3. Наконец, богатейший и интереснейший материал для теории групп дает *кристаллография*, где замечательный русский кристаллограф Федоров определил и вывел групповое строение кристаллов. В настоящее время можно говорить вообще о *кристаллическом пространстве*, в котором играют основную роль отражения и движения, лежащие в основе симметрии, аналогично с рассмотренными выше плоскими решетками. Группы, определяющие собою кристаллическое пространство, формулируются чисто теоретически, и само кристаллическое пространство получает вполне априорную структуру. Так выводится 32 кристаллических класса, таблицу которых можно найти в нижеуказываемом руководстве. Мы, однако, не станем приводить этот материал, потому что принципы групповой структуры достаточно иллюстрируются фактами плоской решетки*.

§ 126. Модуль, кольцо, поле.

Выше, в § 123, п. 3b, были указаны все основные формы выразительного числа. Из них мы коснулись только группы. Остановимся вкратце и на прочих формах.

1. a) Когда разность каждых двух элементов совокупности принадлежит к самой совокупности, последняя носит название модуля. В § 124, п. 2a, для модуля был приведен простейший числовой пример. Без дальнейшего видно, что модуль есть элементарный вид ряда рядов и что поэтому является выразительной формой (как это вытекает из § 123). Также отчетливо видно, что здесь налицо вся наша пятиступенная диалектика. *Перво-принципом* модуля в узком смысле слова является, очевидно, композиционный принцип *вычитания*: это совокупность таких элементов, разность каждых двух из которых относится к самой совокупности. *Принцип* модуля (т. е. принцип его структуры) есть совокупность всех разностей, которые в нем возможны, потому что принцип есть первообразная структура перво-принципа, а эта совокупность и дает нам последовательный ряд всех возможных взаимоотношений, определяющих структуру модуля. Этот последовательный ряд тоже называется модулем. Здесь, следовательно, имеются в виду наименьшая разность двух элементов и все ее кратные. Говорится: два числа a и b — сравнимы по модулю m, если разница $(a-b)$ есть число модуля. Но если этот фундаментальный ряд разностей есть принцип, или бытие, модуля, то каждый реальный ряд чисел, входящий в модуль, есть уже *становление* модуля, так как каждый такой реальный ряд чисел есть постепенное и последовательное осуществление этих разностей.

b) Становлению должен быть поставлен предел. В модуле это делается путем т. н. *полной системы вычетов*. Чтобы усвоить диалектическое значение вычетов, обратим внимание на то, что математики в применении к модулю говорят не о ряде рядов, но о ряде *классов*, понимая под классом совокупность чисел, равноостаточных при делении на число модуля. Тогда, имея какое-нибудь число a, мы можем

* *Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров.* Математические основы структурного анализа кристаллов ⟨...⟩ М.—Л., 1934. Руководство это написано чрезвычайно ясно и просто, с массой иллюстраций.

сказать, что всякое другое число того же класса есть вычет числа a по модулю m. Кроме того, как ясно видно из примера, приведенного в § 124, п. 2a, для каждого модуля m имеется и m разных классов. А так как судить о классе можно по любому его числу, то проще всего судить по наименьшему вычету. Система представителей всех классов и есть *полная система вычетов*. Если, напр., модуль = 10, то полной системой вычетов может служить ряд 0, 1, 2, ..., 9. С диалектической точки зрения полная система вычетов определяет собою границы возможных типов становления всей системы. Она определяет собою, сколько классов и какие классы чисел входят во всю систему модуля. Остается, след., чтобы все классы были реально построены согласно этой системе вычетов, и — мы получаем всю систему модуля как арифметически-выразительную форму. Внутренняя структура модуля, т. е. первоначальный ряд кратных разностей, включается внешнесмысловым образом в виде различных классов чисел, точно зафиксированных по абсолютному значению чисел. Но внутренно-внешняя смысловая форма есть выражение.

2. a) В § 123, п. 3b, мы имели также указание на понятие кольца. Кольцо есть система с двойной композицией, так как оно является системой элементов, из которых каждая пара однозначно определяет их *сумму* и их *произведение*, причем эта сумма и это произведение тоже принадлежит к системе. Как и в отношении понятия группы (§ 124), эта композиционная структура кольца есть результат его перво-принципа, его принципа (структуры) и его становления. В наличном бытии кольца мы находим различные законы сложения и умножения элементов (коммутативность умножения необязательна), дающие возможность строить отдельные «классы» в пределах кольца. Тут необходимо заметить, что когда произведение равно нулю, то это еще не значит, что один из сомножителей всегда равен нулю. Когда ни один сомножитель не равен нулю (при произведении их = 0), то они называются делителями нуля (пример: пары чисел, когда сложение и умножение этих пар определяется комплексно, образуют кольцо с делителями нуля). Если этих делителей нуля нет и кольцо коммутативно, его называют *областью целостности*.

Что касается, наконец, выразительного момента в понятии кольца, то, как и в категории группы (§ 124), мы имеем здесь элемент-единицу и обратный элемент. Но только эта единица налична здесь отнюдь не всегда. Так, целые числа образуют кольцо с единицей, а четные — кольцо без единицы.

b) Если от понятия кольца перейти к его реальной структуре, то тут мы сталкиваемся сначала с понятием *подкольца*, т. е. нового кольца, входящего в состав данного кольца, а потом с очень важным понятием *идеала*, вполне аналогичным понятию нормального делителя в группе. Если в состав данного кольца входит такая совокупность элементов, что из вхождения в нее двух элементов следует вхождение в нее и их произведения и что в нее же входит и произведение одного из ее элементов на произвольный элемент кольца, то такая совокупность называется идеалом кольца. Если оставить в стороне нулевой идеал (состоящий только из нуля) и единичный идеал (содержащий все элементы кольца), то идеалом, порожденным через элемент a, мы называем идеал, состоящий из всех элементов вида $ra+na$, где r—элемент кольца, а n—вообще целое число. Это есть наименьший идеал, содержащий a, потому что во всякий идеал (a) по крайней мере входят все кратные ra и все суммы $\pm\Sigma a = na$. Идеал (a) есть пересечение всех идеалов, содержащих a. Идеал (a) называется *главным идеалом*. Идеал вообще может порождаться и несколькими элементами.

К кольцу применимы также понятия *изоморфизма* и *гомоморфизма*, аналогично группам. И как там нормальные делители были связаны с явлением гомоморфизма, так здесь с этим явлением связаны идеалы. Имея два гомоморфные кольца, мы разбиваем кольцо на классы, именно на совокупности элементов одного кольца, имеющих один и тот же образ в другом кольце. Класс кольца, соответствующий нулю при гомоморфизме этого кольца с другим кольцом, является идеалом первого кольца, а все прочие классы суть классы вычетов этого идеала, так что всякому гомоморфизму соответствует идеал. Можно сказать и так: при помощи идеала можно построить кольцо, гомоморфное с данным. В это кольцо войдут элементы в виде классов вычетов по идеалу. Кольцом вычетов исчерпываются все кольца, гомоморфные с данным, откуда можно сказать, что кольцо классов вычетов изоморфно с элементами другого кольца. Или: кольцо, гомоморфное с другим, изоморфно кольцу вычетов последнего. И обратно, кольцо вычетов по данному произвольному идеалу есть гомоморфное отображение кольца. Пусть мы имеем кольцо целых чисел. Классами вычетов по какому-нибудь положительному числу окажутся в этом кольце классы, дающие при делении на число этого идеала тот или иной постоянный остаток.

Эта картина построения колец требует диалектической фиксации, аналогичной с теорией групп (§ 124). А именно, один класс чисел, входящий в кольцо, окажется первообразным, указывая на основную структуру «бытия» кольца, а наличие вообще классов указывает на его становление. Вычеты приводят к наличному бытию, впервые создавая реальное существование классов с абсолютным значением отдельных элементов. Это и есть идеалы, или нормальные делители кольца. Отсюда уже вытекает и *выразительная* форма кольцевой структуры, которая может быть представлена в виде *кольца главных идеалов*. Здесь внутреннее строение идеала оказывается выходящим за пределы идеала, так как оно распространено на все кольцо, структура которого оказывается, таким образом, внутренно-внешней. Уже кольцо целых чисел содержит только главные идеалы, откуда область целостности с единицей, в которой каждый идеал является главным, и есть не что иное, как кольцо главных идеалов. Кольцо целых гауссовских чисел $a+bi$ также есть кольцо главных идеалов.

3. а) Наконец, в § 123, п. 3b, была указана и еще одна выразительная форма, это—*поле*. Поле можно определить как кольцо, в котором уравнения $ax=b$ и $ya=b$ всегда разрешимы при $a \neq 0$ (и, конечно, при условии, что имеется по крайней мере один элемент, не равный нулю). Попросту говоря, поле есть совокупность элементов, над которыми

можно производить четыре арифметических действия, не выходя за пределы самой совокупности. Отсюда перво-принципом поля является двойная композиция — сложения (вычитания) и умножения (деления). Выявляется этот перво-принцип в том, что поле состоит из элементов как из результатов этой композиции. Тут же — и законы вычитания и умножения, аналогичные предыдущему. Стоит отметить, что поле не может содержать делителей нуля. Из разрешимости указанных выше уравнений вытекает существование элемента-единицы и, в дальнейшем, обратного элемента. Поэтому диалектика понятия поля вполне аналогична диалектике понятия группы, модуля и кольца.

b) Обратимся к реальной структуре поля[21*].