в линейно-матричных представлениях групп), все же группа обладает, сверх того, еще и своим собственным законом композиции т. е. эти же самые элементы группы, освобожденные от непосредственно-числовой значимости детерминанта, оказываются связанными между собою еще особыми арифметическими действиями. Детерминантово-матричная структура группы залегает внутри группы, перекрываясь сверху еще особым композиционным слоем. Вернее же сказать, поскольку детерминантово-матричная структура должна быть сразу и внутренней, и внешней, одна и та же структура группы является и внутренно-внешней детерминантово-матричной, и становящейся внутренно-внешней композиционной. Группа есть ряд матриц (следовательно, она таит в себе и детерминантную структуру), но в то же время переход от одной из этих матриц к другой совершается по особому композиционному закону (поэтому детерминантовость тождественна здесь с композицией). Так ставшее, детерминантово-матрично наружу и композиционно распространяясь вовне, становится выразительной формой группы.

b) Войдем ближе в содержание понятия композиции. Сказано, что это есть попросту различные арифметические действия. Когда система наших числовых систем определена *сложением* и *вычитанием*, она называется *модулем*. Когда она определена умножением и делением, ее называют *лучом* или *группой* в узком смысле слова. Когда тут действуют сложение, вычитание и умножение, говорят о *кольце*. И когда, наконец, [говорят] о всех первых четырех действиях арифметики, [то] говорят об «*алгебраическом*» *поле* или *теле* (допуская обычную противоречивость в термине «алгебраический»). Наконец, прочие арифметические действия представлены в том, что называется *расширениями поля*.

c) Термин «группа» употребляется в разных смыслах. Тут, как и везде в математике, целый ряд неясностей термина. Прежде всего, неизвестно, относится ли теория групп к арифметике, к алгебре или к анализу (о геометрии согласимся, что тут только применение теории групп, хотя также можно было бы говорить, что функциональные группы суть только применение арифметических). Затем, если взять обычную формулировку группы, то она дается настолько широко, что сюда войдут и модули, и кольца, и поля, так что неизвестно, что же, собственно, считать группой в настоящем смысле. Можно условиться понимать под группой совокупность, образованную по закону умножения и деления. Наконец, при различии композиционных принципов все эти выразительно-числовые совокупности настолько близко совпадают по своей формальной структуре, что можно было бы избежать многих терминов, сводя их к общевыразительной терминологии и избегая столь любимых математиками схоластических нагромождений и усложнений.

Так как понятие группы — наиболее общее и широкое во всей этой выразительной сфере, то остановимся больше на нем.

§ 124. Теория групп.

1. Остановимся сначала на *математическом определении понятия* группы. Обычно это определение расчленяют на несколько тезисов, которые мы и рассмотрим с нашей обычной диалектической точки зрения.

a) Говорят: существует такая *операция* (ее называют композицией, или символическим умножением), при помощи которой два элемента $\langle A_i \rangle$ и $\langle A_j \rangle$ системы могут быть *однозначно связаны*. Другими словами, два любых элемента системы определяют собою однозначно некоторый свой совокупный результат, который условно можно назвать «произведением»; элементы тут «перемножаются».

В таком обычном широчайшем понимании композиции не говорится ни о каком определенном арифметическом действии. Не говорится тут даже и вообще об арифметических действиях. Под композицией тут можно понимать любое арифметически-алгебраическое действие и любое их объединение; можно понимать и любые геометрические процессы (вращение, сдвиг, перенос, отображение и пр.). Словом, понимайте тут что хотите, но только под одним условием: результат композиции должен быть обязательно определен входящими в нее элементами системы.

Ясно, что композиция в этом смысле есть самое общее, что характеризует группу, самый ее источник и первоисток. Она в этом смысле вполне играет роль *перво-принципа* в определении понятия группы.

b) Далее говорится: *результатом данной композиции элементов группы является опять элемент той же группы*. Диалектический смысл этого момента в определении группы очень важен.

Прежде всего, самый этот способ выражения хотя и вполне точный, но не вполне ясный, и не худо было бы подобные выражения заменить другими. Смысл этого утверждения заключается в следующем. Если мы имеем ряд элементов данной группы, то, очевидно, раз результат объединения каждых двух из них принадлежит к самой группе, *сама группа состоит из этих объединений*, точнее говоря, из *всевозможных* объединений («произведений»). Мы видим отсюда сразу, что упомянутый момент определения группы просто говорит о том, что группа есть система числовых систем, ряд рядов, и что эта система построена по определенному закону композиции. Если наш основной ряд есть A_1, A_2, A_3, A_4, то, считая A_1 за единицу (о чем еще будет речь ниже), мы получаем такую таблицу, носящую имя *таблицы Кэли:*

	1	A_2	A_3	A_4
1	1	A_2	A_3	A_4
A_2	A_2	A_2^2	A_2A_3	A_2A_4
A_3	A_3	A_3A_2	A_3^2	A_3A_4
A_4	A_4	A_4A_2	A_4A_3	A_4^2 .

Тут наглядно видно, почему группа есть ряд рядов и каково значение в ней композиционного принципа.

Задаваясь вопросом о том, какова категориально-диалектическая сущность этого момента определения понятия группы, мы должны обратить внимание на то, что указанный выше перво-принцип группы, т. е. самая композиция, выставлен здесь двояко. Во-первых, весь основной ряд «перемножен» на первый член ряда, и, во-вторых, весь основной ряд «перемножен» на все члены этого же ряда. Другими словами, наш перво-принцип, композиция, во-первых, как-то осуществлен, осуществлен вообще; это значит, что мы уже покинули тут стадию перво-принципа группы и перешли к ее принципу, к ее «бытию». Во-вторых же, он осуществлен тут вполне определенным образом, а именно так, что мы при этом осуществлении не только пробегаем весь ряд, но осуществляем еще и самый ряд — соответственно пробегая опять все его члены подряд. Это значит, что композиционный перво-принцип перешел тут от своего бытия к своему становлению: мы не только осуществили композицию, но еще раз пустили это осуществление в новое осуществление. Таким образом, утверждение, что в группе результат композиции двух элементов принадлежит в качестве элемента к самой группе, освещает сразу и *бытие*, и *становление* в самом понятии группы.

Отметим и то обстоятельство, что на приведенной таблице Кэли яснейшим образом видна сущность перво-принципа. Ведь всякий перво-принцип (как это мы хорошо знаем, и прежде всего из § 23) присутствует в соответствующей ему сфере бытия совершенно одинаково и самотождественно, являясь в то же время и принципом всякого различия. В нашей таблице в каждом элементе группы одинаково и целиком присутствует идея определенного рода композиции двух элементов. Элементы везде тут разные, да и результат композиции везде разный. Но самая композиция формально везде одна и та же, и ее результат в этом смысле везде один и тот же.

c) Пойдем дальше. За становлением идет ставшее, наличное бытие. Наша композиция и все ее результаты пусть застынут в некоей твердой данности. Чем определяется эта твердая данность? В каком виде все элементы будут утверждены в качестве факта? Когда мы в § 65 переходили в область арифметических операций от становления к ставшему, мы столкнулись с т. н. законом счета. Как ведут себя элементы группы в этом смысле и применим ли к понятию группы этот способ рассуждения вообще?

Не без удивления мы находим в определениях понятия группы точные указания на эти законы. А именно, 1) утверждается, что *композиция группы обязательно обладает ассоциативным законом*, т. е. что $(\varphi\tau)u = \varphi(\tau u)$, и что, стало быть, выражение $\varphi\tau u$ имеет также вполне определенный, единственный смысл, что и $\varphi\tau$. С другой стороны, коммутативный закон совсем не обладает такой обязательностью, так что, вообще говоря, $\varphi\tau \neq \tau\varphi$ и все группы делятся на коммутативные (Абелевы) и некоммутативные.

d) Но в особенности ярко торжествует свою победу наша пятиступенная диалектика, когда мы задаемся вопросом о том, где же завершительный, *выразительный* момент определения понятия группы и как на своем языке выражают его математики. Его можно выразить более общо и менее общо. Для первого случая вспомним, какую форму принимало у нас выражение в применении к действиям. Арифметическая операция превращается тут в целый комплекс действий, который в иной комбинации своих направлений оказывается уравнением. Уравнение всегда *выразительно*, давая метод движения от внешнего неизвестного к известному внутреннему или от внешнего известного к внутреннему неизвестному. Если к элементам группы применим принцип уравнений, т. е. если уравнения с неизвестными в качестве элементов группы обязательно разрешимы, то возможность этих уравнений и обеспечит нам искомую выразительность определения понятия группы. Действительно, если принять во внимание возможную некоммутативность, то, оказывается, для каждой группы уравнения

$$\varphi x = \tau$$
$$y\varphi = \tau$$

обязательно разрешимы (если, конечно, φ не равно нулю), и притом однозначно разрешимы. Это звучит, однако, довольно отвлеченно, и мы можем употребить тут гораздо более конкретные выражения.

А именно, из предыдущих уравнений вытекает, что необходим и случай $\varphi x = \varphi$, т. е. необходимо, чтобы если φ не равно единице, то оно в иных случаях и равнялось единице. Точно так же уравнение $\varphi x = \tau$ разрешимо только тогда, когда возможен и случай $\varphi x = 1$, т. е. когда имеется некое φ^{-1}, такое, что $\varphi \cdot \varphi^{-1} = 1$. Это сразу накладывает резкий отпечаток на понятие группы; и в руководствах по теории групп в качестве обязательных моментов определения содержатся еще и такие два: в системе, именуемой «группа», существует *элемент-единица*, т. е. такой элемент ε, что для любого φ системы имеется $\varphi\varepsilon = \varepsilon\varphi = \varphi$; и для любого элемента φ системы существует в системе *обратный элемент*, такой, что $\varphi \cdot \varphi^{-1} = 1$.

Кажется, нефилософ и недиалектик не может и прикоснуться к пониманию подлинного категориального значения для двух обязательных элементов каждой группы, элемента-единицы и обратного элемента. Кажется, еще никому из математиков не пришло в голову понимать эти элементы как *выразительные формы* логического определения понятия группы. А между тем совершенно неясно, зачем говорится об этих элементах уже в *определении* группы. Если математики вводят их в определение, то вовсе не потому, что они имеют потребность в логической системе, и вовсе не потому, что понимают весь логически-завершительный смысл этих двух элементов в понятии группы, но исключительно только потому, что в иных группах, а в особенности в геометрических (напр., в группе вращений), эти элементы обладают неотразимой очевидностью, и бьющей в глаза очевидностью, так что, давая после этого общее определение группы, уже никак нельзя обойти упоминания об элементе-единице и обратном элементе. Таким образом, если математики и вводят это упоминание в самое определение группы, то исключительно в результате ползучего эмпиризма, но никак не в результате диалектической ясности самого понятия группы. Тем более нужно быть благодарным исследователям, впервые захотевшим представить это понятие во всей его кристально-философской ясности.

Необходимо, между прочим, отметить, что как из однозначной разрешимости указанных уравнений вытекает наличие элемента-единицы и обратного элемента, так и из этого наличия вытекает однозначная разрешимость этих уравнений. Поэтому выразительный характер общих элементов группы нужно понимать не только в связи с приведенными уравнениями, но и самостоятельно, из них самих. В этом случае, однако, выразительная форма, пожалуй, еще ощутимее. Дело в том, что все предыдущие моменты определения понятия группы обладают слишком принципиальным характером и ничего не говорят о реальном протекании в ней композиционного принципа. Элемент-единица указывает, напротив того, на некое *начало* реального оформления группы, т. е. оформления как чего-то целого, а обратный элемент указывает на *разнообразные смысловые направления*, господствующие в реальном организме группы. То и другое, несомненно, свидетельствует о конкретной выразительности группы.

2. Усвоивши себе логический состав самого понятия группы, обратимся к примерам группы, потому что только здесь можно вполне ощутительно воспринять то, о чем отвлеченно говорит диалектика понятия.

а) Укажем прежде всего *чисто числовые, т. е. в собственном смысле арифметические*, группы.

Группой является уже самый обыкновенный *натуральный ряд чисел*, и притом в разнообразном смысле. Пусть, напр., композицией является сложение. Какие бы два числа из натурального ряда мы ни взяли, их сумма безусловно окажется в том же самом натуральном ряду. Пусть композицией будет умножение. И опять, какие бы два числа ни взять, их произведение все равно принадлежит натуральному ряду. Допустим, что у нас имеется совокупность чисел натурального ряда, обладающая тем признаком, что разность каждых двух чисел относится к этой совокупности. Говорится, что число *а сравнимо* с числом *b* по модулю *с*, если они при делении на *с* дают всегда один и тот же остаток. При такой точке зрения натуральный ряд чисел разбивается на ряд классов, в каждом из которых содержатся все числа, сравнимые между собою по данному модулю. Если у нас модуль = 5, то мы получаем следующий ряд рядов, или классов чисел:

0, 5, 10, 15 ...
1, 6, 11, 16 ...
2, 7, 12, 17 ...
3, 8, 13, 18 ...
4, 9, 14, 19 ...

Дальнейшие классы, очевидно, были бы только повторением уже данных, и, следовательно, классов возможно здесь столько, каково количественное значение модуля. Все эти пять классов чисел, на которые разбивается натуральный ряд чисел по модулю 5, образуют собою модуль в широком смысле, или вид группы. Легко увидеть на такой группе применение всех указанных выше моментов определения группы.

Из области чисел возможны и более сложные групповые построения. Так, напр., из теории групп можно вывести малую теорему Ферма.

b) Приведем пример группы *функций*, а именно рациональных функций. Пусть мы имеем, напр., такие шесть функций:

$$f_0=x \qquad f_3=\frac{x}{x-1}$$

$$f_1=\frac{1}{x} \qquad f_4=\frac{x-1}{x}$$

$$f_2=1-x \qquad f_5=\frac{1}{1-x}$$

Простым вычислением убеждаемся, что эти функции являются элементами некоей единой группы, если под композицией понимать получение функции от функции, т. е. подстановку в одну из функций функции другой функции вместо. Точно так же все целые функции комплексного переменного образуют группу, если под композицией понимать опять получение функции от функции: целая функция от целой всегда будет тоже целая.

с) Однако особый интерес представляют *геометрические* группы. Рассмотрим, напр., группу вращений какой-нибудь плоской фигуры. Возьмем равносторонний треугольник ABC и посмотрим, как его можно вращать так, чтобы в результате вращения он совпадал с самим собою. Если мы перечислим все такие способы вращения, они образуют собою группу вращений. Оказывается, таких способов существует шесть: 1) оставление данного треугольника в покое; 2) поворот вокруг центра на 120°, чтобы B попало в A, C—в B и A—в C; 3) поворот вокруг центра на 240° (или на 120° в обратную сторону), чтобы C попало в A, A—в B и B—в C; 4) поворот на 180° вокруг оси AD; 5) то же вокруг BE; 6) то же вокруг CF. Будем понимать под композицией замену двух вращений соответствующим эквивалентом в виде одного вращения. В таком случае нетрудно убедиться, что шесть указанных вращений образуют группу, потому что каждые два из них образуют какое-нибудь третье (напр., соединение вращений 2-го и 5-го дает 6-е).

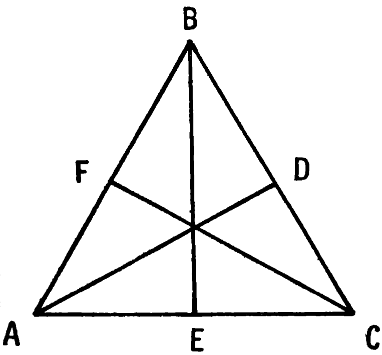

Рис. 11

Интересны также группы вращений правильных многогранников, переходящих в самих себя. Таковы группы 12 вращений тетраэдра, 24 вращений октаэдра и куба, 60 вращений додекаэдра и икосаэдра.

В § 63 были указаны геометрические типы построений—аффинный, проективный и «метрический» (эквиформный). Мы можем понимать эти построения как типы преобразований и говорить, таким образом, о группах *преобразований*. Эквиформная группа, основанная на преобразованиях подобия, состоит из таких элементов, которые указывают на масштабы фигуры, но оставляют в полной неизменности их конфигурацию. Это и есть наша элементарная геометрия, изучающая лишь те свойства, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях подобия. Все эти преобразования составляют группу, *эквиформную* группу, если под композицией понимать последовательное проведение преобразований подобия. Исключим отсюда ортогональность, продолжая сохранять в наших преобразованиях параллельность. Мы получим *аффинную* группу преобразований. А отказываясь также еще и от параллелизма, получаем *проективную* группу преобразований.

Возьмем для примера прямоугольник. Сосредоточимся на его свойстве как именно прямоугольника, т. е. на равенстве диагоналей. Тогда все преобразования, оставляющие неизменным это равенство, образуют собою эквиформную группу. Но для этого равенства диагоналей необходимо, чтобы прямоугольник при всех своих преобразованиях сохранял свою конфигурацию, т. е. оставался подобным себе, т. е. чтобы углы его были соответственно равны, а стороны параллельны. Отвлечемся от равенства углов. Тогда наш прямоугольник будет рассматриваться как вообще параллелограмм, т. е. в нем мы будем фиксировать в качестве основного свойства уже не равенство диагоналей, а только их взаимное деление пополам. Все преобразования, оставляющие неизменным это свойство, суть аффинная группа. Наконец, забывая и о параллельности сторон, т. е. о параллелограммности, и начиная видеть в прямоугольнике только четырехугольник, иными словами, не равенство диагоналей и не их взаимное деление пополам, мы получаем проективную группу преобразований, если наши преобразования оставляют неизменным только этот простой факт.

d) Обозревая все эти примеры группы, мы выносим ряд поучительных иллюстраций. Мы видим, как разнообразна бывает композиция. Она допускает какое угодно взаимоотношение двух элементов, только бы оно было твердо фиксировано. Мы замечаем, как действует коммутативность и ассоциативность композиции. Коммутативность явно выполняется отнюдь не везде. Напр., понимая под композицией вычитание, а под группой натуральный ряд в первых примерах, мы отнюдь не можем считать, что $3-2=2-3$. Если мы берем чистые вращения (напр., плоскости вокруг начала координат), то композицией является здесь складывание одного угла вращения с другим. Такая группа, очевидно, коммутативная. Но попробуем присоединить к вращениям также зеркальное отображение, т. е. при вращении плоскости xy вокруг начала еще имеется симметрия относительно оси y. В этом случае элементы могут и не коммутировать. Не коммутативна также группа ортогональных преобразований в трехмерном пространстве и пр. Наоборот, в подавляющем большинстве случаев налична ассоциативность композиции. Это обеспечивает нам то, что мы можем осуществлять нашу композицию на любых элементах. Не будь $(\varphi\tau)u=\varphi(\tau u)$, это значило бы, что не каждый элемент может вступать в композицию с каждым элементом, сохраняя свою индивидуальную значимость. Впрочем, в упомянутом примере с композицией в виде вычитания мы имеем дело с неассоциативной группой, так как $(2-5)-2\neq 2-(5-2)$.

Пусть фигура вращается, увеличивается в масштабе и зеркально отражается. Один и тот же результат получится и когда мы вращаем и увеличиваем, а потом зеркально отображаем, и когда сначала увеличиваем, а потом вращаем с зеркальным отражением. Наконец, везде было видно в предыдущих примерах, где там элемент-единица и где обратный элемент. Яснее всего это в геометрии. В группе вращений, напр., элементом-единицей является состояние покоя, а обратным элементом—вращение в обратную сторону. В группах преобразований уменьшению соответствует увеличение, а зеркальному отражению—новое зеркальное отражение и пр. В модуле, приведенном выше (п. 1а), единичным элементом является нуль, в примере же на функциональную группу—$f_0 = x$. Заметим, однако, что, в сущности говоря, и элемент-единица вопреки заявлениям математиков в конце концов необязателен. Его нет, напр., в той группе, которую образует собою натуральный ряд чисел 1, 2, 3, ... и композицией для которой является сложение, так как не существует никакого числа ряда, которое бы в сложении с единицей оставалось бы самим собою. В то же время ряд 0, 1, 2, 3, ... имеет такой единичный элемент в этих условиях, и он равен 0.

Имея все это в виду, можно сказать, что в конце концов из всех моментов определения понятия группы только первые два остаются совершенно необходимыми—это однозначность композиции и принадлежность ее результата к общей совокупности.

3. а) Рассмотрим еще один пример группы—пример, который, однако, имеет для всей теории групп первостепенное значение, так что это даже не пример, а скорее общий метод представления всякой группы вообще. Это именно группа *подстановок*. Кстати, она теснее свяжет наше изложение с тем, что говорилось вначале относительно дедукции группы вообще.

Мы уже знаем, что такое перестановки. Чтобы получить одну перестановку из другой, надо произвести известную подстановку. Ясно, что всех возможных подстановок *n* чисел столько же, сколько возможно всех их перестановок. Из трех элементов, как известно, возможны шесть перестановок:

$$\begin{matrix}1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,3\\ 1\,2\,3 & 1\,3\,2 & 3\,2\,1 & 2\,1\,3 & 2\,3\,1 & 3\,1\,2.\end{matrix}$$

Их мы можем понимать как подстановки[17*], причем под каждым верхним числом подписываем то, которое подставляется вместо верхнего. Так, первая подстановка оставляет все число без изменения (т. н. тождественная подстановка); вторая переводит 1 в 1, 2 в 3, 3 в 2; третья переводит 1 в 3, 2 в 2 и 3 в 1 и т. д. Нетрудно убедиться, что это есть именно *группа* подстановок, если под композицией понимать последовательное проведение подстановки. Так, «помножим» второй элемент группы на третий: вторая подстановка оставляет 1 без изменения, третья же переводит ее в 3; вторая переводит 2 в 3, третья же 3 в 1; наконец, вторая переводит 3 в 1, третья же 1 в 2; итак, получаем новую подстановку 3, 1, 2, а это есть не что иное, как шестая подстановка. Ассоциативность тут, безусловно, сохранена, но коммутативности не существует — это легко увидеть при соответствующих операциях. Единичным элементом тут является тождественная подстановка, а обратный сразу виден для любой подстановки. Итак, это группа.

b) Часто случается, что, изучая разные предметы, мы замечаем, как они при всей своей несхожести выражаются одной и той же группой, для которой существует, таким образом, только одна таблица Кэли. Такие группы называют *изоморфными* или, точнее, одноступенно-изоморфными. Другими словами, если элементы двух групп можно расположить так, что если $A_iA_k=A_l$, то и $B_iB_k=B_l$, то эти группы изоморфны. И вот в теории групп доказывается теорема: **всякая отвлеченная группа изоморфна некоторой группе подстановок.** Это сразу видно из таблицы Кэли, в которой каждая строка содержит как раз все элементы группы, а переход от одной строки к другой есть только перестановка этих элементов. Если так, то отсюда мы получаем некоторый *универсальный метод исчерпывающего представления любой группы*, который к тому же замечательно прост и удобен (хотя простота эта скорее теоретическая, а не практическая). Если мы вспомним вышеприведенный пример с вращением равностороннего треугольника, где этих вращений было именно шесть, то эту же самую группу мы можем представить как группу подстановок трех вершин треугольника A, B, C:

$$\begin{matrix} A\,B\,C & A\,B\,C & A\,B\,C & A\,B\,C & A\,B\,C & A\,B\,C \\ A\,B\,C & B\,C\,A & C\,A\,B & A\,C\,B & C\,B\,A & B\,A\,C. \end{matrix}$$

Так же можно представить и приводившуюся группу шести рациональных функций (представляющую, кстати сказать, группу значений ангармонического отношения[18*] четырех точек на прямой при всевозможных их перестановках).

c) Но обратим внимание на то, как мы «перемножаем» подстановки. Тут полная аналогия с «умножением» матриц. Можно поэтому всякую группу представить *матрично*; всякая группа есть в известном смысле группа матриц. Возвращаясь к нашему примеру группы шести рациональных функций, мы можем представить ее изоморфно в матрицах второго порядка так:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

То же в виде матриц третьего порядка так:

$$1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \; AB=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \; B^2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$B=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \; A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \; A^2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

соответственно таблице Кэли:

	1	A	B
1	1	A	B
A	A	A^2	AB
B	B	AB	B^2.

Тут мы возвращаемся к данной вначале диалектической дедукции группы из детерминантно-матричных отношений. Ряд матриц связан здесь единым композиционным принципом, скользящим от одного элемента к другому и охватывающим их все вместе. Выразительная природа композиции сказывается именно в этом тяготении одного элемента к другому, в этом смысловом *становлении*, которое образуется по причине того, что каждый элемент есть «произведение» двух других и все, таким образом, объяты одним взаимным тяготением.

d) Это делается еще яснее, когда мы стараемся осознать обычно практикуемый в теории групп метод *циклического* представления. Циклом называется такая подстановка, в которой каждый знак заменяется следующим за ним, а последний — первым. При этом совершенно неважно, с какого знака начинать, лишь бы сохранялся указанный порядок. Ничто не мешает и всякую подстановку расположить так, чтобы смена знаков происходила последовательно, как указано только что; или, точнее, всякая подстановка может быть представлена как произведение циклов, не имеющих общих элементов. Следовательно, всякая подстановка, т. е. всякая группа, в этом смысле циклична, и притом однозначно-циклична. Но циклическое расположение наилучше рисует тот момент в композиции группы, который мы именуем выразительно-становящимся. Цикличность по самому своему смыслу есть нечто становящееся. Поэтому она и отражает в себе наилучше выразительную природу группы. Ведь выражение есть именно фигурно-становящаяся, текучая сущность.

e) Наконец, важно знать еще и то, что полная группа всех возможных подстановок данного числа знаков обладает одним специальным свойством. Именно, если под *степенью* группы понимать число знаков, участвующих в подстановках, то *все n подстановок n знаков образуют т. н. симметрическую группу n-й степени*. Такова, напр., тройная группа, приведенная выше в виде таблицы Кэли, или четверная, которую еще рельефнее можно выразить так:

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E.

Мы видим здесь замечательную симметрию знаков относительно обеих диагоналей таблицы. В теории групп доказывается, что симметрическая группа содержит $\frac{n!}{2}$ четных и столько [же] нечетных подстановок. Группа всех четных подстановок *n* знаков называется *полусимметрической*, или знакопеременной, группой.

4. До сих пор мы занимались, собственно говоря, только определением понятия группы, мало входя в рассмотрение ее структуры в собственном смысле. Но развитое выше понятие группы со всеми его подробностями в отношении структуры самой группы есть только перво-принцип. Поэтому развитая структура группы должна быть рассматриваема еще с весьма многочисленных точек зрения. Укажем некоторые понятия из теории групп, относящиеся к структуре группы.

а) Структура группы в ее *принципе* (а не перво-принципе), в ее *бытии* характеризуется различным комбинированием входящих в нее элементов. Введем необходимейшее понятие *подгруппы*. Это та группа, все элементы которой входят в другую группу; в отношении последней она и называется подгруппой. Структура группы выявляется проще всего при помощи *разложения по модулю*. Если M подгруппа J, то имеется известное количество элементов A, B, C, ... J таких, что $J=MA+MB+MC+...+MJ$. Это значит, что мы компонируем последовательность элементов, составляющих подгруппу M со всеми элементами, входящими в J, но не входящи[ми] в M. Такое комбинирование называется *разложением* группы J по модулю M, а всякая система элементов A, B, ... J называется *полной системой вычетов по модулю* M. Тут полная аналогия со структурой модуля в узком смысле (т. е. когда композицией является сложение и вычитание), о котором нам уже приходилось упоминать (п. 2а) и о котором еще будет речь в § 126.

Впрочем, если гнаться за диалектической точностью, то к «бытию», или «принципу», структуры группы относится не разложение по модулю, а самый модуль, потому что только он и есть идеальная картина разложения. *Самое* же разложение, т. е. реальное разложение, предполагает уже некое становление бытия (или принципа), и закон этого становления выражен именно полной системой вычетов. Таким образом, полная система вычетов есть позднейшая стадия; она не только не самое бытие, но даже и не самое становление; она — *закон* становления, т. е. ставшее.

На основании теоремы Лагранжа о том, что порядок любой подгруппы есть делитель порядка группы, определяют структуру низших групп. Так, нетрудно найти, что групп четвертого порядка — две. Поскольку 5 и 7 — простые числа (а известно, что группа, порядок которой есть простое число, может быть только циклической), то для порядков 5 и 7 получается только один тип, циклическая группа. Для группы 6-го порядка возможны: 1) циклическая группа, образованная одним элементом 6-го порядка; 2) если же она не циклическая, то ее элементы могут быть 2-го или 3-го порядка, причем все не могут быть 2-го порядка. И т. д.

b) Несколько другой план структуры группы составляют т. н. *сопряжения*. Если в данной группе A, B, C являются элементами и $B=C^{-1}AC$, то говорят, что B сопряжено с A, а сама эта операция получения B из A называется преобразованием элемента A посредством элемента C. Всматриваясь в это понятие сопряжения, мы замечаем, что последнее есть полная аналогия равенству или, если угодно, подобию.

Но только это равенство или подобие нужно понимать, так сказать, «групповым» способом. Отсюда сопряжения соответствуют не просто структуре группы в ее бытии, но структуре группы в ее *становлении*, ибо фигура должна быть погружена в становление, чтобы превращаться в другую фигуру, подобную ей. Сопряженными бывают не только элементы, но и комплексы. Если какую-нибудь подгруппу данной группы будем преобразовывать всеми элементами группы, то мы получим подгруппы, сопряженные с данной подгруппой. Эти подгруппы, конечно, могут частично совпадать и одна с другой, и с первоначальной подгруппой. Ничто не помешает выбрать из них различные.

с) Отношение $A \to C^{-1}AC$ называется также *автоморфизмом*, а именно *внутренним* автоморфизмом. След., внутренний автоморфизм мы получаем, в случае когда мы из данного элемента получаем его же самого, но с преобразованием при помощи другого элемента. Прочие автоморфизмы (если они существуют для данного элемента) называются *внешними*. Автоморфизм—это просто взаимно однозначное соответствие группы с самой собою. Это понятие совсем не так излишне, как это могло бы показаться с первого раза. Пусть, напр., мы имеем группу отражений, или переносов, геометрической фигуры, обусловливающую собою явление симметрии. Если бы здесь фигура не переходила в себя саму, то не было бы и самой группы ее отражений, или переносов. Тут же видно и то, что понятие автоморфизма (как и понятие сопряжения) предполагает *становление* структуры группы, так как без собственного перехода в инобытие группа не могла бы стать и автоморфной.

Соответственно-взаимная однозначность двух разных групп называется *изоморфизмом* или, точнее, однозначным, одноступенным изоморфизмом. Многозначный изоморфизм или тот, который охватывает все соотношения между элементами как в одной, так и в другой группе, но не предполагает взаимной однозначности, называется *гомоморфизмом*. Здесь каждому элементу одной группы соответствует один элемент другой группы, но одному элементу этой другой может соответствовать несколько элементов первой группы. Теоремы, связанные с фактами изоморфизма и гомоморфизма, явно предполагают инобытие группы в виде другой группы и их определенное структурное взаимоотношение (в частности, при изоморфизме—тождество).

d) Уже эта структурность становящихся групп есть нечто ставшее. Более заметно это на тех подгруппах, которые остаются неизменными в процессе, где становление группы яснее всего, т. е. оказываются неизменными относительно всех внутренних автоморфизмов группы.

Пусть мы имеем случай, когда *все решительно* подгруппы, сопряженные с первоначальной, *совпадают с нею*. Это будет значить, что наша подгруппа *коммутирует со всяким элементом группы*. Вместо любого элемента группы можно будет брать эту подгруппу во всех групповых операциях. Это далеко еще не значит, что *каждый элемент* этой подгруппы коммутирует с каждым элементом группы. Такую подгруппу называют *инвариантной* или *нормальным делителем* группы. Другими словами, нормальный делитель и есть подгруппа, инвариантная при всех внутренних автоморфизмах. И ясно, что здесь мы получаем указание на структуру группы как на нечто *ставшее*, так как сопряжение нашей исходной подгруппы с элементами группы пришло здесь к определенному результату. Тут мы реально подходим к тому наличному бытию групповой структуры, с которым столкнулись выше, в п. 4a. Нетрудно сообразить, что в Абелевых группах все подгруппы инвариантны. В группе всех подстановок трех знаков имеется один нормальный делитель: 1, (1, 2, 3), (1, 3, 2). Группа всех подстановок четырех знаков имеет нормальный делитель 12-го порядка и один 4-го. В каждой группе все элементы можно распределить на ряд классов без общих элементов так, что элементы одного класса сопряжены между собою, а элементы различных классов не сопряжены. Эти классы называются классами сопряженных элементов. Существует ряд интересных и простых теорем о нормальных делителях, которых мы здесь не будем касаться.

e) Наконец, *выразительной* стороной групповой структуры может явиться т. н. *композиционный ряд*. Назовем максимальной инвариантной подгруппой группы такую, что в последней не существует другая инвариантная подгруппа, которая бы содержала первую. Максимальных инвариантных подгрупп может быть несколько и — разных порядков. Так, циклическая группа 6-го порядка имеет максимальные инвариантные подгруппы 2-го и 3-го порядков. Можно всю группу расщеплять так, что получится ряд максимальных инвариантных групп, входящих одна в другую. Это и называется *композиционным рядом*. Таких рядов в группе может быть несколько. По теореме Жордана — Гельдера, два композиционных ряда одной и той же группы всегда изоморфны.

Все эти указываемые нами моменты структуры группы являются беглыми и примитивными, играющими роль скорее образцов для диалектического ее исследования. Бóльшая подробность невозможна в нашем сочинении, а потому нам надлежит обратиться к одной области, где выразительная природа группы явлена с наибольшей силой.

§ 125. Геометрия чисел, или теория групп как учение о наивысшей арифметической выразительности.

1. Уже давно было замечено, что художественные формы часто подчиняются удивительно закономерным правилам, достигающим прямо геометрической и вообще математической точности. Изучение мировой *орнаментики* в особенности дает в этом отношении интересный материал, который, между прочим, часто поддается расшифрованию только при помощи теории групп. Групповая структура, оказывается, бессознательно выполнялась еще древними художниками в симметриях орнамента, равно как они в точнейшем виде выполняются и в природе, напр. в формах кристаллов. Коснемся некоторых явлений в этих областях, чтобы наглядно убедиться в выразительной природе числовой группы вообще*.

* Богатейший материал из орнаментики дает *Owen Jones*, [см.:] *F. M. Jaeger*. Lectures on the principle of symmetry. Amsterdam, 1917. Prisse d'Avennes. Atlas de l'histoire de l'art Egyptien. Par., 1878. Нижеследующий материал