каково то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы *т систем* с n постоянными находились между собою в *линейной зависимости*. Оказывается, что в случае когда $m \leqslant n$, то

m систем с n постоянными только тогда линейно зависимы, *когда все определители m-го порядка матрицы*

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{Vmatrix}$$

равны нулю. Мы не будем отвлекаться доказательством этой теоремы, как оно ни просто, но отметим этот удивительный факт, который, к сожалению, всегда понимается слишком количественно и, так сказать, вычислительно: матрица со своими детерминантами явилась здесь некоторым *инвариантом*, потому что эти (x_1, ... x_n) могли ведь иметь какое угодно значение, но раз составленные из них системы линейно зависимы, то определенная комбинация их всегда равна нулю. Опуская случай $m>n$ (так как здесь системы будут всегда линейно зависимы), укажем на то, что линейная зависимость имеет и вполне реальный количественный смысл, так что указанное матричное условие определяет собою и некоторые геометрические инварианты. Напр., две точки тогда, и только тогда, линейно зависимы, когда они совпадают; три точки тогда, и только тогда, линейно зависимы, когда они лежат на одной прямой; четыре точки — если они лежат на одной плоскости; пять и более точек всегда линейно зависимы. Везде тут будут иметь значение указанная матрица и ее детерминанты.

Если теперь обратиться к линейному преобразованию и обычным порядком составить квадратную таблицу коэффициентов той системы уравнений, которой определяется преобразование (называя ее матрицей преобразования), то окажется, что сумма квадратов элементов каждой строки и столбца равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух разных строк или разных столбцов равна нулю. Пусть у нас матрица третьего порядка, и пусть ее элементы суть косинусы углов, образованных новыми осями со старыми. Тогда соответственно мы получаем некоторый инвариант при координатных преобразованиях. Допустим, что координаты неподвижны, а движется само пространство как целое. Тогда это преобразование будет определяться все теми же тремя уравнениями и соответствующим определителем (+1). Определитель (−1) будет указывать не только на движение, но и на симметрию относительно начала. Очень важна тут еще и такая теорема: если от переменных x к переменным x' переходим [с] помощью линейного преобразования с матрицей a и далее к x'' с матрицей b, то x'' можно и прямо получить из x при помощи линейного преобразования с матрицей ba. Как видим, параллелизм между линейными преобразованиями и матрицами идет очень далеко.

Можно показать, что если под инвариантом понимать только рациональные функции координат и коэффициентов (при однородности тех и других), то в этих функциях всегда будет общий множитель, зависящий только от коэффициентов подстановки и всегда являющийся *той или другой степенью определителя подстановки.* Такие инварианты, как известно, называются относительными, а показатель упомянутой степени носит название *веса* инварианта. Задаваясь вопросом о нахождении всех таких инвариантов, мы опять сталкиваемся с детерминантами. Пусть, напр., на плоскости имеется несколько точек. Оказывается, что простейшие инварианты в этом случае можно получить при помощи детерминантов второго порядка, составленных из заданных координат этих точек. Эти детерминанты дают и полную систему инвариантов.

Обладая двумя точками на плоскости: 1, 2, мы получаем основной инвариант в виде двойной площади треугольника с точками 0, 1, 2. А площадь треугольника и есть половина детерминанта, составленного соответствующим образом из кооординат этих точек. Беря большее число точек и разыскивая полную систему аффинных инвариантов, мы найдем, что она состоит из всех их детерминантов. Если остановиться на проективном преобразовании (*дробно*-линейные подстановки) и ограничиться, напр., опять двумя переменными, т. е. плоскостью, то при абсциссе на прямой $x=\frac{\xi}{\tau}$ и p парах этих переменных детерминант

$$\Delta_{ik}=\begin{vmatrix}\xi_i & \tau_i\\ \xi_k & \tau_k\end{vmatrix} \qquad (i,\ k=1,\ \dots\ p)$$

явится тоже полной системой основных инвариантов. Но так как числовое значение Δ_{ik} тут отпадает, то проективное значение остается за $\Delta_{ik}=0$. А это значит, что i и k совпадают, каковое совпадение точек мы уже выше отметили как вытекающее из их линейной зависимости.

Даже различие трех основных геометрий (ср. выше, § 71) совсем не обходится без детерминантов. Имея в виду квадратичную форму

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\varepsilon\delta^2,$$

которая при $\varepsilon=0$ характеризует Эвклидову геометрию, при $\varepsilon>0$ — геометрию Лобачевского, а при $\varepsilon<0$ — Риманову, мы находим, что детерминант этой формы для неэвклидовой геометрии

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-\varepsilon,$$

вообще говоря, отличен от нуля; он либо положительный, либо отрицательный.

Отметим еще, что ранг матрицы точек оказывается тоже инвариантом по отношению к линейным преобразованиям. Также и ранг матрицы линейных полиномов по отношению к их линейным преобразованиям. И вообще алгебра дает большой материал для связывания матриц с инвариантами преобразований.

b) Этих примеров достаточно, чтобы иллюстрировать глубочайшую связь детерминантов-матриц с инвариантами. Известный английский математик, много потрудившийся в этой области, называл инварианты прямо «гипердетерминантами», и только Сильвестр стал называть их теперешним именем. Ф. Клейн же утверждает, что теория детерминантов вообще есть основа для теории инвариантов. Эта интимная связь обеих ветвей математики объяснена у нас диалектически как результат одинакового категориального происхождения того и другого. И детерминант-матрица, и инвариант возникли на почве одной и той же категории *ставшей сущности* числа, поскольку и то и другое предполагает совокупное полагание неизменно количественных и изменяющихся фактических сторон числа в один внутренно измененный факт количества, в комбинированное ставшее, или в числовую систему как в такую.

6. Матрица заканчивает собою развитие общеарифметической категории ставшего. Это ставшее, или наличное, бытие всегда является дробимым единством, координированной раздробленностью, так как оно всегда только фиксирует и делает устойчивыми этапы, пройденные становлением при всей прихотливости направлений этого последнего. Поэтому *система чисел* есть самая первая и необходимая характеристика арифметически ставшей сущности числа. Речь может идти тут, стало быть, только о разных принципах этой системы, но сама системность, сама скомбинированность чисел всегда остается в арифметике для категории ставшего безусловно необходимой. Но матрица есть не просто система чисел. Это такая система, которая дана именно как *система* (а не как, напр., одно число, или какое-нибудь отношение чисел, или закон системы). Но как раз это обстоятельство и свидетельствует о том, что мы здесь уже у границы всей той арифметической области, которая определена категорией ставшего. Когда подобный принцип выявляет себя не частично и раздельно, но себя как именно себя, т. е. целиком и полностью, это значит, что уже исчерпана та область, которая была определена этим принципом. И следовательно, продолжая нагнетать тот же принцип в прежнем направлении, мы наталкиваемся на «критическую точку», на диалектический «узел», который изменит наше диалектическое движение на обратное и заставит покинуть категорию матрицы и вместе с тем вообще категорию ставшей сущности числа.

В самом деле, пусть мы захотим, чтобы понятие системы чисел, к которому мы пришли вместе с категорией ставшего, возымело еще большее значение. Она и без того проявила себя как именно себя. Но пусть мы захотели, чтобы она проявила себя еще больше. Что это могло бы значить? Это может значить только то, что она будет проявлять себя не просто как себя, но уже проявлять *иное* как себя, или себя как *иное*, ибо кроме источника проявления есть только то, что именно не есть самый источник, т. е. *иное*, чем источник. Итак, мы хотим теперь, чтобы система чисел проявляла себя как систему чисел *в ином*, чтобы она определяла не себя как систему, а иное как систему чисел. Но тогда получится, что мы получим *несколько разных систем чисел*, управляемых одним законом, получим целый ряд рядов, целый ряд классов чисел, управляемый единым законом. Закон этот мы уже не будем называть «отношением чисел», как мы поступали в пределах категории ставшей сущности. Закон этот есть то, что со времен Гаусса носит название *композиции*, охватывая собою несколько тонких и достаточно глубоко разработанных математических дисциплин.