получаем указание на структуру группы как на нечто *ставшее*, так как сопряжение нашей исходной подгруппы с элементами группы пришло здесь к определенному результату. Тут мы реально подходим к тому наличному бытию групповой структуры, с которым столкнулись выше, в п. 4а. Нетрудно сообразить, что в Абелевых группах все подгруппы инвариантны. В группе всех подстановок трех знаков имеется один нормальный делитель: 1, (1, 2, 3), (1, 3, 2). Группа всех подстановок четырех знаков имеет нормальный делитель 12-го порядка и один 4-го. В каждой группе все элементы можно распределить на ряд классов без общих элементов так, что элементы одного класса сопряжены между собою, а элементы различных классов не сопряжены. Эти классы называются классами сопряженных элементов. Существует ряд интересных и простых теорем о нормальных делителях, которых мы здесь не будем касаться.

е) Наконец, *выразительной* стороной групповой структуры может явиться т. н. *композиционный ряд*. Назовем максимальной инвариантной подгруппой группы такую, что в последней не существует другая инвариантная подгруппа, которая бы содержала первую. Максимальных инвариантных подгрупп может быть несколько и — разных порядков. Так, циклическая группа 6-го порядка имеет максимальные инвариантные подгруппы 2-го и 3-го порядков. Можно всю группу расщеплять так, что получится ряд максимальных инвариантных групп, входящих одна в другую. Это и называется *композиционным рядом*. Таких рядов в группе может быть несколько. По теореме Жордана — Гельдера, два композиционных ряда одной и той же группы всегда изоморфны.

Все эти указываемые нами моменты структуры группы являются беглыми и примитивными, играющими роль скорее образцов для диалектического ее исследования. Бóльшая подробность невозможна в нашем сочинении, а потому нам надлежит обратиться к одной области, где выразительная природа группы явлена с наибольшей силой.

§ 125. Геометрия чисел, или теория групп как учение о наивысшей арифметической выразительности.

1. Уже давно было замечено, что художественные формы часто подчиняются удивительно закономерным правилам, достигающим прямо геометрической и вообще математической точности. Изучение мировой *орнаментики* в особенности дает в этом отношении интересный материал, который, между прочим, часто поддается расшифрованию только при помощи теории групп. Групповая структура, оказывается, бессознательно выполнялась еще древними художниками в симметриях орнамента, равно как они в точнейшем виде выполняются и в природе, напр. в формах кристаллов. Коснемся некоторых явлений в этих областях, чтобы наглядно убедиться в выразительной природе числовой группы вообще*.

---

* Богатейший материал из орнаментики дает *Owen Jones*, [см.:] *F. M. Jaeger*. Lectures on the principle of symmetry. Amsterdam, 1917. Prisse d'Avennes. Atlas de l'histoire de l'art Egyptien. Par., 1878. Нижеследующий материал

a) Под *плоской точечной решеткой* понимается результат [отображения] двух векторов: p_1 и p_2 (не на одной прямой), откладывающих x_1 и x_2 раз ($x_1 x_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) одно и то же единичное расстояние $x_1 p_1 + x_2 p_2$. Точечная решетка есть точки с целочисленными координатами в той или иной прямолинейной системе координат. Или, наоборот, для всякой решетки точек можно конструировать такую систему координат, для которой p_1 и p_2 являются единичными векторами обеих осей. Конгруэнтное отображение точечной решетки на саму себя называется ее *симметрией*. Ее можно установить или при помощи вращения всей плоскости вокруг той или иной точки, или при помощи зеркального отображения относительно данной оси симметрии. Все эти движения точечной решетки образуют *группу*. Спрашивается: какова же структура этой группы?

b) Остановимся на *группе вращений*. С самого начала ясно, что всякая точечная решетка допускает относительно любой своей точки вращение на 180° в условиях совпадения всей решетки с самой собою, так как всякая прямая в результате такого вращения совпадает сама с собою. Но отсюда следует, что группы вращения могут быть в нашем случае только четного порядка. Так, возьмем группу 4-го порядка, т. е. будем вращать нашу решетку вокруг некоторой точки 0 на углы по 90°. Мы убеждаемся, что если при вращении на 180° любая решетка совпадает с самой собой, то при вращении на 90° совпадает с самой собой только квадратная решетка. Легко заметить также, что существует одна решетка, совпадающая сама [с] собою при вращении на 60°, т. е. при вращении 6-го порядка. Это та, которая состоит из ряда равносторонних треугольников, или гексагональная. Меньше чем на 60° не допускает вращения ни одна решетка, совпадающая с собою, потому что стороны образующегося при соединении ближайших от центра точек многоугольника оказались бы меньше единичного расстояния в решетке и, след., вся точечная система нарушается.

Итак, группа вращений решетки, совпадающей с самой собой, может быть 2, 4 и 6-го порядков, и только этих порядков, причем в первом случае решетка может быть любой формы, т. е. прямоугольной и параллелограммной, во втором — она обязательно квадратная и в третьем — обязательно гексагональная.

c) Посмотрим, каковы возможные здесь *зеркальные отражения*. Прямоугольная, и в частности квадратная, решетка зеркально отображается относительно любых прямых решетки, а также относительно прямых, им параллельных и проходящих через центры прямоугольников. Что же касается непрямоугольных решеток, то единственной допускающей отображение на саму себя является ромбовидная решетка, которая может быть получена из прямоугольной путем прибавления к ней в качестве точек решетки центров прямоугольников, так как в данном случае стороны прежнего прямоугольника являются взаимно перпендикулярными диагоналями полученных ромбов. Таким образом,

---

изложен по: *A. Speiser*. D. Theorie d. Gruppen von endlicher Ordnung. Berl., 1927, 77—106.

группа ромбовидных зеркальных отображений тождественна с группой прямоугольных.

Итак, мы имеем три группы вращений и одну группу зеркальных отображений. Ни при каких других условиях вращения и отображения плоская решетка не совпадает сама с собой.

d) И вращения, и отображения могут еще соединяться с *переносом*. Посмотрим, как это возможно. Что касается вращений, то всякое вращение с переносом можно заменить просто другим вращением. Вращение вокруг точки на 180°, соединенное с переносом 0 в 0′, тождественно с таким же вращением около середины отрезка 00′. Поэтому плоскую решетку можно вращать на 180° не только около ее общих точек, но и около точек посредине между любыми двумя точками. Из этих новых центров вращения вместе с точками данной решетки получится другая решетка, подобная первоначальной и половинного в сравнении с нею измерения. Квадратная решетка допускает, кроме того, вращение на 90° вокруг средних точек квадратов. Эти новые центры вращения образуют свою квадратную решетку, повернутую в отношении старой на 45° и в отношении к ней половинную по площади. Что же касается вращения на 60°, то тут центрами вращения могут быть только точки самой решетки, потому что средние точки равносторонних треугольников в качестве центров вращения дали бы вращение уже 3-го порядка.

Таким образом, только вращения 2-го и 4-го порядков могут дать в соединении с переносом центры вращения, отличные от точек решетки. Вращение же 6-го порядка допускает перенос центра только с одной обыкновенной точки на другую.

Что же теперь делается с осями отражения, когда к последнему присоединяется перенос? Всякий такой перенос может быть разложен на перпендикулярный к оси отражения и на параллельный к ней. Если направление переноса перпендикулярно к оси отражения, то результат будет снова отражением, но только относительно оси, проходящей через середину самого переноса. Если же перенос параллелен к оси отражения, то мы получаем скользящее отражение. В случае объединения отражения с переносом мы должны различать прямоугольную и ромбовидную решетки. В первой возможны только обычные оси (или оси скользящего отражения) с той или иной кратностью элементарному расстоянию решетки компонентов переноса по сторонам прямоугольников или через середины сторон параллельно другим сторонам. Во второй решетке кроме обычных осей отражения по параллельным прямым самой решетки возможна посредине каждых двух параллельных еще ось скользящего отражения.

e) Приведем в качестве примера на группу вращений и зеркальных отражений плоской решетки мозаику храма Изиды в Помпее (рис. 12). Чтобы разобраться в структуре этой мозаики, отбросим то, что не соответствует здесь основной симметрии. Тут мы находим в шестиугольниках круги с фигурой в пять лучей. Очевидно, единой группы вращения здесь не может получиться. Равным образом скрещенные овалы предполагают вращение на 90°; места же, на которых они

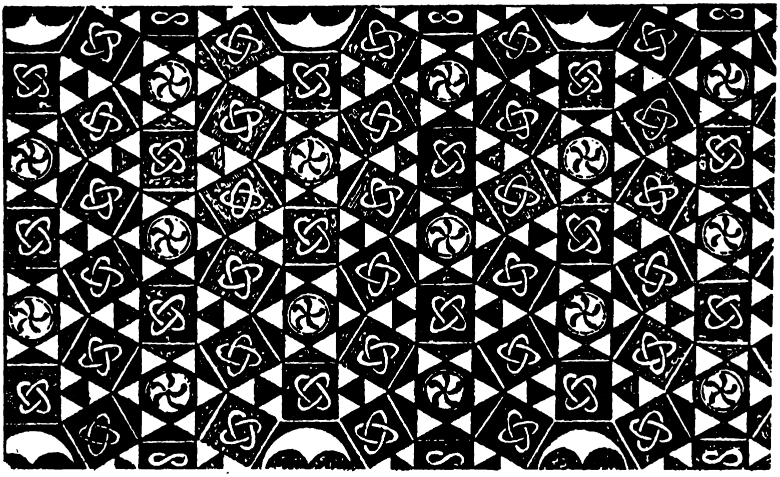

Рис. 12

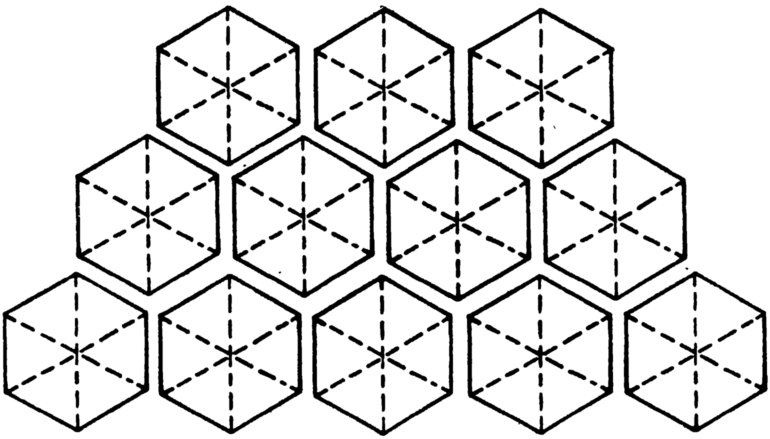

Рис. 13

находятся, вращаются только на 180°. Наконец, вверху и внизу мы находим шесть полумесяцев, которые тоже трудно объединить с общей системой вращений. Остается, стало быть, только шестиугольная решетка, она же и ромбовидная, которую легче обозреть на такой схеме (считая, что круги с пятилучевой фигурой находятся в точках решетки) (рис. 13).

Рис. 14

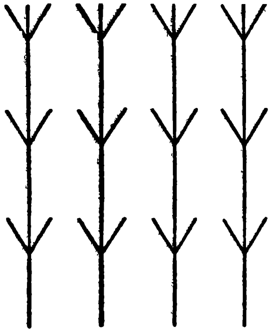

Рис. 15

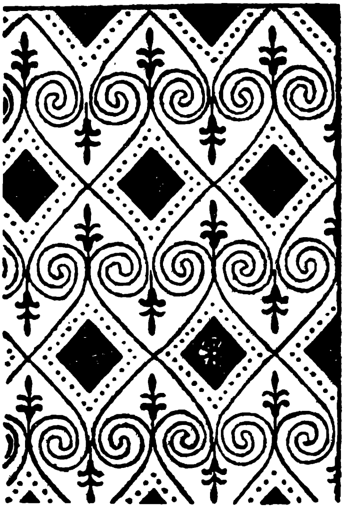

Рис. 16

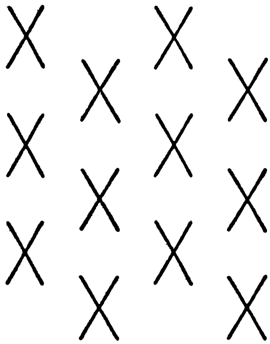

Рис. 17

Перед нами тут гексагональная решетка. Другими словами, перед нами тут *группа вращений 6-го порядка плоской решетки.* Здесь легко увидеть все, что говорилось выше о ромбовидной решетке. Тут невозможны вращения на 90°, если мы хотим, чтобы решетка совпадала с самой собой. Невозможно тут и присоединение переноса, которое бы ⟨...⟩ [19*] центры вращения в не принадлежащие решетке точки. Зато если иметь в виду ось зеркального отражения, то она допускает не только перенос по сторонам ромбов, но и по скользящей оси посредине между двумя сторонами с половинным размером по сравнению с единичным расстоянием решетки. На рисунке чистые оси отражения проходят через центры пятилучевой фигуры, оси же скользящего отражения — через центры сплетенных овалов.

2. История орнаментики дает массу прекрасных примеров на разнообразные группы. Тут мы находим группу зеркальных отражений, группу скользящих зеркальных отражений, группу переносов, группы вращений на 60°, 90°, 120° и 180°. G. Polya* перечисляет 17 разных групп, приводя соответствующую таблицу. Пользуясь этими указаниями, а также указаниями упомянутого A. Speiser'a, приведем несколько примеров из египетской орнаментики**.

Рис. 14 дает нам прямоугольную решетку. Основная фигура повторяется тут в зеркальных отражениях. Оси симметрии совпадают с осями отражения, отстоящими одна от другой на половину решеточного расстояния. Схемой этой группы служит рис. 15.

Рис. 16 дает ромбовидную решетку типа схемы рис. 17. Основная фигура орнамента обладает средней точкой, через которую проходят две оси отражения. Решетка переносов лучше всего видна на розетках. Через лилии проходят горизонтально простые и скользящие оси. Вертикальные оси также смешанные. Скользящие оси — между лилиями.

Орнамент рис. 18 построен по схеме 19. Здесь основная фигура возникает из фигуры с центром через отражение относительно оси, не проходящей через этот центр. Оси симметрии, параллельные к ней, суть только простые оси отражения, перпендикулярные же — только скользящие оси. В орнаменте можно отбросить основные завитки: получится фигура с той же группой симметрии, типа рис. 20, но с вертикальным переносом. Наоборот, если оставить одни завитки, то группа продолжает быть точно указанного типа (рис. 19), который можно получить из рис. 21 с продолжением отражения.

На рис. 22 мы находим группу вращений на 90° без всяких отражений. Это квадратная решетка с основной фигурой, допускающей только указанное вращение, и ничего более. Ее схема — рис. 23.

Менее интересен орнамент рис. 24 с основной фигурой, обладающей вращением на 90° и четырьмя осями отражения, которые проходят через ее центр, наподобие креста с равными концами. Здесь, так сказать, слишком «буквальные» отражения. Гораздо сложнее зато орнамент на рис. 25. Тут основная фигура возникает из фигуры с вращением в 90° через отражение относительно оси, не проходящей через центр. Оси симметрии, параллельные к сторонам квадратов, являются осями отражения, но только они не проходят через неподвижные точки вращений, проходя посредине между ними. Обе совокупности других осей состоят только из осей скользящего отражения. Решетка переносов здесь тоже квадратная, хотя ее и не сразу видно (нужно повернуть

* *G. Polya.* Über d. Analogie d. Kristallsymmetrie in Ebene. Zeitschr. für Kristallographie. 1924. Bd. 60, 278—282 и там же, 283—298; *P. Niggli.* Die Flächen Symmetrien homogener Disckontinuen.

** См.: Prisse d'Avennes. Atlas de l'histoire de l'art Egyptien. Par., 1878 (рисунки отсюда воспроизводятся у нас без красок).

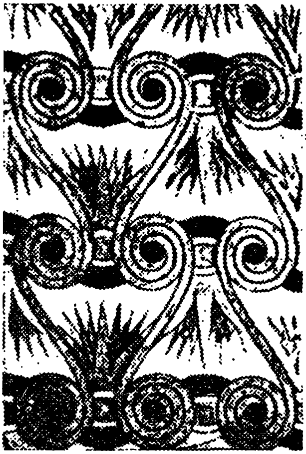

Рис. 18

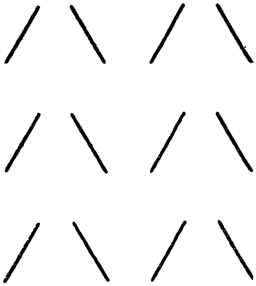

Рис. 19

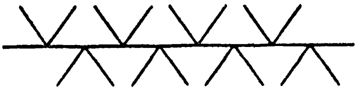

Рис. 20

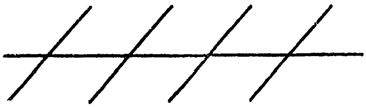

Рис. 21

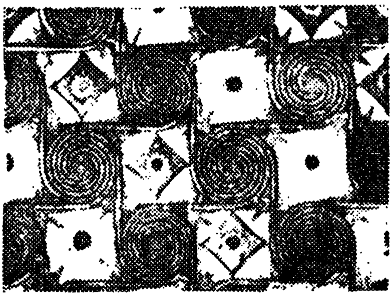

Рис. 22

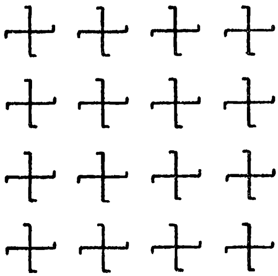

Рис. 23

рисунок на 45°, и тогда станет заметным квадрат со сторонами, проходящими через четыре средние точки). В орнаментах это обычно.
В заключение прибавим еще два примера из восточного искусства. Один *, рис. 26,—это группа вращений в 60° с 6 складными ⟨...⟩ [20*]

* Prisse d'Avennes. L' art arabe.

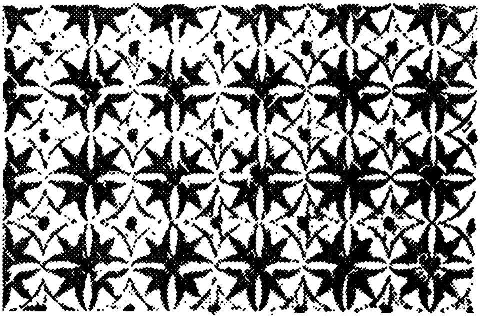

Рис. 24

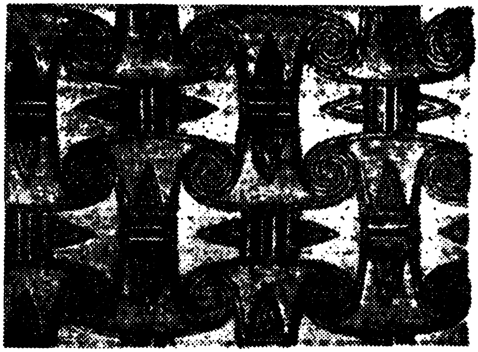

Рис. 25

осями. Основной фигурой является здесь нечто вроде бантика трилистника, который, однако, не сразу выделяется. Этот замечательный образец относится к XIV в. (мечеть в Каире). Другой такой же замечательный образец восточной орнаментики * — рис. 27. Основную фигуру и тут не сразу рассмотришь — простой крест с 16-кратной симметрией. Тут мы находим группу вращений в 90°, потом четыре вида осей отражения, потом еще восемь дальнейших симметрий, соединенных с отражениями, т. е. скользящие отражения в плоскости, которые перемещают один на место другого оба ряда лежачих крестов. Что же касается вращений, то тут мы находим вращательные отражения вокруг центров розеток с углами в ±90°; горизонтальные и вертикальные винтовые оси между розетками; две группы простых витых осей, повернутых на 45° по сравнению с предыдущими и проходящих через центр розеток; и вращательные отражения на 180° (пространственный центр симметрии) вокруг средних точек концов крестов.

* *M. de Vogüé*. Syrie centrale.

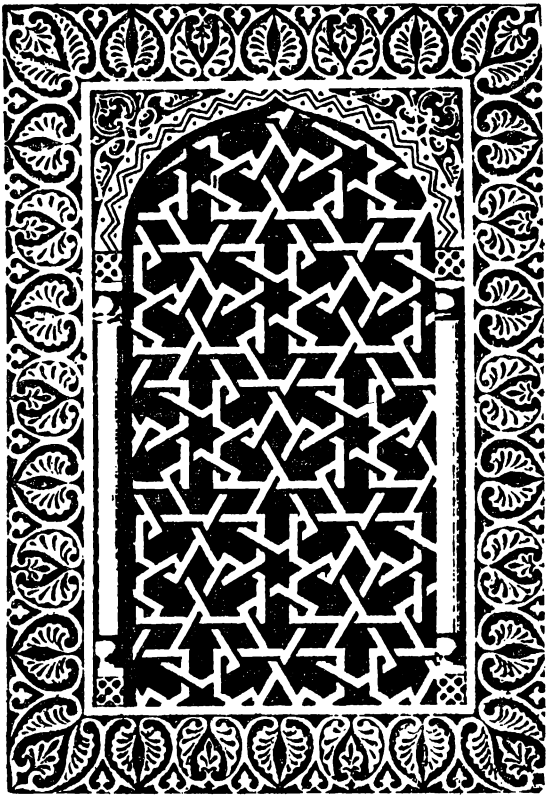

Рис. 26

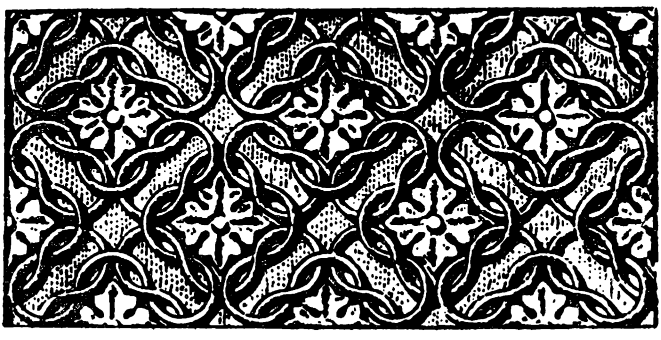

Рис. 27

3. Наконец, богатейший и интереснейший материал для теории групп дает *кристаллография*, где замечательный русский кристаллограф Федоров определил и вывел групповое строение кристаллов. В настоящее время можно говорить вообще о *кристаллическом пространстве*, в котором играют основную роль отражения и движения, лежащие в основе симметрии, аналогично с рассмотренными выше плоскими решетками. Группы, определяющие собою кристаллическое пространство, формулируются чисто теоретически, и само кристаллическое пространство получает вполне априорную структуру. Так выводится 32 кристаллических класса, таблицу которых можно найти в нижеуказываемом руководстве. Мы, однако, не станем приводить этот материал, потому что принципы групповой структуры достаточно иллюстрируются фактами плоской решетки*.

§ 126. Модуль, кольцо, поле.

Выше, в § 123, п. 3b, были указаны все основные формы выразительного числа. Из них мы коснулись только группы. Остановимся вкратце и на прочих формах.

1. a) Когда разность каждых двух элементов совокупности принадлежит к самой совокупности, последняя носит название модуля. В § 124, п. 2а, для модуля был приведен простейший числовой пример. Без дальнейшего видно, что модуль есть элементарный вид ряда рядов и что поэтому является выразительной формой (как это вытекает из § 123). Также отчетливо видно, что здесь налицо вся наша пятиступенная диалектика. *Перво-принципом* модуля в узком смысле слова является, очевидно, композиционный принцип *вычитания*: это совокупность таких элементов, разность каждых двух из которых относится к самой совокупности. *Принцип* модуля (т. е. принцип его структуры) есть совокупность всех разностей, которые в нем возможны, потому что принцип есть первообразная структура перво-принципа, а эта совокупность и дает нам последовательный ряд всех возможных взаимоотношений, определяющих структуру модуля. Этот последовательный ряд тоже называется модулем. Здесь, следовательно, имеются в виду наименьшая разность двух элементов и все ее кратные. Говорится: два числа a и b — сравнимы по модулю m, если разница $(a-b)$ есть число модуля. Но если этот фундаментальный ряд разностей есть принцип, или бытие, модуля, то каждый реальный ряд чисел, входящий в модуль, есть уже *становление* модуля, так как каждый такой реальный ряд чисел есть постепенное и последовательное осуществление этих разностей.

b) Становлению должен быть поставлен предел. В модуле это делается путем т. н. *полной системы вычетов*. Чтобы усвоить диалектическое значение вычетов, обратим внимание на то, что математики в применении к модулю говорят не о ряде рядов, но о ряде *классов*, понимая под классом совокупность чисел, равноостаточных при делении на число модуля. Тогда, имея какое-нибудь число a, мы можем

* *Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров.* Математические основы структурного анализа кристаллов ⟨...⟩ М.—Л., 1934. Руководство это написано чрезвычайно ясно и просто, с массой иллюстраций.