V. УЧЕНИЕ О КОМПОЗИЦИЯХ (ВЫРАЖЕННАЯ СУЩНОСТЬ ЧИСЛА)

§ 123. Общая ориентация.

1. Поскольку учение о композициях есть заключительный отдел арифметики, выявляющий наиболее зрелые в диалектическом смысле формы числа, а именно выразительные формы, постольку надо особенно тщательно усвоить себе *понятие композиции*, связывая его по возможности в единое целое со всей арифметикой вообще.

a) Арифметика вся вырастает на перво-принципе, который у нас носит название единицы. В чистом виде единица вполне аналогична точке, не имеющей ни одного измерения, т. е. она в себе нерасчленима, хотя и является принципом различимости. Ее многосложная диалектическая судьба сводится к ряду погружений в инобытие и ряду новых возникновений из него — в обновленном виде. Погрузившись впервые в такое инобытие и натолкнувшись там на абсолютное препятствие (а таковым является для нее она же сама, поскольку она хочет в этом инобытии осуществиться, т. е. найти себя же саму), она отскакивает от инобытия к себе самой и превращается в новый *тип* числа, который поэтому в сравнении с натуральным рядом уже содержит в себе два смысловых слоя. А этот тип числа, устремившись в свое собственное инобытие и тем самым развернувши себя в арифметическое действие, снова наскакивает в этом инобытии на самого себя (по той же причине) и, отскакивая от него, т. е. от себя в инобытии, вновь возвращается к себе, содержа отныне в себе уже не два, а три смысловых слоя.

Первые два смысловых слоя были само число натурального ряда и многообразная скомбинированность его из единиц этого ряда. Три смысловых слоя, образовавшиеся в ставшей сущности, сýть указанные два плюс их осуществленность в новом инобытии, в результате чего первые два становятся в определенное *отношение* к третьему слою, т. е. в результате чего образуется некое отношение, которое является законом построения целой комбинации чисел (напр., ряда). Разные диалектические ступени внутри этой ставшей сущности постепенно и все более и более конкретно осуществляют это отношение чисел на этой комбинации чисел.

Та ступень, которая дает отношение, пропорцию и ряд, еще оставляет указанные три слоя в том их сыром виде, в каком доставила их нам ставшая сущность. Но уже вторая ступень (делимость, комбинаторика, детерминанты) растворяет первые два слоя один в другом, так что остается только одно непосредственное число, воплощаемое на комбинации чисел. Третья ступень, матрица, сливает и два оставшихся слоя в один, так что ставшая сущность получает ровное и гладкое многомерное строение, когда перед нами целая система разных, но вполне равноправных чисел, данная в виде неподвижной таблицы. Та единица, с которой началась арифметика, расцвела здесь в целую систему разноприродных и разноскомбинированных единиц.

b) Но сущность единицы заключается в единичности, в объединении всего иного, чему она сообщается. И эта разноприродная разноскомбинированная единица переходит еще в дальнейшее инобытие, с тем что [бы] и его превратить в себя, т. е. в эту разноприродную и разноскомбинированную коллективную единичность. Однако везде было так, что бытие, сообщаясь инобытию, отчуждалось от себя самого и снимало с себя план, снимало свой смысл, чтобы передать его инобытию и, таким образом, иметь этот смысл уже общим и для себя, и для своего инобытия. Точно так же и здесь система чисел, передавая свой смысл инобытию, тем самым создает некую общую закономерность, одинаково присутствующую и на ней, и на ее инобытии, т. е. тем самым *создается уже несколько систем*, объединенных одной общей закономерностью.

c) С одной стороны, общая теория числа (§ 31) и многочисленные ее повторения в отдельных моментах диалектического процесса уже хорошо научили нас переходить от ставшего, наличного, бытия к *выражению*. Выразительная форма бытия возникает в тот момент, когда все внутреннее в бытии становится внешним и когда по внешнему необходимым образом узнается внутреннее, хотя это и две совершенно различные и несводимые одна на другую сферы. В ставшей сущности мы находим много «внутреннего». Весь тот смысл, который несла с собою чистая единица и который в дальнейшем дал разные типы числа и разные действия над ними, он тут зафиксирован в ставшей сущности как царящие внутри нее числовые отношения. Виднее всего это на ранней ступени наличного бытия (отношение, пропорция, ряд), где отношение пробегает по всему числовому ряду, само оставаясь неизменным. Здесь внутренний смысл ставшего в полном смысле оказывается внутренним, он не переступает границ ставшей сущности и потому не делается внешним. На второй ступени ставшей сущности этот внутренний тип уже менее внутренний. До него легче добраться. Сам он уже только односоставен, он только некое определенное число, данное в своем непосредственном количестве. Еще более внешним этот внутренний смысл ставшего делается на третьей ступени, на стадии матрицы. Здесь он, в сущности, вполне тождествен с внешней структурой; он весь перевоплотился во внешнюю структуру, поскольку матрица и есть система чисел как именно система чисел. Однако этого еще мало для выражения. Это только еще перво-принцип выражения, но не само выражение. Необходимо, чтобы это *внутренно-внешнее бытие устремилось вовне*, излилось смысловой энергией на иное и из бытия-в-себе (хотя и выразительного) стало бытием-для-иного, и притом для *всего* иного (хотя и не растворилось в ином, а только смысловым образом открылось ему). Тогда, и только тогда, может идти речь о подлинном выразительном лике арифметической сущности числа.

d) Что же мы имеем в той системе систем, в том ряде рядов, который мы дедуцировали выше? Поскольку каждая система и ряд построены определенным образом, постольку они хранят в себе закономерность, которая для них вполне *внутренняя*. Но поскольку таких рядов несколько, постольку указанная закономерность, внутренняя для каждого из них, поневоле выходит за пределы каждого ряда, чтобы сообщиться другому ряду, и потому она уже перестает быть внутренней, а становится еще и *внешней* для всех этих рядов, внешней — ибо общей. Для каждого ряда эта закономерность внутренняя, так что, казалось бы, раз она внешняя для одного и другого, то внешняя она и для всех рядов, входящих в эту общую систему. Но с другой стороны, именно потому, что эта закономерность для всех рядов системы вполне общая, именно поэтому она для всех них и внешняя, так как она действительно осуществлена в каждом ряде, и для каждого ряда, взятого в отдельности, она, как осуществленная в другом ряде, внешняя, а стало быть, и для всех внешняя. Следовательно, закономерность эта есть бытие внутренно-внешнее. Но поскольку указанных рядов несколько и они друг в отношении друга есть инобытие (хотя и тоже связанное определенной закономерностью), постольку наша общая внутренно-внешняя закономерность не покоится на месте, но пребывает в живом становлении, закономерно переходя не только в каждом ряде от одного элемента к другому, но и во всей системе рядов — от одного ряда к другому.

Таким образом, имея несколько числовых рядов, объединенных в одну общую систему так, что одна-единственная закономерность определяет собою как структуру каждого ряда, так и взаимоотношение всех рядов, имея такую систему рядов чисел, мы имеем подлинную *выразительную форму арифметической сущности числа.*

Эта закономерность системы систем и есть *композиция.*

2. a) Но для изучения диалектической природы композиции будет очень полезно дедуцировать ее из фактического содержания предыдущих категорий арифметики. Если мы знаем, что выражение есть смысловым образом становящаяся, энергийная внутренно-внешняя структура, то это дает нам путь и для конкретно-математической дедукции. Наличное бытие выносит в выражении свое внутреннее наружу. Но где у нас в предыдущем это наличное бытие, или ставшее, и в чем его внутреннее? Последней и наиболее зрелой формой ставшего у нас была матрица. Она несла с собою и определенный внутренний смысл, который мог быть только количественным ее содержанием. Да и вообще числовой смысл в арифметике неотличим от количества. Внутреннее тут — количество. Но оно, конечно, не есть количество вообще, а определенным образом скомбинированное количество. Последним для матрицы является только детерминант. Следовательно, чтобы перейти в сферу выражения, матрица должна вовне выявить свой детерминантовый смысл. А так как выше мы уже пришли к выводу, что в выразительной сфере число оказывается не просто системой, но системой систем чисел, то вот в какой форме ставится теперь диалектическая задача: как проявляет себя детерминант, когда он из внутреннего содержания одной матрицы становится закономерностью для комбинации сразу нескольких матриц в нечто единое? Ответить на этот вопрос — это и значит диалектически дедуцировать новую, выразительную категорию числа в арифметике.

b) Вспомним структуру детерминанта. Это есть «алгебраическая» сумма всевозможных произведений данного числа элементов. Значит, ряд матриц должны 1) соединиться в одну общую неделимую совокупность и 2) каждая матрица этой совокупности должна быть одним из тех всевозможных произведений, которые допускаются данными элементами. Но что значит «всевозможные произведения»? Мы знаем, что эта «всевозможность» есть не что иное, как совокупность всех *перестановок* сомножителей. Следовательно, матрицы, входящие в нашу общую совокупность матриц, должны отличаться одна от другой так, как отличаются одна от другой перестановки некоторого данного числа элементов. Но эти перестановки играли в детерминанте ту роль, что они определяли собою те или иные произведения. Здесь же мы имеем дело не с детерминантами, а с матрицами. Значит, перестановки важны тут не в качестве непосредственно значащих произведений, но в аспекте ставшего, т. е. именно как перестановки. Мы берем все перестановки из данного числа элементов—и получаем ряд числовых комплексов, не прибегая ни к суммированию, ни к умножению, ни вообще к каким-нибудь непосредственно значащим количественным операциям. Также и всю совокупность матриц мы берем *не как их сумму*, но просто как некую комплексную совокупность, т. е. в чисто матричном же смысле.

Итак, получается совокупность матриц, каждая из которых есть одна из перестановок данного числа элементов, а все они суть все возможные перестановки этих элементов. Здесь внутренняя детерминантовая значимость матрицы вышла наружу и, определивши собою совокупность матриц как целое, стала в отношении к ним внешним принципом. Так рождается новая категория арифметики—*группа*, прообразом и неизменным образцом которой является эта только что выведенная совокупность всех перестановок данного числа элементов, взятая как целое и представимая матрично. Здесь внутреннее числовое содержание матрицы как наличного бытия стало внешним законом ее взаимоотношений с другими матрицами, законом *композиции* матриц, а внешняя объединенность и внеположность элементов матрицы превратилась во внутренне самообоснованный ряд комплексов, когда каждый из них не цепенеет на месте как всякая матрица, но энергийно тянет[ся] ко всякому другому комплексу общей совокупности и ко всем им вместе.

c) Таким образом, группа, эта наиболее общая выраженная форма арифметического числа, коренится еще в детерминанте, где она, однако, еще связана непосредственной значимостью единичного числа и не развита в совокупность свободно эманирующих элементов. Так оно и должно быть, потому что если наличное бытие есть осуществление смысла, а всякое осуществление предполагает объединение с инобытием, выражение же есть всегда прежде всего некое такое объединение, то нечто выразительное должно крыться уже в наличном бытии, в ставшем. Но конечно, поскольку здесь инобытие привлечено только лишь как голый принцип и не дана его реальная структура, постольку ставшее есть лишь самое начало выражения, его перво-принцип. Когда же инобытие получает свою свободу, т. е. когда из принципа превратится в становление, тогда и воплощенный на нем смысл станет выразительным по своей структуре. Вот почему детерминант—перво-принцип числовой выразительности, еще запрятанный в глубине ставшей сущности числа, а группа—выразительное арифметическое число, развернутое в своей структуре.

d) Можно сказать еще и так—эта дедукция будет, пожалуй, яснее. В *детерминанте* самое главное—это непосредственно значащее число, вычисляемое из определенной комбинации других чисел (как сумма их всевозможных произведений). В *матрице* эти числа застывают в своей самостоятельности и уже больше не растворяются в общей числовой значимости детерминанта. В *группе* внутреннее содержание детерминанта выходит наружу, т. е. вся та сумма всевозможных произведений элементов, которая в детерминанте только предполагалась, но не была положена, теперь *полагается*, т. е. затвердевает так же, как элементы детерминанта затвердели в матрице. Теперь затвердевают уже не самые элементы, а те методы их комбинирования, которые приводили к числу как непосредственной значимости детерминанта, т. е. получается сумма всевозможных произведений, но уже не как сумма, а как комплекс и — не как произведений, но как комплексов,— ряд рядов. Тут, очевидно, по методу ставшего, т. е. внешне, матрично, явлено внутреннее содержание детерминанта. Остается, стало быть, чтобы это внутренно-внешнее бытие получило развитие и перешло в смысловое становление. Для этого необходимо, что[бы] полученные комплексы закономерно один в другой переходили — путем той или иной операции. Это значит, что наши комплексы должны быть так подобраны, чтобы они были одновременно и комплексами элементов, тождественными с теми, из которых составлялись в детерминанте произведения, и такими комплексами, которые возникают один из другого путем однообразной операции. Последняя и есть композиция.

3. а) Итак, мы получили понятие *группы* и понятие *композиции*. *Группа* имеет в качестве закона своей структуры *композицию*. Спрашивается: о *каких же* композициях может идти речь в математике? Композиция есть закон объединения двух или нескольких чисел, вступающих в общую совокупность, именуемую нами как выразительное арифметическое число. Но ведь законы объединения чисел уже подробно обследованы нами в своем месте; это есть не что иное, как самые обыкновенные арифметические *действия*. Кроме того, и диалектика может говорить только о том же самом. Поскольку внешнее тут не может быть только голым придатком, оно должно развиться в становление. Но становящееся инобытие, по-предыдущему, есть именно арифметическое действие (разнонаправленный счет). Следовательно, перебирая все известные арифметические действия, мы и получим разные виды композиции. Ведь детерминант, будучи освобожден от непосредственно-количественной значимости, рассыпался на ряд произведений, как и эти последние, освобожденные от того же самого, рассыпались на ряд дискретных друг в отношении друга чисел. Правда, выйдя изнутри наружу, детерминант вовсе не уничтожился, но, как было показано выше, наоборот, определил собою эту внешность. Но если бы только он определял эту внешность, то эта внешность так и осталась бы не выразительной, а перво-принципом выражения, каковым являлся и сам детерминант. Внешность должна вовлечь этот перво-принцип в свою стихию и превратить его в становление; только тогда внутренно-внешнее становление, понимаемое как особым образом сконструированный смысл, окажется настоящим выражением. Поэтому, хотя детерминантово-матричная основа и остается в группе и при желании она всегда может быть выдвинута на первый план (как это делается, напр.,

в линейно-матричных представлениях групп), все же группа обладает, сверх того, еще и своим собственным законом композиции т. е. эти же самые элементы группы, освобожденные от непосредственно-числовой значимости детерминанта, оказываются связанными между собою еще особыми арифметическими действиями. Детерминантово-матричная структура группы залегает внутри группы, перекрываясь сверху еще особым композиционным слоем. Вернее же сказать, поскольку детерминантово-матричная структура должна быть сразу и внутренней, и внешней, одна и та же структура группы является и внутренно-внешней детерминантово-матричной; и становящейся внутренно-внешней композиционной. Группа есть ряд матриц (следовательно, она таит в себе и детерминантную структуру), но в то же время переход от одной из этих матриц к другой совершается по особому композиционному закону (поэтому детерминантовость тождественна здесь с композицией). Так ставшее, детерминантово-матрично наружу и композиционно распространяясь вовне, становится выразительной формой группы.

b) Войдем ближе в содержание понятия композиции. Сказано, что это есть попросту различные арифметические действия. Когда система наших числовых систем определена *сложением* и *вычитанием*, она называется *модулем*. Когда она определена умножением и делением, ее называют *лучом* или *группой* в узком смысле слова. Когда тут действуют сложение, вычитание и умножение, говорят о *кольце*. И когда, наконец, [говорят] о всех первых четырех действиях арифметики, [то] говорят об «*алгебраическом*» *поле* или *теле* (допуская обычную противоречивость в термине «алгебраический»). Наконец, прочие арифметические действия представлены в том, что называется *расширениями поля*.

c) Термин «группа» употребляется в разных смыслах. Тут, как и везде в математике, целый ряд неясностей термина. Прежде всего, неизвестно, относится ли теория групп к арифметике, к алгебре или к анализу (о геометрии согласимся, что тут только применение теории групп, хотя также можно было бы говорить, что функциональные группы суть только применение арифметических). Затем, если взять обычную формулировку группы, то она дается настолько широко, что сюда войдут и модули, и кольца, и поля, так что неизвестно, что же, собственно, считать группой в настоящем смысле. Можно условиться понимать под группой совокупность, образованную по закону умножения и деления. Наконец, при различии композиционных принципов все эти выразительно-числовые совокупности настолько близко совпадают по своей формальной структуре, что можно было бы избежать многих терминов, сводя их к общевыразительной терминологии и избегая столь любимых математиками схоластических нагромождений и усложнений.

Так как понятие группы — наиболее общее и широкое во всей этой выразительной сфере, то остановимся больше на нем.

§ 124. Теория групп.

1. Остановимся сначала на *математическом определении понятия* группы. Обычно это определение расчленяют на несколько тезисов, которые мы и рассмотрим с нашей обычной диалектической точки зрения.