штабы будут вести себя в соответствии с принципом относительности и принципом независимости скорости света от движения источника.

Значит, у всякой теории должны быть определения и нельзя сказать заранее, какое из них лучше. В этом отношении теория относительности не пошла ни на иоту дальше. Но этим еще ничего не сделано. Кроме этого, нужны утверждения относительно того, как будут себя вести реальные часы и реальные масштабы.

Таким образом, дело обстоит не так, что прежде не нужно было ничего определять, а теории относительности это нужно. Нет. Раньше утверждали одно, а теория относительности утверждает другое. В общепознавательном смысле все элементы, которые есть здесь, были также и там. Весь вопрос о том, кто прав *фактически*. Теория относительности утверждает, что она права, и, как сказано, опыты, по-видимому, дают ей право так говорить. Вопрос о том, справедлива ли теория относительности или нет,— это вопрос не логический, а фактический, это вопрос опыта, и только с этой точки зрения можно с теорией относительности соглашаться или не соглашаться.

ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(22. IV 1934 г.)

Дополнительные замечания о лоренцовом преобразовании. Одновременные и одноместные пары событий в релятивистской и в классической кинематике. Более общий вид лоренцова преобразования Вопросы о четырехмерности. Арифметизация геометрии и геометризация аналитики Что именно нового внесла теория относительности Прежние и новые инварианты. Времениподобный и пространственно-подобный интервал. Вещественные представители интервала

Прошлый раз мы закончили вопрос о сложении скоростей в теории относительности. Позвольте сегодня сделать некоторые дополнительные замечания о лоренцовом преобразовании, которые несколько обобщат и уточнят определенные положения. Вы помните, что лоренцово преобразование имело вид

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right). \tag{21}$$

(Такой вид оно имело вследствие специального выбора координат).

Мы видели, что одно из самых существенных следствий из таких формул перехода от координат системы K к координатам системы K' заключается в том, что понятие времени и понятие длины потеряли абсолютное значение. Понятие времени и понятие длины уже не абсолютны для данного тела, а зависят от системы координат, в которой производятся измерения. Мы сначала установили все соотношения в каждой системе порознь, а затем высказали в качестве физического постулата, что если перенести твердый стержень из одной системы в другую, то он ведет себя согласно такого рода зависимости.

Одно следует отсюда сразу же: если длина стержня, перенесенного из одной системы в другую, изменяется в согласии с этой зависимостью, то, будучи перенесен из второй системы в первую, он опять будет иметь в первой системе те же самые размеры, как и до переноса. Иными словами, мы здесь постулируем ту не самоочевидную вещь, что длина стержня не зависит от истории его движения, т. е., будучи перенесен в другую систему, а потом обратно в первую, он не изменит своей длины.

Я хотел бы обратить ваше внимание еще на одно из следствий, вытекающих из наших формул. Если у нас имеется шар, находящийся в покоящейся системе, то этот шар, измеренный в движущейся системе, будет уже не шаром, потому что размеры в направлении движения изменились, а в поперечном направлении остались прежние. Это будет сплющенный эллипсоид. Отсюда следует, далее, что объем также является величиной, которая, будучи измерена в различных системах, имеет разное значение. Возьмите, например, параллелепипед; объем его равен произведению трех его измерений. Во время движения два измерения остаются без изменения, а одно сокращается; следовательно, объем изменится, и легко видеть, что мы будем иметь

$$V_{K'}^{K} = V_{K'}^{K'}\sqrt{1-\beta^2}.$$

Другими словами, объем тела также не есть инвариант, а зависит от системы отсчета.

Но у нас есть все же пока одно выражение, которое остается неизменным, будем ли мы его измерять в одной системе или в другой. Это не пространственный отрезок и не отрезок времени, а их комбинация: $x^2-c^2t^2 = x'^2- c^2t'^2$. Это выражение, составленное определенным образом из временных и пространственных координат, не изменяется, не зависит от системы координат, в которой вы измеряете.

Я хотел бы указать, что написанная форма инварианта обладает очень малой общностью, она специфична ввиду того, что мы исходили из определенных систем координат. То, что мы исходили из определенной ориентации осей координат, несущественно, а существенно то, что мы подогнали начальную точку так, что при $x = 0$, $t = 0$ получается и $x' = 0$, $t' = 0$. Мы могли бы вести отсчет x' и t' от другого начала. Мы получим более общие выражения, если прибавим к x' некоторую величину α, а к t' — величину τ. Так как теперь, при $x = 0$, $t = 0$, x' и t' будут иметь какие-то произвольные значения, то при переносе начала координат выражение $x^2 - c^2t^2$ не останется инвариантным. Но теперь инвариантным будет выражение

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2 = \text{const},$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ и т. д. Это очень существенно отметить, и вот почему. Инвариант является некоторым выражением, относящимся к *двум* событиям. Раньше могло показаться, что он относится к одному событию, здесь же сразу видно, что к двум. Это затемнялось только потому, что одно из этих событий было таково: $x = 0$, $t = 0$, и благодаря специальному выбору координат это переносилось и в другую систему. Теперь мы имеем более общий случай.

О скоростях мы больше говорить не будем. Мы видели, что формулы (21) предрешают вопрос о том, как преобразуются скорости, и видели, что теорема сложения скоростей приобретает новую форму. Я уже подчеркивал, что это получается потому, что мы даем определенное толкование сложению скоростей. Когда речь идет о сложении скоростей в одной и той же системе, то все остается по-старому, но при интересовавшей нас постановке вопроса обычная теорема сложения скоростей заменяется эйнштейновской, о которой мы достаточно говорили.

Обратимся теперь к довольно тонкому вопросу, который во всем дальнейшем играет существенную роль. Я ставлю вопрос следующим образом. Произошли два события, например две световые вспышки, причем в двух различных местах и в различные моменты времени. Мы знаем, что

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 + x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Спрашивается, могу ли я подобрать такую галилееву систему, движущуюся по отношению к исходной системе K, чтобы в ней эти события произошли в одной и той же точке, т. е. были бы «одноместными»? Мы знаем, что расстояния зависят от системы отсчета. Можно ли сделать два, вообще говоря, неодноместных (в данной системе K) события одноместными (в другой системе K')? Это можно сделать, но не всегда. Для того чтобы это имело место, необходимо $x_2' - x_1' = 0$. Могу ли я подобрать скорость системы K' так, чтобы это было справедливо? Для этого нужно, чтобы числитель в выражении для $x_2' - x_1'$ равнялся нулю, т. е. $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, где $x_2 - x_1$ — разность координат, а $t_2 - t_1$ — разность времен. Мы знаем, что система K' не может иметь скорость v, большую c. Это основное положение, ибо в противном случае мы получили бы мнимые величины. Значит, нашему требованию можно удовлетворить тогда и только тогда, если скорость $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ меньше c. Обозначим $x_2 - x_1 = R$ и $t_2 - t_1 = T$. Следовательно, если для рассматриваемых событий $R < cT$ в какой-нибудь одной системе, то можно подобрать такую систему, в которой они будут одноместными. Если, наоборот, события подобраны так, что в какой-нибудь системе $R > cT$, то такой движущейся системы, в которой эти события были бы одноместными, нет. Другими словами, если два события таковы, что для них в какой-то системе $R > cT$, то это соотношение сохраняется во всех системах. Если же $R < cT$, то пространственное расположение неопределенно, в одной системе может быть $x_2 - x_1 > 0$, в другой может быть $x_2 = x_1$, а если скорость v будет еще больше, то может быть и так, что то, что произошло в одной системе справа, в другой произойдет слева.

Теперь поставим другой вопрос. Можно ли подобрать систему K' так, чтобы два события, не одновременные в данной системе K, в новой системе сделались одновременными? Мы требуем теперь $t_2' - t_1' = 0$, т. е. $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{R}{T} = \frac{c^2}{v}$. Очевидно, это возможно только тогда, когда $R > cT$.

Вы видите, что эти два случая исключают друг друга. Следовательно, все пары событий в смысле их пространственно-временных соотношений принадлежат к одному из двух классов.

Один класс — тот, где вопрос о том, имеет ли место $x_2 - x_1 > 0$ или $x_2 - x_1 < 0$,— чисто случайная вещь, и ответ зависит от системы отсчета, в которой события рассматриваются. Но зато, наверное, если в какой-либо системе K одно событие наступает позже, чем другое, то и во всякой другой системе оно случается позже.

Другой класс состоит из пар событий, для которых имеет место обратное: вы не можете сказать, случилось ли данное событие позже или раньше, чем другое,— это зависит от системы отсчета, но зато вы, наверное, можете сказать, что для этого класса пар $x_2 - x_1$ в любой системе отсчета либо положительно, либо отрицательно.

Таким образом, эти два класса содержат разнородные пары событий. Дальше мы увидим, какое это имеет значение.

Обратим теперь внимание на следующее: c — вполне определенная величина (и в этом весь смысл предыдущего рассмотрения), это скорость света в пустом пространстве. Представим себе, что c увеличивается до бесконечности, и посмотрим, во что обращается тогда лоренцово преобразование. Если $c \to \infty$, то (21) в пределе обращается в такую зависимость:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \ z' = z, \quad t' = t.$$

Это не что иное, как галилеево преобразование. Вы помните, как складывались скорости по Эйнштейну. Если $c \to \infty$, то $u' = u + v$, т. е. получается обычная теорема сложения скоростей. Таким образом, если рассматривать лоренцово преобразование и стремить c в бесконечность, то получается обычное галилеево преобразование — предельный, вырожденный случай лоренцова преобразования, которое представляет собой с математической стороны гораздо более общий случай. С физической стороны мы придаем ему значение именно потому, что считаем, что не существует скорости большей, чем c. Если бы существовала бесконечная скорость, то при тех же самых соображениях мы пришли бы к прежним галилеевым формулам. Вот почему говорят, что если бы в природе имелась бесконечная скорость сигнала, то все было бы «в порядке», преобразование было бы галилеевым и время во всех системах — одним и тем же.

Как же обстоит дело с возможностью сделать два события одновременными или одноместными в классике? Галилеево преобразование получается из лоренцова при $c \to \infty$. Условию $R < cT$ можно удовлетворить при этом всегда. Второму же условию $R > cT$ нельзя удовлетворить никогда. Значит, если бы мы пользовались галилеевым преобразованием, то мы всегда могли бы сделать два события одноместными, но никогда не одновременными. Это естественно. Сделать одновременными два в какой-либо системе разновременных события мы не можем потому, что одновременность в классике абсолютна. Ясно далее, почему любые два неодноместные события можно сделать одноместными. В классике это значит следующее: пусть происходит взрыв в одной точке и несколько позднее в другой. Вы едете в вагоне. Вы всегда можете сделать скорость такой, чтобы оба взрыва произошли против окна вагона, т. е. события будут одноместными. Это всегда можно сделать потому, что скорости не ограниченны. Какая бы ни была разница между временами, вы всегда можете взять скорость такой, чтобы в вашей системе отсчета события сделались одноместными. Из этого видно, что такого разделения событий на два класса в классике нет. В теории относительности оба класса полны, в классике же в одном классе находятся все объекты, а в другом вообще ничего нет.

Тем, что мы до сих пор рассматривали, физическая сущность интересовавших нас вопросов в той мере, в какой речь идет о кинематике, более или менее исчерпана. Но если идти дальше, если перейти к построению механики, электродинамики и т. д., то на весь вопрос о пространственно-временных отношениях интересно посмотреть с более общей точки зрения, по крайней мере формально более общей. Лично я не считаю возможным разделять в очень многих случаях формальную сторону и существо дела и поэтому в том, что дал Минковский, когда он, как говорят, сделал мир четырехмерным, вижу не только формальную сторону. Можно считать, однако, что это не больше чем способ вычисления, именно формальный способ, хотя сам Эйнштейн говорит, что без этого обобщения ему вряд ли удалось бы создать свой общий принцип относительности. Как бы то ни было, к этому вопросу нам нужно теперь обратиться.

Прежде всего несколько слов, хотя и не очень существенных, о более общем лоренцовом преобразовании, о котором до сих пор мы не говорили. Мы выбрали для сравнения очень специальные системы координат. У нас y и z оставались неизменными, а x был взят так, что начальные точки совпадали. Можно спросить себя, как преобразуются координаты и время, если взять две декартовы системы, ничем себя не связывая, т. е. взять и любое начало отсчета, и любое направление осей в каждой системе, и любое направление скорости одной системы по отношению к другой. Конечно, одно мы предполагаем по-прежнему,— что движение систем неускоренное, потому что мы рассматриваем только класс систем, движущихся друг по отношению к другу и по отношению к системе неподвижных звезд равномерно и прямолинейно. Как здесь будут выражаться координаты x', y', z', t' через x, y, z и t? Как здесь поставить вопрос, как искать это преобразование?

Можно и здесь по-прежнему исходить из тех же физических соображений, из которых мы исходили. Я напомню, в чем они заключаются. Мы требовали, во-первых, чтобы скорость света во всех системах была одна и та же и не зависела от движения источника и, во-вторых, чтобы изменение масштабов и времени при переходе от одной системы к другой было обратимо. Формально это означает, что если в одной системе мы имеем

$$(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2=0,$$

т. е. распространение света по шару, то x', y', z', t' должны так зависеть от координат x, y, z, t, чтобы равенство этого выражения нулю в первой системе обращало бы его в нуль и во второй. Но мы видели, кроме того, что обратимость принципа относительности требует, чтобы не только равенство нулю этого выражения в одной системе влекло равенство нулю такого же выражения в преобразованных координатах, но чтобы это выражение было инвариантным, т. е.

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2 (\Delta t')^2.$$

Мы ставим, следовательно, вопрос о том, чтобы найти соответствующие функции $x' = f_1(x, y, z, t)$, $y' = f_2(x, y, z, t)$ и т. д. Прежде всего они, как и раньше, должны быть линейны, потому что мы требуем, чтобы движение, равномерное и прямолинейное в одной системе, было таким же и в другой. Кроме того, формулы преобразования должны оставлять инвариантным наше квадратичное выражение. Этим уже почти полностью определены коэффициенты искомого преобразования, но здесь нужно обратить внимание на одну тонкость, относительно которой я хочу сказать теперь несколько слов и которая имелась уже и в нашем простом преобразовании. Мы имели

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Я уже указывал, что если бы мы написали $x' = -\frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то требованию инвариантности наше выражение также удовлетворяло бы. Можно было бы взять со знаком минус и x' и t', наконец, можно было бы в первом случае взять плюс, а во втором минус, т. е. всего возможно четыре случая. Значит, если мы определим преобразование при помощи требования, чтобы оно оставляло инвариантным выражение $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$, то мы должны еще отдать себе отчет в том, почему мы берем x', y', z' и t' с определенными знаками. Я уже упоминал об этом, но сейчас это очень важно. Знаки могли бы быть другими. Чем мы руководствовались при их выборе?

Здесь есть один существенный момент и один менее существенный. Сначала — менее существенный. Предположим, что я написал бы в x' минус, и предположим, что я перехожу от одной системы к другой, у которой v становится все меньше и меньше и, наконец, $v = 0$. Я получим бы тогда $x' = -x$, а не $x' = x$. Это значит, что за положительное направление x в системе K' я выбрал другое направление, чем в системе K. Таким образом, если я выбираю положительный знак, то это означает не что иное, как условие, что при нашем специальном подборе систем координат прямая x' не только совпадает с прямой x, но и направление у них одинаково.

Когда мы берем более общий случай — преобразование всех трех координат, причем оси координат не имеют этого специального расположения, а произвольно повернуты, то мы можем поставить аналогичное требование, которое будет теперь заключаться в следующем: мы должны выбрать координатные системы так, что если одна из них является правой, то и все остальные должны быть правыми. Это чисто условное ограничение, от которого в дальнейшем придется отказаться.

Более существенный вопрос — выбор знака в t'. Если я поставлю минус, то при $v = 0$ я получу $t' = -t$. Это означает, что я обернул направление времени, т. е. в одной из систем, находящихся в покое друг по отношению к другу, t будет увеличиваться, а в другой уменьшаться; событие, которое в одной системе происходит раньше другого, в другой системе будет происходить позже, и наоборот. Это противоречит тому, чего требует причинность. Нужно, чтобы соотношения «позже» и «раньше» для причинно связанных событий сохранялись. Это требование не включено в распространение света, которое совместимо с тем, что преобразования могут изменять направление времени. Во всей метрике, во всей нашей постановке вопроса требования специального направления течения времени не содержится. Это всегда добавочное требование, каким, впрочем, оно является и во всей классической электродинамике. Поэтому здесь ничего нового нет, но на это нужно обратить внимание. Мы должны, таким образом, требовать также и того, чтобы при наших преобразованиях не могло быть «перевернутого» времени. А тогда, если поставить оба указанных условия, искомое преобразование определено уже вполне однозначно.

Введем новые обозначения. Нам теперь неудобно будет писать x', y', z', t'. Раньше я писал так потому, что в наших рассуждениях выделялось понятие времени, теперь же мы введем следующие обозначения:

$$x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3,\ ct = x_4.$$

Тогда искомое линейное преобразование можно написать следующим образом:

$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k + b_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{22}$$

Это запись самого общего линейного преобразования. Как выделить из него лоренцово преобразование? Оно выделяется требованием такого подбора a_{ik} и b_i, чтобы (22) оставляло инвариантным то квадратичное выражение, которое мы писали.

Что можно сказать относительно b_i — постоянных величин, которые присоединяются к однородным линейным функциям?

Требование инвариантности никакого ограничения на b_i не накладывает, они могут быть любыми числами. Действительно, ведь мы требуем инвариантности для выражения, составленного из разностей координат, а при вычитании величины b_i выпадают.

Для того, чтобы найти значения a_{ik}, нужно образовать выражение

$$(\Delta x_1')^2 + (\Delta x_2')^2 + (\Delta x_3')^2 - (\Delta x_4')^2,$$

подставить в него значения (22) и посмотреть, каким условиям должны удовлетворять a_{ik}, чтобы эта величина оставалась инвариантной. Легко показать, что условия будут такого же типа, как и в том случае, когда речь идет о преобразовании обычных декартовых координат в аналитической геометрии. Только там инвариантным является выражение $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, а у нас должно быть инвариантным выражение из четырех величин, причем четвертая берется с отрицательным знаком,— в этом заключается разница, но тип проблемы тот же самый. Если все это проделать, то получится, например, соотношение $a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - a_{41}^2 = 1$ и затем еще три подобных равенства. Далее мы найдем шесть уравнений вида $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} - a_{41}a_{42} = 0$.

Можно было бы написать условия для a_{ik} обычным образом со знаком суммы, но здесь мешает одно обстоятельство: как выделить последний член, имеющий знак минус? Мне кажется, существует очень простая запись. Я не могу записать инвариант в виде $\sum_i (\Delta x_i)^2 = \text{const}$, потому что четвертый член входит с минусом. Будем обозначать это так:

$$\sum^{(4)} (\Delta x_i)^2 = \text{const} \tag{23}$$

и будем считать, что там, где четверка встречается один или два раза, надо брать минус, а там, где она встречается три или четыре раза, то плюс. Если согласиться так писать, то условия для a_{ik}, которые необходимы, чтобы (22) выражало лоренцово преобразование, напишутся так:

$$\sum_k^{(4)} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, \qquad \text{где } \begin{cases} \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \\ \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j. \end{cases} \tag{24}$$

Итак, для того чтобы преобразование (22) оставляло инвариантной форму (23), между a_{ik} должны быть 10 соотношений (24).

Большего, конечно, сказать нельзя; какие вы имеете каждый раз коэффициенты, об этом мы говорить не будем, но мы знаем теперь, как подойти к этому вопросу. Значит, формально дело обстоит так: лоренцово преобразование является линейным преобразованием, коэффициенты которого удовлетворяют определенным десяти условиям. Сколько вообще коэффициентов в преобразовании? Легко видеть, что в нем 20 коэффициентов. Так как они удовлетворяют десяти независимым уравнениям, то остается 10 степеней свободы. Таким образом, общее лоренцово преобразование есть линейное преобразование с 10 произвольными параметрами, в то время как в нашем лоренцовом преобразовании прежнего специального вида был всего один произвольный параметр — скорость v. Можно подсчитать на пальцах, что действительно должно быть 10 степеней свободы. Если мы имеем систему K и по отношению к ней движется система K', то сколько нужно степеней свободы, чтобы описать все возможные движения? Во-первых, начало координат произвольно, и это дает три параметра. Затем начало отсчета времени произвольно — это еще одна степень свободы; затем поворот осей определяется тремя углами и, наконец, имеются три компоненты относительной скорости, т. е. всего 10 параметров.

Это преобразование называется псевдоортогональным. Почему псевдоортогональным? Потому что тот же самый вопрос ставится в аналитической геометрии, где речь идет просто о повороте координатной системы и преобразование должно быть таким, чтобы оно сохраняло инвариантным расстояние, т. е. сумму трех квадратов разностей координат. Такое преобразование называется ортогональным. Здесь преобразование похоже на то, но сохраняет значение не суммы, а трех членов с положительными знаками и одного с отрицательным.

Итак, мы имеем многообразие ∞^{10} преобразований. Любое из них всегда можно получить путем такой последовательности операций. Для каких-либо систем, движущихся как угодно, вы можете сначала сделать самое обычное декартово преобразование координат, такое, чтобы оси систем сделались параллельны, т. е. вы можете сделать так, чтобы получилось преобразование только между одной координатой и временем. Выполнив его, вы можете еще раз повернуть координатную систему, придав ее осям первоначальное направление, т. е. вы делаете три последовательных операции. Если к любым системам применить последовательно эти три преобразования, то можно прийти к любому заданному положению. Все лоренцовы преобразования исчерпываются этими тремя последовательно примененными преобразованиями. Первое и последнее — это просто повороты координатных осей. Единственное, что ново,— это второй этап, т. е. специальное лоренцово преобразование, которое мы уже изучили, а, значит, изучая его, мы косвенно изучили и общий случай, так что на нем не стоит более останавливаться.

Еще одно замечание. Требование инвариантности определяет a_{ik} не совсем однозначно, как и в случае специального лоренцова преобразования. Мы поставили требования, чтобы правая система оставалась правой и время сохраняло свое направление. Для первого нужно, чтобы детерминант (a_{ik}) был равен 1, а не -1. Для второго же необходимо, чтобы выполнялось условие $a_{44} > 0$. С этими двумя дополнительными условиями лоренцово преобразование полностью определено в самом общем случае. Но это скорее формальная вещь, к которой я все же хотел привлечь ваше внимание.

Теперь наступило время обратиться к несколько другому воззрению на все эти пространственно-временны́е соотношения. То, что вносит теория относительности, меньше, чем обычно думают, но все-таки нужно поговорить об этом подробнее.

Если независимо от того, стоим ли мы на классической точке зрения или на позициях теории относительности, всмотреться в то, что служит для измерения пространственно-временных отношений, что является элементом, из которого мы все складываем, элементом, при помощи которого мы характеризуем эти соотношения, то становится ясным, что это не точка пространства сама по себе и не момент времени сам по себе, а точка пространства в определенный момент времени. Как сказал как-то Минковский, никто никогда не видел точки в неопределенное время и не видел времени в неопределенной точке. Под последним я не подписался бы целиком, но, поскольку речь идет о физике, это, конечно, верно. Когда вы что-нибудь изучаете в физике, всегда дело касается какого-то момента времени в какой-то точке пространства. Поэтому элементом является не точка пространства и не время сами по себе, а *событие*, т. е. нечто такое, что определено *четырьмя* величинами — тремя пространственными координатами и моментом времени.

Если мы согласимся называть все эти четыре величины, которыми определено событие, координатами, то можно сказать, что элементами, из которых складываются наши пространственно-временные соотношения, являются четыре координаты. Совокупность четырех координат x, y, z, t Минковский называет мировой точкой. Это сделано, конечно, полностью по образу и подобию того, что делается в аналитической геометрии. В аналитической геометрии точкой называется совокупность трех чисел x, y, z. Вы, конечно, все это знаете, но я просто напомню то течение геометрической мысли, которое было наиболее полно оформлено в декартовой аналитической геометрии. Это так называемая арифметизация геометрии.

Тройка чисел называется в этой геометрии точкой. Дело рассматривается не так, что данная точка *имеет* координаты, а говорят, что сама точка — это чисто арифметическое, алгебраическое понятие. Пара троек чисел называется двумя точками, парой точек. Если рассматриваются точки (т. е. тройки чисел), удовлетворяющие алгебраическому уравнению $ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c, d — постоянные, то говорят, что эти тройки чисел образуют плоскость. Опять-таки здесь нет никаких пространственных представлений. Просто я беру лишь те числовые тройки, которые удовлетворяют этому уравнению. Необходимо указать, что́ в этой геометрии называется расстоянием между двумя точками. По определению, расстоянием между двумя точками называется

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{25}$$

Так идет развитие аналитической геометрии, так можно построить замкнутую аналитическую систему, которая ставит себе, например, следующие задачи. Пусть даны две точки, т. е. даны две тройки чисел. Можно спросить: каковы те линейные преобразования этих чисел в другие две тройки чисел, которые оставляют инвариантным выражение (25)? Мы находим ортогональные преобразования, которые в аналитической геометрии мы называем преобразованиями координат.

Если так посмотреть на дело, то, в сущности, вся геометрия сводится к тому, что изучают совокупность таких преобразований, которые оставляют инвариантной величину (25). Можно доказать тогда, например, такие теоремы: даны два треугольника, т. е. заданы один раз три тройки чисел и другой раз три тройки чисел. Здесь опять нет ничего пространственного, треугольником называется совокупность трех троек чисел. Когда мы будем называть эти треугольники равными? Равными или конгруэнтными мы будем их называть тогда, когда при помощи одного преобразования, которое оставляет расстояния инвариантными, мы можем совместить первые три тройки со вторыми, т. е., применив это преобразование, получить из первых троек чисел вторые. И вот можно доказать, например, что если у вас есть дважды по три тройки чисел, которые в указанном смысле конгруэнтны, то вы можете определить понятие площади треугольников и доказать только из этих арифметических соображений, что их площади будут равны.

Такова одна из систем построения геометрии. Ничего общего с пространственными представлениями она пока что не имеет. В чем ее ценность? В том, что если вы возьмете какие-либо физические тела, например твердые тела, из этих твердых тел построите то, что мы называем треугольником, т. е. скрепите три стержня и возьмете координатную систему из трех стержней, то, найдя по определенным рецептам координаты точек скрепления, т. е. получив для каждой точки тройку чисел, вы убедитесь, что эти тройки чисел, взятые из реальных предметов, будут подчиняться тем законам, которые вы вывели для троек чисел чисто абстрактно. Иными словами, утверждается, что если вы считаете перенос начала и поворот осей таким преобразованием, которое оставляет инвариантным (25), то такая геометрия применима к реальным предметам. Эйнштейн в своей общей теории относительности говорит, что это вовсе не так. Он построил *другую* систему алгебраических отношений, которую он назвал геометрией, и утверждает, что в природе применимы те соотношения, которые вытекают из нее. Вы видите, что при таком построении получается следующее: мы строим известную абстрактную систему, известные образы, понимаемые алгебраически, совершаем с ними разные операции и обнаруживаем, что этим операциям мы находим в реальной природе определенное соответствие. Именно поэтому такая система приобретает для нас ценность.

Из сказанного ясно, как получилось, что мы привыкли называть точкой не то, что мы представляем себе в пространстве, а просто три числа. Естественно и обратное: если мы видим, что в других соотношениях физики нам важны события, которые определяются четырьмя величинами, то, обобщая это понятие, мы называем точкой совокупность этих четырех чисел. Наша аналитическая геометрия определялась тройкой чисел. Соответственно здесь мы должны сказать, что соотношения, которые мы будем исследовать, отвечают пространству четырех измерений.

Я поставил вопрос в такой форме специально для того, чтобы показать вам следующее. Только привычка (для меня это несомненно) мыслить настоящую геометрию аналитически повела к тому, что в теории относительности, которая разбирает вопросы чисто аналитически, мы называем определенным образом полученные четыре числа x, y, z, t таким, я бы сказал, на первый взгляд невыгодным словом, как точка. Почему эти четыре числа называются точкой? Потому что алгебраизация обычной геометрии приучила нас к тому, что элемент из трех чисел мы называем точкой. Перенося этот способ дальше, мы говорим, что и в теории относительности мы станем называть систему чисел точкой. Но так как здесь четыре координаты, то мы строим *четырехмерный* мир. *Ничего большего это не значит.* Если мы говорим, что теория относительности рассуждает о четырехмерном мире, то ничего другого это не означает. *Ничего мистического, ничего метафизического в этой четырехмерности мира теории относительности нет.* Никто никогда не требовал, чтобы перестроились все пространственные представления, что если раньше был трехмерный мир, то теперь нужно научиться представлять себе четырехмерный.

Просто, когда встречаются такого рода задачи, где элементом служит нечто, определяемое тремя числами, это называется точкой, а когда у нас четыре числа, то мы также называем их точкой, но точкой четырехмерного пространства.

Я уже сказал, что элементом физического исследования является не точка пространства отдельно и время отдельно, а их совокупность. Такое понимание вовсе не принадлежит теории относительности. Это так же хорошо знали до всякой теории относительности. Эйнштейн это подчеркнул, но ничего нового здесь нет. И если хоть раз это понять и серьезно над этим подумать, то мир делается в указанном смысле четырехмерным, т. е. элементом оказывается нечто, определяемое четырьмя числами. Если вы говорите, что теория относительности утверждает четырехмерность мира, то я возражаю, что классика говорила то же самое. Новое заключается в другом. Если вы переходите от одной системы координат к другой, то классика считала, что из этих четырех чисел, которые определяют событие, три числа x, y, z преобразуются, т. е. изменяются отдельно, а время t остается неизменным. *Только в способе, каким преобразуются эти четыре числа* при переходе от одной системы отсчета к другой, заключается отличие между теорией относительности, с одной стороны, и классической физикой — с другой, а вовсе не в том, что мир стал четырехмерным, не в том, что физическими элементами, которые мы изучаем, являются события. Важно то, что при переходе от одной системы координат к другой t не остается неизменным, а x, y, z, t преобразуются совместно.

Результатом этого является следующее. Если в аналитической геометрии координаты x, y, z как таковые, сами по себе не являлись чем-то характеризующим данную пространственную точку, потому что они изменяются в зависимости от координатной системы, но зато расстояние в пространстве между двумя точками, отрезок, было чем-то абсолютным, что не изменялось, равно как и промежуток времени был также абсолютным, то теория относительности утверждает, что не только x, y, z являются, как и в геометрии, относительными, но и отрезок между двумя точками пространства также является относительным. Там он являлся абсолютным, здесь он относителен; промежуток времени являлся там абсолютным, здесь он тоже относителен. Не в том дело, что раньше все считалось абсолютным и только теперь поняли, что оно не абсолютно, а в зависимости от того, как на это смотреть, будет иметь то или другое значение. Нет, в прежней физике также знали, что есть и абсолютное и относительное. Относительными были координаты, абсолютным было расстояние между двумя точками и промежуток времени. Принцип относительности низвел и эти два понятия до уровня относительных понятий. Это мы знаем, это нужно подчеркнуть, но если мы это подчеркиваем, то не надо забывать и гораздо более важную вещь,— что относительные понятия нужны нам, как леса для постройки. Это знали и раньше, но знали, кроме того, что есть нечто абсолютное, например расстояние и время. Они интересовали нас и с геометрической и с физической точки зрения. Интересовали потому, что это была абсолютная физическая реальность, это были инварианты, которые не зависят от системы координат.

И вот, благодаря тому что в классике были определенные инварианты, которые в теории относительности оказались не инвариантными, упор был сделан именно на эту сторону, на то, чтобы сказать: «Ага, а вот и то и это не инвариантно, все относительно и т. д.». Это создает ложную перспективу. Упор нужно сделать как раз на обратное, на то, что и теория относительности признает инварианты, что и с ее точки зрения существуют абсолютные вещи. Такой абсолютной вещью является выражение $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$, которое остается постоянным независимо от системы координат.

Таким образом, мы видим, что и в этом отношении принципиальной разницы нет. Теория относительности отнюдь не считает все относительным, точно так же раньше не все считалось абсолютным; она только перенесла центр тяжести в вопросе о том, что считать абсолютным, а что относительным, понимая под относительными те величины, которые меняют значение в зависимости от системы отсчета, а под абсолютными те, которые не изменяются при переходе от одной системы к другой. Теория относительности перенесла понятие абсолютного на новое выражение, которое получило специальное название — *интервал*. Это первое.

В современной литературе обычно называют интервалом корень квадратный из обратной величины, т. е. взятой со знаком минус

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2},$$

но нам удобнее пока писать по-прежнему

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2.$$

Интервал похож на инвариант аналитической геометрии (расстояние), но с той существенной разницей, что один знак здесь иной, чем все остальные. Это наводит нас на другой вопрос, о котором часто, особенно в популярных изложениях, говорится неправильно, что может привести к недоразумениям.

Вопрос заключается в следующем. Теория относительности — и в этом существенно новое, что она вносит,— при преобразованиях от одной системы к другой преобразует и t и x, y, z *совместно*. Из этого делают такое заключение. Во-первых, мир четырехмерен. Мы уже знаем, что это ничего сверхъестественного не означает, что это только способ выражаться. Во-вторых, говорят, что четвертая координата есть время, и, таким образом, отождествляют время с пространственными координатами. Встречаешь иной раз такое выражение, что теория относительности, так сказать, уравняла четыре координаты: x, y, z, t. Оснований для этого я абсолютно не вижу. В том, что время — это одно, а пространство — другое, в том, что различие физической сущности этих понятий существует,— в этом отношении теория относительности ничего нового не дала. В некоторых книгах есть указания на разницу между временем и пространством с точки зрения психологии и теории познания. Конечно, так вопрос ставить можно и нужно, но я не понимаю только одного: почему его нужно ставить теперь и не надо было ставить раньше. Что, в сущности, здесь нового внесла теория относительности? То, что и t и x, y, z входят в преобразование совместно, могло, конечно, дать толчок в направлении к тому, чтобы подумать иначе, но никакого фактического основания для этого нет. Физик скажет просто так: рецепт для измерения расстояния один — приложение масштабов, отсчет числа, показывающего, сколько раз масштаб укладывается на измеряемом отрезке. Такой способ измерения дает нам то, что мы называем пространственными координатами. Способ измерения времени совершенно другой: вы берете периодический процесс (то, что называется часами) и при помощи его определяете время. Здесь совершенно различные приемы и процессы, и ни о каком равенстве или тождестве не может быть речи.

Сомнение в правильности этих разговоров о тождестве, особенно у таких людей, как я, закрадывается еще и по другой причине. Как я уже говорил, формальной стороне я придаю очень большое значение. Несомненно, в теории относительности так же как и в геометрии, все зиждется на инвариантах. Там нас интересуют в конечном счете не координаты какой нибудь точки, а расстояния, площади, углы между линиями. Это те быки, на которые все опирается, а не то, что преходяще и зависит от лесов. Точно так же и здесь центральным пунктом является интервал. Он не зависит от системы координат, и поэтому он нас больше всего интересует. И вот какое сомнение зарождается. В выражении интервала несомненно должна сказываться и сказывается структура всех понятий, которые в него входят. Не случайно в инвариантное расстояние аналитической геометрии все три координаты входят симметрично. Правда, могло бы быть, что они отражают различные понятия, но человеку, который придает формализму известное значение, который видит в формализме отображение реальных вещей, должно бы показаться подозрительным, что при различии понятий имеется полная симметрия в формулах. Но этого как раз и нет. Все три координаты, по существу, тождественны. Здесь же, в случае интервала, структура не такая. Вы не можете сказать, что время — это то же самое, что и пространство, потому, мол, что оно входит симметрично с координатами. Нет, оно входит не симметрично, знак его иной. Это кажется не важным, ибо в математике не имеет значения, стоит ли плюс или минус, но это определяет все. Время входит не симметрично, и хотя бы поэтому сделать заключение о тождестве времени и пространства нельзя.

Наоборот, отсюда скорее следует, что они не тождественны. Но, как я уже сказал, я вообще не вижу, что нового внесла в этот вопрос теория относительности.

Итак, для нас существенно понятие интервала. Запишем интервал в виде

$$s^2 = c^2T^2 - R^2.$$

В этой четырехмерной геометрии (и это типично для теории относительности) в отличие от трехмерной один член со знаком минус. Если мы берем какие-нибудь два события (ведь интервал всегда характеризует соотношение между двумя точечными событиями), то для данной координатной системы мы получим какой-то квадрат пространственного расстояния и квадрат временно́го, которые в разных системах будут различны, но, какую бы систему мы ни взяли, интервал будет одинаковым. Предположим, что мы имеем в какой-нибудь системе $s^2 > 0$. Так как s^2 — инвариант, то для всех систем будет $s^2 > 0$. Другой раз может быть $s^2 < 0$, и тогда для всех систем $s^2 < 0$. Таким образом, все интервалы распадаются на два класса: квадраты интервалов могут быть абсолютно отрицательны и абсолютно положительны. Первое будет тогда, когда $cT > R$ по абсолютной величине, а второе — когда $cT < R$. Но ведь это как раз те условия, которые мы описали раньше, когда хотели сделать два события одноместными или одновременными. Значит, если два события таковы, что можно сделать их одноместными, то $R < cT$ и для этого случая квадрат интервала во всех системах будет положительным. Интервал, квадрат которого положителен, называется *времени-подобным интервалом*. Если же два события могут быть сделаны одновременными, то $R > cT$ и квадрат интервала отрицателен. Такой интервал называется *пространственно-подобным*.

Мы видели — и это необходимо еще раз подчеркнуть,— что наличие постоянного инварианта по меньшей мере так же важно, как и подчеркивание относительности того, что до теории относительности считалось абсолютным. Но если это так, то у физика сейчас же явится вопрос: существует ли вещественный представитель интервала?

Обратимся опять к геометрии. Возьмите две точки, например эти две лампы. Я нарочно беру лампы, так как между ними нет связи. Мы говорим, что расстояние между ними есть инвариант. Что мы считаем вещественным представителем этого расстояния? Можно сделать следующее: протянуть веревку или взять стержень достаточной величины, и вот этот стержень, на котором имеются две марки, зарубленные на местах обеих ламп, и есть физическое осуществление этого инварианта R.

Что же является физическим осуществлением инварианта в нашем случае? Это очень легко показать, но осуществление будет различно, смотря по тому, будет ли интервал времени-подобным или пространственно-подобным.

Возьмем сначала времени-подобный интервал. Я говорю так: возьмите какие-нибудь часы, покоящиеся в некоторой системе. Пусть теперь для простоты, чтобы все было совершенно наглядно и ничего нам не мешало, все происходит в темноте, а именно в какой-то момент происходит световая вспышка и затем вторая вспышка в той же точке. Пусть при первой вспышке мы отсчитали 12 часов, при второй, скажем, 12 ч. 5 м. Как измерить, чему равен интервал, соответствующий этим двум событиям? Конечно, я могу измерить интервал в различных системах. Но если я буду измерять в этой системе, где вспышки произошли в одном и том же месте, а значит расстояние равно нулю ($R = 0$), то я скажу, что для этой системы интервал есть просто $s = T$ (пусть $c = 1$). Если я буду измерять в другой, движущейся системе, то эти два показания неподвижных часов останутся инвариантом. Если я видел, что стрелки моих часов стоят при первой вспышке на 12, а при второй — на 12 ч. 5 м., то это факт, абсолютно инвариантный. Как бы ни двигались другие наблюдатели, которые проходят мимо *моих* часов, они всегда будут видеть на них один раз 12, а другой раз 12 ч. 5 м. Это и есть вещественный представитель интервала: разность показаний часов в системе, в которой место вспышки не движется. Итак, если я хочу найти физический процесс, показывающий величину инварианта s, то я беру часы, неподвижные в системе, в которой $R = 0$. В этой системе я измеряю s только этими часами, потому что в этой системе $R = 0$. Если я беру другую систему, то показания ее часов будут иные, но зато и R будет другим. Интервал же опять будет прежним. Значит вещественным представителем интервала является разность двух показаний часов, покоящихся в определенной системе, в которой события одноместны, или, как говорят, *собственное время* между этими событиями. Это вещественный представитель интервала для случая $s^2 > 0$. Отсюда ясно, почему такой интервал называется времени-подобным.

Обратно, если два события заключаются в том, что в системе, в которой покоятся наши масштабы, одновременно на концах масштаба делаются две вспышки, то для таких двух событий в этой системе $T = 0$ и $s^2 = -R^2$. Поэтому длина масштаба, измеренная в неподвижной системе, определяет пространственно-подобный интервал. Таким образом, неподвижные часы измеряют времени-подобный интервал, а неподвижный масштаб измеряет пространственно-подобный интервал.

Итак, процессы, которые являются вещественными представителями этого инварианта, найдены. В общем случае как часы, так и масштабы измеряют интервал. И если права теория относительности, то она показывает, что понятие интервала вовсе не абстрактное понятие, что существует его вещественные представители — часы и масштабы, которые измеряют не время отдельно и пространство отдельно, как думали до сих пор, а интервал.

В этом отношении неудачно само название «теория относительности», так как оно заставляет думать, будто эта теория делает все относительным. Наоборот, она признает абсолютные величины, как признавали их и прежде, но она переносит акцент и делает относительными те величины, которые раньше считались абсолютными.

Я хотел бы, чтобы вы ясно видели, что в четырехмерном пространстве нет ничего, кроме способа выражения, что теория относительности не сказала ничего такого, откуда следовало бы, что время сделалось тождественным или почти тождественным пространству, и что новое заключается только в том, что передвинуты некоторые понятия, что указаны новые величины, которые теория относительности считает абсолютными.