верждению и к другому и просмотреть опытный материал. Тогда не будет никаких страстей, никаких недоразумений. То, что дорелятивисты говорят «должно совпадать», есть утверждение, основанное на предрассудке, и это указано Эйнштейном раз навсегда.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(16.III 1934 г.)

Краткое резюме. Дальнейшая дискуссия понятия одновременности удаленных событий. Вопрос о скоростях, больших c. Установление метрики в инерциальных системах. Вопрос о преобразовании x, y, z и t. Обоснование линейности преобразования. Вывод Лоренцова преобразования

Мы видели, что Эйнштейн в своем стремлении найти критерий для объединения всех известных явлений в движущихся телах был принужден обратиться к тому звену рассуждений, которое приводило к противоречию. И он увидел, что здесь оперировали понятиями, которые были недостаточно определены, недостаточно ясны, и в первую очередь — при рассуждениях, которые приводили к противоречию,— пользовались понятием одновременности в различных точках пространства. Эйнштейн обратил внимание на то, что это понятие, как и другие основные физические понятия, нельзя просто принять как нечто данное, что оно подлежит определению. И он дал определение того, что мы будем называть одновременностью для различных точек пространства. Если в точках A и B часы установлены синхронно, то известно, что́ мы называем одновременностью: два события, происходящие в A и B так, что соответственные часы, идущие в этих разных точках, показывают одинаковое время, считаются одновременными. Нужно только знать, как установить часы. Пока часы не установлены, понятие одновременности не имеет никакого смысла. Эйнштейн дает рецепт: пошлите из A световой сигнал в B так, чтобы он скорее всего пришел, проще говоря,— по прямой линии. Сигнал приходит в B и сейчас же отправляется обратно. Пусть моменты выхода и возвращения сигнала по часам A будут t_1 и t_2. Тогда, говорит Эйнштейн, по определению нужно поставить часы в B так, чтобы в момент прихода сигнала в B они показывали $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$. Указав такой способ установки часов, мы определили, что значит синхронные часы в обеих точках, и тем самым определили, что значит одновременность в обеих точках.

Как всякое определение, это определение содержит первоначально элемент произвола. Но оно удовлетворяет всем поставленным требованиям. Во-первых, при таком определении если часы A синхронны с часами B, то и, обратно, часы B синхронны с часами A, что отнюдь не разумеется само собой. Во-вторых, если в трех точках, A, B и C, вы установили часы так, что часы B синхронны с часами A и часы C синхронны с часами A, и если вы захотите теперь таким же способом синхронизировать часы C и B, то вы найдете, что они уже синхронизированы. Другими словами, при этом определении (и при том требовании, чтобы ни одна точка не была исключением) понятие синхронизма есть понятие транзитивное. То, что это так, показывает опыт.

Далее, опыт (по-прежнему в *одной системе*) показывает следующее. Если часы установлены, то приобретает смысл вопрос, чему равняется скорость света; и оказывается, что всегда, в каком бы направлении вы ни производили измерение, вы всегда получите, что между расстоянием от A до B и временем существует зависимость $r = ct$ (конечно, в вакууме) и всегда c будет одна и та же величина — около 300 тыс. *км* в секунду. (При этом мы предполагаем,что гравитация не играет никакой роли. Мы увидим в общей теории относительности, что если делать опыт в гравитационном поле, то этого уже нельзя утверждать.)

Если у меня имеется другая система, которая движется по отношению к первой равномерно и прямолинейно, то в этой системе также следует определить, что значит одновременность, причем мы будем определять по тому же самому рецепту и все будем делать точно так, как в первой системе. Если это сделать, то оказывается, что понятие одновременности не есть абсолютное понятие. Пусть мы установили часы в обеих системах. Мы имеем два каких-нибудь события, происшедших в различных точках. Мы можем установить, одновременны ли они по отношению к первой системе и одновременны ли они по отношению ко второй. И вот при данном выше определении синхронизма оказывается, что если два события в одной системе одновременны, то, вообще говоря, они не одновременны в другой. Одновременность не абсолютна, а относительна.

Если одновременность — относительное понятие, то первое, что мы знаем,— это устранение противоречия между постулатами Эйнштейна. Это основное противоречие обусловливалось тем, что понятие одновременности было абсолютно. Быть может, есть еще какие-нибудь противоречия, но это, во всяком случае, отпадает.

Если спросить себя, из-за чего все-таки в классической физике получалось противоречие, то теперь этот вопрос получает известный смысл, и вот почему. Как было сказано выше, определение может быть дано так, что одновременность будет абсолютным понятием. Дорелятивистская физика такое определение и давала. Почему же в ней получалось противоречие? Противоречие возникало не из того, что она давала это определение, а из того, что она, давая это определение, навязывала понятию еще и другие свойства, которые в действительности мог указать только опыт. Считалось, что, во-первых, одновременность абсолютна, а во-вторых говорилось, что, *как бы она ни была* определена, она *должна быть* абсолютной. Вот тут была ошибка дорелятивистов. Они, например, считали, что понятие одновременности можно установить переносом часов; они говорили, что если мы возьмем часы и перенесем в другое место, то часы будут идти синхронно, что если мы то же самое сделаем в другой системе, то получится то же самое, и что такое определение будет отвечать абсолютной одновременности. Это неверно. Перенос давал *новое* определение одновременности, и ниоткуда не следовало, что оно совпадает с условиями, которые постулировала дорелятивистская физика. Вот в чем было противоречие, а не в том, что одновременность считалась абсолютной для всех систем.

Если, далее, спросить себя, откуда черпала дорелятивистская механика и вся физика уверенность в том, что одновременность есть такое абсолютное свойство, то, в сущности, корни этого имеются (хотя теперь, может быть, несколько пренебрежительно к этому относятся). Вы видели, что наряду с требованиями, которые мы предъявляем к определению, есть общее требование — принцип причинности, которое запрещает известные определения. Для данного случая можно сказать следующее: нельзя определить одновременность в точках A и B так, чтобы сигнал, пущенный из A, пришел в B раньше, чем он вышел. Значит, часы должны быть синхронизированы так, чтобы сигнал, выпущенный из A, пришел в B в более позднее время. В противном случае, так как при помощи сигнала мы можем влиять на то, что происходит в точке B, мы могли бы влиять действиями, которые происходят позже, на процессы, происходящие раньше. Мы не допускаем этого, и классическая физика тоже, конечно, считала это неприемлемым. Если бы в нашем распоряжении имелись сигналы, обладающие бесконечной скоростью, то тогда уже из требования соблюдения принципа причинности определение одновременности вытекало бы однозначно.

Между прочим, что значит, что сигнал распространяется с бесконечной скоростью, если сигнал нужен только для того, чтобы определить одновременность или синхронизм, а без синхронизма мы вообще скорости определить не можем? Кажется, что здесь логический круг. Но дело в том, что, говоря о бесконечной скорости сигнала, я имею в виду, что время, прошедшее от пуска сигнала из A в B до возвращения его в A, должно быть бесконечно малым, должно равняться нулю. Для этого нужно знать только время в одной точке, а не одновременность. Если сигнал имеет конечную скорость, то время t' в точке B нельзя сделать меньше t_1 и больше t_2, оно должно лежать между ними. Если t_1 и t_2 сливаются, то уже нельзя выбирать t' отличным от $t_1 = t_2$. Отрегулировав таким образом часы во всех системах, мы действительно получим абсолютную одновременность. Может быть, до теории относительности эта идея нигде не была так формулирована, но фактически именно так обстояло дело в физике.

Еще одно замечание. Если вторую точку (B) мы будем все более и более приближать к первой (A), то интервал между t_1 и t_2 будет уменьшаться: и если мы подойдем совсем близко, то произвола никакого не останется и будет однозначное определение. Какой бы сигнал мы ни дали, мы должны будем определить одинаково, что значит одновременность для очень близко лежащих точек. Чем ближе лежат две точки, для которых мы определяем одновременность, тем меньше произвол, тем ближе t_1 и t_2, причем они стремятся к совпадению при слиянии точек A и B. Вот почему нет разногласий по вопросу о том, что значит одновременность в двух *совпадающих* точках; мы всегда знаем, что значит, что взрыв совпадает по времени с показанием часов в той же точке. Это мы хорошо знаем, и, какое бы определение мы ни давали, *здесь* это будет одно и то же.

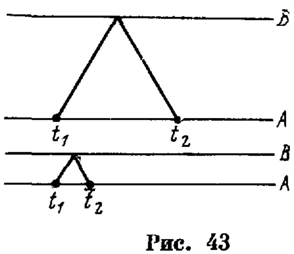

Рис. 43

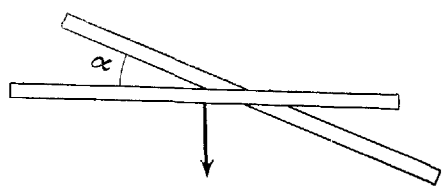

Рис. 44

Я останавливаюсь так долго на этих вопросах, ибо знаю, что эти вещи наиболее трудны. Я не мог рассмотреть и половины тех вопросов, которые, как показал опыт, обычно возникают; вы сами дадите на них ответы.

Но вот, что я еще хочу сказать. Все наши рассуждения принципиально остаются в полной силе в предположении, что нет скорости, превышающей одну какую-то определенную конечную скорость. Для этой предельной скорости сохраняется все эйнштейновское рассуждение и определение синхронизма, но только если мы убеждены, что в природе нет скорости, превышающей эту конечную предельную величину. То, что это как раз скорость света — это другой вопрос, к которому мы вернемся потом.

Теперь я хотел бы остановиться еще на одном возражении, которое очень часто упоминается в литературе и о котором очень много говорят. Мы знаем, что существует предельная сигнальная скорость физических агентов. Нам ясно теперь, почему это играет роль и почему наше определение одновременности не противоречит общей картине физики. Потому что нет сигнала, нет воздействия, которые можно было бы передать с большей скоростью, чем скорость света (или вообще некоторая конечная скорость). Однако существуют процессы, для которых формально также можно установить понятие скорости, процессы очень простые, в которых скорость может иметь сколь угодно большую величину. И вот говорят: значит, в природе есть скорости, бо́льшие скорости света, и все ваше построение неправильно. Но вы помните, что нас опровергнуть можно только в том случае, если в природе найдутся процессы *сигнального характера*, более скорые, чем свет. То, что имеют в виду, такого характера не имеет, так что это не возражение (я не могу на этом останавливаться, так как по существу вопрос относится к общей теории относительности, но то, что я сказал, остается правильным).

Возьмем следующий опыт. Представьте себе две линейки, пусть они могут двигаться одна по отношению к другой с известной скоростью (рис. 44). Если угол α достаточно мал, то точка пересечения линеек будет двигаться как угодно быстро. Но это ничего не значит, потому что при заданном движении линеек вы ничего не можете сделать с точкой пересечения. Вы не можете воздействовать на *эту* точку. Другое дело, если вы скажете: первоначально линейка покоится; затем, когда я захочу воздействовать, я начну ее двигать. Точка пересечения начнет двигаться с любой скоростью и будет действительно воздействовать, потому что я привел линейку в движение, когда захотел. Но это как раз и невозможно. Теория относительности утверждает, что этого не может быть. Что произойдет, если вы в некоторый момент начнете двигать линейку? Это тело не жесткое (теория относительности не допускает абсолютно твердых тел), и, пока воздействие дойдет до удаленной точки, пройдет некоторое время. Скорость ни при каких условиях не будет больше, чем c, т. е. вы не сможете за сколь угодно короткий промежуток времени заставить двигаться удаленный конец реального тела. Если кто-нибудь докажет, что в природе это не так, он опровергнет теорию относительности. Однако сделать это невозможно, так как не существует абсолютно жестких тел, т. е. таких, через которые действие распространялось бы с бесконечно большой скоростью. Это утверждение вполне понятно с точки зрения современной молекулярной физики, согласно которой тела состоят из молекул, между которыми действуют электромагнитные силы. Если посмотреть с этой точки зрения, то при деформации вы меняете положения молекул, все ваши действия передаются через электромагнитные возбуждения, и то, что здесь скорость не может быть больше, чем у электромагнитных волн, более или менее понятно.

Наконец, последнее возражение, которое делалось, касается того, что имеет место, например, при аномальной дисперсии, когда коэффициент преломления меньше единицы. Коэффициент преломления есть отношение между скоростью света в вакууме и скоростью в данном теле. Если он меньше единицы, то скорость света в данном теле *больше* скорости в вакууме. Противоречит ли это теории относительности? Когда говорят о коэффициенте преломления, то имеют в виду так называемую *фазовую* скорость. Если имеются установившиеся, синусоидальные волны, то вы можете сказать, что узел волны движется с такой скоростью, которая действительно больше скорости света в вакууме. Но с этим опять ничего нельзя сделать, потому что если имеется такое установившееся движение, то все сказанное справедливо именно и только до тех пор, пока движение установившееся. Как только вы нарушите его, чтобы дать *сигнал*, все построение падает и коэффициент преломления вовсе не показывает, как будут распространяться возмущенные волны.

Иногда говорят, что вопрос решает групповая скорость. Но групповая скорость также может быть больше скорости света. В чем же здесь дело? Дело в том, что и групповая скорость не всегда относится к распространению сигнала. Подробный разбор увел бы нас слишком далеко, но коротко можно сказать одно: нет сигнала со скоростью, большей скорости света. Это отрицательное утверждение, которое трудно поэтому доказать, но в этом сила теории относительности, она делает определенные предположения относительно природы. Пока нет ни одного факта и нет ни одного намека на факт, который противоречил бы утверждению о предельном значении скорости света в вакууме. Всякая теория оперирует с известными гипотезами и ценна постольку, поскольку она не только объясняет то, что известно, но и делает предсказания, так что этого нельзя поставить в минус теории относительности.

После всех этих предварительных рассуждений у нас есть достаточно материала, чтобы построить всю теорию так, как ее строит Эйнштейн. Мы к этому и приступим.

Представим себе, что у нас есть две системы, движущиеся друг относительно друга с определенной скоростью: система K и система K'. В системе K я прежде всего установлю во всех точках одинаковые часы, что я делаю, пользуясь, скажем, ньютоновыми законами, вообще тем, что мы называем сейчас хронометром. Неважно, будет ли именно такого рода установка, но, во всяком случае, мы воспользуемся тем, что мы называем периодическими процессами; я думаю, что здесь принципиальных затруднений не будет. Итак, мы знаем теперь, как измерить промежуток времени в любом месте. Кроме того, пользуясь твердым телом (скажем, из стали), мы устанавливаем эталон длины. Это может быть парижский метр или какой-либо другой эталон. Мы имеем, далее, рецепт, как измерять любые длины здесь, там и во всяком другом месте. Наконец, по рецепту Эйнштейна мы синхронизируем все наши часы с какими-нибудь одними из них. Теперь все пространство, как говорят, *метризовано.* Каждой точке можно приписать определенные координаты и каждому событию определенное время, вернее, каждому событию можно приписать и определенные координаты и определенное время в нашей системе отсчета. Всякие высказывания, всякие теории, в которые входит зависимость между x, y, z и t, приобретают теперь определенный смысл, мы знаем теперь, что значит t в любом месте, что значит x, y, z.

Точно так же мы все определим в системе K'. По принципу относительности мы должны предположить, что и там дано твердое тело, даны часы и синхронизм установлен посредством тождественного рецепта — при помощи света. Единственное, что будет трудно в первый момент,— это вопрос о том, как взять в K' те же самые эталоны длины и времени. Я беру в системе K определенные эталоны, а какие эталоны я возьму в K'? Пока возьмем любой эталон длины, также сделанный из стали, но произвольный, равно как и любой продолжительности «секунду». Итак, я и в системе K' также метризовал пространство, по тем же самым рецептам. Однако я еще имею свободу в выборе эталонов. Я ограничу ее требованием, чтобы при имеющемся в K' эталоне длины и эталоне промежутка времени скорость света в K' равнялась, как и в системе K, 300 тыс. *км* в секунду. Это требование оставляет произвол в выборе уже только одного эталона, например эталона длины.

Что говорит принцип относительности? Принцип относительности говорит, что если вы облечете в теоретическую форму какое-нибудь явление в одной системе, то соответствующее явление, выраженное в координатах другой системы, будет описываться совершенно так же, т. е. если существует явление, которое описывается в K определенным образом в координатах x, y, z, t, то существует и такое явление, которое совершенно так же описывается в системе K' в координатах x', y', z', t'. «Совершенно так же» — это, конечно, пока трудно утверждать, потому что если вы выберете эталон в одной системе одним способом, а в другой— несколько другим, то получите и несколько иной результат. Принцип относительности говорит иначе: *наверно*, *можно* выбрать эталоны так, чтобы было то же самое. При любом выборе эталонов вы не будете иметь того же самого, но принцип относительности говорит: можно выбрать эталоны так, чтобы было то же самое. Это, конечно, совершенно тривиальная вещь [1]. Если я говорю, что в лаборатории здесь и в лаборатории в Ленинграде все явления происходят одинаково, то это возможно только при условии, что я буду одинаково измерять. Если в Москве я буду измерять температуру одним термометром, скажем газовым, а в Ленинграде — ртутным, то я получу различные описания явлений, различные результаты. Что это означает для физики? Это значит, что я получу одни и те же результаты только в том случае, если я буду пользоваться одинаковыми определенными инструментами. Принцип относительности утверждает или предполагает большее — что я *могу* выбрать язык, на котором явления в другой системе описывались бы так же, как и в первой.

Итак, произвольность осталась еще в выборе эталона. Как выбрать одинаковый эталон в обеих системах? Вы увидите, что это просто, и мы вскоре этот вопрос решим.

Какая же теперь перед нами задача? После того как установлена метрика в K и K' , перед нами стоит задача преобразовать координаты x, y, z, t в x', y', z', t'. Вот что это значит. Пусть произошло некоторое событие, пусть в системе K это событие имеет координаты x, y, z и случилось в момент t. Это имеет теперь совершенно определенный смысл, и это я наблюдаю. То же самое событие я наблюдаю в системе K', и там оно имеет координаты x',y', z', t'. Спрашивается, как зависят координаты x', y', z', t' от x,y, z,t. Одни координаты являются функциями других. Спрашивается, какими функциями? Мы установили метрику в обеих системах, и, значит, мы можем иметь определенное суждение по этому вопросу. Для того чтобы найти, какова зависимость между теми и другими координатами, мы можем просто прибегнуть к опыту. Это уже вопрос не определения, а измерения. Если я утверждаю, что будут такие-то формулы, то можно это проверить. Можно, например, спросить: правильно галилеево преобразование или неправильно? Пока я не знал, что такое x, y, z, t, этот вопрос не имел смысла. Теперь же вполне можно спросить: дается зависи-

---

[1] [Тривиальным является то, что для выполнения принципа относительности *нужен* одинаковый язык в обеих системах (эта мысль далее и поясняется). Но то, что такой язык *может* быть найден, отнюдь не тривиально. Это ни откуда не следует логически и является вопросом опыта.]

мость между x', y', z', t' и x, y, z, t в форме галилеева преобразования. Правильна она или нет? И можно найти правильную зависимость.

Но весь опыт наш требует — и Эйнштейн это принял,— чтобы зависимость эта удовлетворяла двум постулатам — постулату независимости скорости света от движения источника и постулату относительности. Оказывается, того, что мы знаем, уже достаточно, чтобы получить искомую функциональную зависимость до конца. Таким образом, наша задача будет такова: считая эти два постулата результатами опыта, т. е. принимая их, найти зависимость между двумя четверками величин.

Возьмем какое-нибудь событие, которое мы измерим как в одной системе координат, так и в другой. В качестве события мы выберем приход в определенную точку точечного светового сигнала, выпущенного в момент $t = 0$ из точки $x = y = z = 0$. Это же событие можно рассматривать и в системе K'. Оно будет иметь координаты x', y', z', t'. Если это явление, о котором я только что говорил, то для него в системе K существует определенная зависимость между координатами x, y, z, t, а именно квадрат расстояния от точки O (начала координат), из которой вышел сигнал, равен $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$. Такова зависимость между x, y, z и t для этого события, потому что мы взяли распространение светового сигнала, вышедшего из нулевой точки в момент $t = 0$, и принимаем как установленный опытом факт, что свет распространяется с постоянной скоростью c. Но в системе K' это также есть распространение света из определенного источника. Так как по второму постулату скорость источника не играет роли и так как по принципу относительности (первому постулату) я должен видеть в K' совершенно то же самое, что вижу в системе K, то это событие должно дать в системе координат x', y', z', t' ту же самую зависимость, т. е. $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$. Я предполагаю при этом, что в системе K' сигнал выходит из точки $x' = y' = z' = 0$ в момент $t' = 0$. Следовательно, x', y', z', t' должны быть такими функциями от x, y, z, t:

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z, t), \\ y' &= f_2(x, y, z, t), \\ z' &= f_3(x, y, z, t), \\ t' &= f_4(x, y, z, t), \end{aligned}$$

что каждый раз, когда $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, я получаю $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - c^2f_4^2 = 0$. Требование, чтобы вторая сумма обращалась в нуль при всех таких x, y, z, t, которые обращают в нуль первую сумму, резко суживает класс возможных функций. Это требование почти дает однозначность в определении f_1, f_2, f_3, f_4, но не совсем.

В настоящее время известны все классы функций, которые удовлетворяют нашему требованию. Я не буду их перечислять, тем более что не все они для нас приемлемы. Мы наложим еще одно дополнительное требование, которое выделит из общего класса функций, удовлетворяющих нашему условию, более простой класс, которым мы и займемся. Именно, мы потребуем, чтобы эти функции были *линейными* функциями от x, y, z, t.

Чем обосновать нашу уверенность в том, что интересующая нас зависимость выражается линейными функциями от x, y, z, t? Можно дать много обоснований. Этот вопрос, как мне кажется, всегда более или менее правильно излагается во всех учебниках. Я укажу только одно обоснование, которое вполне убедительно и, по-моему, является достаточным. Если мы представим себе в системе K (K — всегда *наша* система, в которой мы производим измерения) какое-нибудь движение, например движение снаряда, и будем считать, что движение равномерное и прямолинейное, то это значит, что x, y, z являются линейными функциями от t. Я спрашиваю затем: как выглядит это движение снаряда, если мы будем рассматривать его в координатах x', y', z', t'? Мне нужно просто подставить функции преобразования, и я получу зависимость между x', y', z' и t', т. е. зависимость в другой системе. И вот естественно требовать, чтобы все прямолинейные и равномерные движения относительно одной системы воспринимались как равномерные и прямолинейные и относительно другой. Следовательно, если я имею линейные уравнения между x, y, z и t, то при подстановке они должны переходить в линейные же, а для этого преобразование должно быть линейным. Правда, оно еще может быть линейным, но не целым, например

$$x' = \frac{\text{линейная функция}}{\text{линейная функция}}.$$

Если мы, кроме того, потребуем, чтобы конечным координатам в одной системе всегда соответствовали конечные координаты в другой, то мы придем к тому, что x', y', z', t' должны быть *целыми* линейными функциями от x, y, z, t.

Здесь есть тонкость, о которой я скажу два слова. Мы требуем, чтобы равномерное и прямолинейное движение в одной системе воспринималось как равномерное и прямолинейное и в другой. Можно ли сказать, что это требование вытекает из принципа относительности? Движение какого-нибудь тела в одной системе, во всяком случае, будет выглядеть иначе, чем в другой, т. е. скорость этого тела в одной системе будет иная, чем в другой.

Мы в свое время говорили, что принцип относительности нисколько не требует, чтобы одно и то же явление всегда выражалось одинаково в разных системах, потому что могут быть различные начальные условия. Я бросаю тело сверху вниз. Для вас это будет вертикальное падение, т. е. прямолинейное движение, а для движущегося наблюдателя это будет парабола. Утверждение принципа относительности касается лишь одинакового протекания явлений при *одинаковых начальных условиях*. Почему же я непременно требую, чтобы прямолинейное и равномерное движение в одной системе было бы таким же и в другой? Будем считать это просто самостоятельным требованием. Часто это выводят из однородности пространства, о которой мы говорили. Это тоже правильная точка зрения, и сводится она к следующему. Вы как-то установили координатные оси одной и другой систем. Если вы одну систему координат перенесете параллельно самой себе, то, конечно, зависимости между координатами станут другие. Требование однородности пространства заключается в том, чтобы никакая точка не была выделена, т. е. если я перенес систему K, то я могу и вторую систему K' перенести таким образом, чтобы между новыми координатами там и здесь установились те же самые зависимости, которые были прежде для неперенесенных систем координат. Это разумное требование, которое говорит, что нет ни одной точки, специально выделенной, что я могу принять за начало координат любую точку и получу то же самое. Если положить в основу это требование, то выходит, что это возможно только тогда, когда функции преобразования линейны, когда

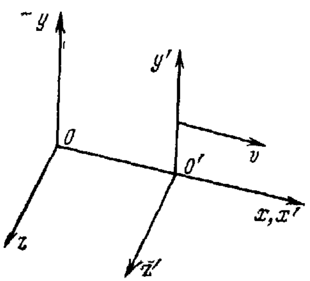

Рис. 45

$$f(x + a) = f(x) + b.$$

Мы потребуем, чтобы это было удовлетворено для всех координат x, y, z, t. Этого, в сущности, достаточно. Все остальное можно просто строго и однозначно вывести. Но, чтобы избегнуть усложнений, мы возьмем обе системы K и K' специальным образом. Это, как вы увидите, никакого ограничения не накладывает, но весь вывод получается нагляднее и проще.

Мы представим себе, что система координат K' взята так, что направление движения системы K' совпадает с осью x. Допустите, что этого нет; тогда можно просто повернуть систему K так, чтобы этого достичь. Так как мы знаем, как переходят координаты из одних в другие при повороте, то пересчитать для этого случая будет легко. Это мы умеем делать. Поэтому возьмем сразу же систему, в которой движение K' описывается проще и которая отличается от общего случая только тем, что мы определенным образом повернули ее оси. Затем мы примем, что оси y', z' системы K' параллельны соответствующим осям первой системы, а ось x' совпадает с осью x. Кроме того, представим себе, что в момент $t = 0$ начало координат K' совпадает с началом координат K, т. е. при $t = 0$ имеем

$$x = y = z = 0, \qquad x' = y' = z' = 0.$$

Часы в K' мы также можем поставить как угодно. Поставим их так, чтобы часы, находящиеся в начале K', в момент $t = 0$ показывали $t' = 0$. В силу поставленных условий функции преобразования могут быть только однородными, постоянных членов у них быть не может.

Возьмем какую-нибудь точку в плоскости $z = 0$. Так как плоскости xy в обеих системах координат совпадают, то, очевидно, все время, пока $z = 0$, мы будем иметь для этой точки и $z' = 0$. То же самое относится и к координате y. Значит, мы уже наверное знаем, что $z' = \lambda z$. Действительно, z' — линейная функция, а других членов здесь быть не может, потому что при любых x и y как только $z = 0$, то и $z' = 0$. По тем же соображениям $y' = \lambda y$. Ясно, что, ввиду полной равноправности y и z, λ будет одно и то же.

Теперь относительно плоскости $x' = 0$. Какое значение будет иметь x для всех точек плоскости $x' = 0$? Оно будет иметь значение $x = vt$, потому что плоскость $y'z'$ движется параллельно плоскости yz, и когда $x' = 0$, то $x = vt$. Следовательно, $x' = \alpha(x - vt)$.

Наконец, t' будет линейной однородной функцией от x, y, z, t, и я могу ее написать так: $t' = \gamma t - \delta x$. Вы скажете, что я могу прибавить еще $\mu y + \nu z$. Да, можно прибавить, но это должно быть равно нулю. Если бы это было не так, то при $t = 0$ и $x = 0$ мы имели бы разное t' в различных точках плоскости $x' = 0$. Так как все здесь совершенно симметрично, то ясно, что добавок $\mu y + \nu z$ должен равняться нулю. Конечно, все эти соображения симметрии правильны, хотя, возможно, их следовало бы изложить систематичнее и строже. Но все это не имеет большого значения, потому что сделать это очень легко; в литературе это есть, а у нас ушло бы на это много времени.

В конечном счете мы свели дело к тому, что функции преобразования должны иметь вид

$$x' = \alpha\,(x - vt), \;\; y' = \lambda y, \;\; z' = \lambda z, \;\; t' = \gamma t - \delta x,$$

причем все величины $\alpha, \lambda, \gamma, \delta$, вообще говоря, являются функциями скорости v. Здесь уже вполне ясно, что делала классическая теория. Она принимала в общем случае $t' = t$. В этом сказывалось убеждение, что одновременность имеет одно и то же значение во всех системах.

Таковы общие формулы, к которым мы пришли и которые должны удовлетворять нашим постулатам, т. е. требованию, что коль скоро $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, то должно быть и $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$. Первое равенство должно непременно вести за собой второе. Теперь остается сделать немного. Возьмем $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$, подставим наши выражения x', y', z', t' и получим

$$\alpha^2 (x - vt)^2 + \lambda^2 (y^2 + z^2) - c^2 (\gamma t - \delta x)^2.$$

Эта квадратичная функция от x, y, z, t должна равняться нулю, когда $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$. Очень легко показать, что это возможно только тогда, когда эта функция тождественно равняется $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, умноженной на какую-то величину, т. е когда мы имеем

$$\alpha^2 (x - vt)^2 + \lambda^2 (y^2 + z^2) - c^2 (\gamma t - \delta x)^2 \equiv$$
$$\equiv \rho^2 (x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2).$$

Что это значит? В наших уравнениях преобразования величины α, λ, γ, δ не произвольны, а должны быть такими, чтобы выполнялось написанное здесь тождество. А это значит, что должны быть равны коэффициенты при x^2, y^2, z^2, t^2 и xt. Легко видеть, что это даст нам следующие уравнения для α, λ, γ и δ:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - c^2\delta^2 &= \rho^2, \\ \lambda^2 &= \rho^2, \\ \alpha^2 v^2 - c^2\gamma^2 &= -c^2\rho^2, \\ -\alpha^2 v + c^2\gamma\delta &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения легко решить. Я просто напишу окончательное решение. Одну из величин можно считать положительной (пока это неважно), скажем ρ мы будем считать положительным. Тогда $\lambda^2 = \rho^2$ (где ρ — еще произвольно), $\alpha = \gamma = \pm \dfrac{\lambda}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{v}{c}\right)^2}}$, $\delta = \dfrac{\alpha v}{c^2}$. Таково решение наших уравнений с точностью до знака. Если подставить полученное решение в уравнения преобразования, мы получим окончательный вид этих преобразований. Вместо ρ можно написать λ, это безразлично (позже вы увидите смысл этого), и пока что просто возьмем положительный знак. Тогда уравнения преобразования получатся в такой форме:

$$x' = \frac{\lambda(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = \lambda y, \qquad z' = \lambda z,$$

$$t' = \frac{\lambda\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Сюда входит еще произвольная величина λ. Это обусловливается тем, что масштабы длины в обеих системах еще не унифицированы. Это и есть лоренцово преобразование с тем отличием, что здесь $\lambda \neq 1$. Мы должны еще оправдать, что $\lambda = 1$. Это мы сделаем в следующий раз.

Мы видим, что если справедливы оба постулата Эйнштейна, то при данном определении одновременности формулы преобразования однозначно определяются. Это лоренцово, а не галилеево преобразование. Почему оно называется лоренцовым? Первым его открыл Лармор, но он ввел его совсем из других соображений. Вы помните, что Лоренц искал, какие нужно взять преобразования для того, чтобы максвелловские уравнения оставались инвариантными. Вы помните, что, исходя отсюда, он нашел такие преобразования, что в вакууме уравнения были инвариантны, а при наличии зарядов — почти инвариантны. Такова была лоренцова точка зрения. Теперь вы видите, что совершенно с другой точки зрения, на первый взгляд никак не связанной с лоренцовой (в действительности связь есть), к этому преобразованию пришел Эйнштейн. Эйнштейн получил его, я бы сказал, без всяких максвелловских уравнений. Если принять два его постулата, то формулы преобразования должны быть именно лоренцовыми.

В следующий раз мы посвятим лекцию дискуссии лоренцова преобразования. Это последний момент, в котором есть многое, о чем следует поговорить и который вызывал много недоразумений.