

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28.V 1934 г.)

Краткое резюме. Понятие группы преобразований. Матрица Лоренцова преобразования. Умножение преобразований. Определение группы, примеры. Периодические группы. Лоренцовы преобразования образуют группу. Что дает требование групповости для установления вида преобразований

Элементом пространственно-временных соотношений является событие, т. е. чрезвычайно кратковременный процесс в очень малой области пространства, подобный вспышке или чему-нибудь в этом роде. Событие характеризуется четырьмя величинами — тремя пространственными величинами и временем, и можно сказать, что событие характеризуется четырьмя координатами. Это не ново, и классика тоже знала, что для определения события нужны четыре числа. Три из них входят во все соотношения симметрично и совершенно однородны, четвертое — время — совершенно иначе физически определено, — это величина совершенно другого характера. Теория относительности и в этом отношении ничего не меняет, для нее время также по существу отлочно от пространственных координат.

Весь интерес был сосредоточен на вопросе о том, как можно переходить от одной системы координат к другой. Тут сказывается существенное отличие ответа теории относительности от ответа, который давала классика.

Классика отвечала так: координата t остается неизменной для всех движущихся систем координат, и мы имеем право сказать, что время есть абсолютная координата; x' , y' , z' зависят от x , y , z , но благодаря тому, что t остается инвариантным, получается разделение на пространственные и временные координаты. Поэтому четырехмерность — то, что всегда необходимы четыре координаты, — ступенька вала, разбивалась на трехмерность и одномерность, т. е., грубо говоря, были не 4 координаты, а $3 + 1$.

Теория относительности говорит, что это неверно, что при переходе от системы K' к системе K преобразование координат происходит так, что не только $x' = f_1(x, y, z, t)$, $y' = f_2(x, y, z, t)$, $z' = f_3(x, y, z, t)$, но и $t' = f_4(x, y, z, t)$. Таким образом, разделение на время и пространство однозначным образом невозможно, так как зависит от системы, к которой вы переходите. Благодаря тому, что четыре координаты здесь сплетены, что их объединение это больше, чем декларация, что с этим приходится работать и к этому приспособить весь аппа-

рат, в специальной теории относительности говорят всегда о четырехмерном мире.

Исходя из определенных физических постулатов — относительности, с одной стороны, и независимости скорости света в вакууме от движения источника — с другой, — нам удалось найти вид этих функций. Формулы перехода от одной системы к другой выразились в форме лоренцова преобразования. Это преобразование линейно и в самом общем случае записывается так:

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k + b_i,$$

причем для того, чтобы удовлетворялись два основных постулата, коэффициенты должны удовлетворять определенным соотношениям, а именно таким, чтобы преобразование было псевдоортогональным. Величины b_i произвольны и определяют только перенос начала координат и изменение отсчета времени. Мы всегда будем считать, что начало координат и отсчета времени в обеих системах совпадают и тогда $b_i = 0$, так что мы получаем преобразование

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k,$$

где 16 коэффициентов удовлетворяют 10 определенным условиям, т. е. остается 6 произвольных параметров. Совокупность таких лоренцовых преобразований отображает возможность того, что новая система K' может быть повернута по отношению к системе K , что дает три угла поворота, например три эйлеровых угла, и может двигаться с произвольной постоянной скоростью, что дает три компоненты этой скорости. Эти величины и составляют 6 параметров. Мы видели, что всякий переход от одной системы координат к другой можно составить из трех типов преобразований: простого поворота осей, как в аналитической геометрии, затем специального лоренцова преобразования, затрагивающего одну координату и время, и, наконец, еще одного поворота осей.

Значит, то, что нас интересует, — это специальное лоренцово преобразование

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Именно оно специфично для теории относительности, остальное же складывается из этого преобразования и простых поворотов.

Отсюда мы сделали ряд выводов, кажущихся на первый взгляд парадоксальными, но в которых на самом деле ничего парадоксального нет. Во-первых, длина стержня не является чем-то абсолютным, а зависит от системы, в которой вы ее измеряете. Понятие времени также утрачивает абсолютность и зависит от системы, в которой вы измеряете. Существенным было также то, что теорема сложения скоростей в обычной форме несправедлива и заменяется эйнштейновской теоремой сложения скоростей.

Что будет занимать нас сегодня и о чем я хотел немного рассказать, — это некоторые замечательные свойства преобразований, рассматриваемых не каждое в отдельности, а как совокупность, т. е. некоторые свойства совокупности лоренцовых преобразований.

Для этого нам нужно будет рассмотреть предварительно несколько полужформальных вещей. Мы познакомимся с очень существенным понятием — с понятием *группы преобразований* и вообще с понятием *группы*.

Понятие группы в современной математике и физике играет все большую и большую роль. Мы можем коснуться его только самым поверхностным образом. В учебниках по теории относительности почти всегда говорится, что лоренцовы преобразования образуют группу, и на этом дело кончается. Мне кажется, что на этом нужно остановиться немного подробнее, тем более что после того, как Дирак ввел релятивистское уравнение в квантовой механике, специальная теория относительности несомненно получила известное расширение, а понятие группы позволяет охватить это расширение и понять, в каком смысле нужно пойти дальше и как далеко можно с таким расширением идти. Поэтому мне и хотелось остановиться на этом вопросе больше, чем это обычно делается.

Сначала несколько предварительных замечаний. Лоренцово преобразование — это линейное преобразование, причем мы будем рассматривать только однородное преобразование. Такое преобразование вполне охарактеризовано, если даны его коэффициенты a_{ik} . Квадратная таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в которой каждый коэффициент стоит на своем месте, называется, как вы знаете, матрицей. Если задана матрица, то тем самым задано преобразование, и изучение преобразований сводится, таким образом, к изучению таких матриц. Мы хотим перейти теперь

к вопросу о свойствах совокупности, т. е. сравнивать различные матрицы между собой.

Представьте себе, что вы хотите перейти от системы K к системе K' , движущейся с определенной скоростью по отношению к системе K . Мы будем записывать это таким образом. Матрицу, написанную выше, будем обозначать одной буквой A и символически запишем наше преобразование так:

$$x' = A(x)$$

(обычно скобок не пишут). Если матрица нам дана, то мы сразу можем написать преобразование. Вы видите, что чем дальше мы продвигаемся, тем проще и проще становится запись. Много десятков лет назад выписали бы все четыре уравнения полностью. Потом перешли к такой записи $x'_i = \sum a_{ik} x_k$, где, приписывая индексы в одном уравнении, охватывают все уравнения. Это уже гораздо более простая запись. Теперь это записывается совсем просто, но, конечно, по существу это то же самое.

Итак, мы сделали переход от координат системы K к координатам системы K' . Пусть имеется теперь третья система, которая движется по отношению к K' (а также по отношению к K), — система K'' . Я хочу выразить события в K'' через координаты K' . Пусть скорость системы K'' по отношению к K' есть v_1 . Тогда я могу написать $x'' = B(x')$, где B — новая матрица. Напишем матрицу A для наших специальных преобразований. Она такова:

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right), \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Если мы переходим от системы K' к системе K'' , то все будет выглядеть так же, но с матрицей B , т. е. вместо v всюду будет v_1 . Таким образом, сначала мы перешли от системы K к системе K' , а затем от системы K' к системе K'' . Но мы могли бы прямо перейти от K к K'' . Как выразятся координаты K'' через координаты K , если мы знаем, как выражаются координаты K' через координаты K и координаты K'' через координаты K' ? У нас есть

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k, \text{ или } x' = A(x)$$

и

$$x_i'' = \sum_k b_{ik} x_k', \quad \text{или } x'' = B(x').$$

Мы можем подставить во второе преобразование x' из первого и получим опять линейные функции от x , но с другими коэффициентами. Весь вопрос заключается в том, как выражаются коэффициенты результирующего преобразования, составленного из двух первых преобразований, которое дает переход от системы K к системе K'' . Я могу написать

$$x_i'' = \sum_k c_{ik} x_k, \quad \text{или } x'' = C(x).$$

Спрашивается: как вычислить матрицу C , если даны A и B ? Это простая арифметическая задача, и легко показать, что элемент матрицы C , скажем c_{ik} , составляется из соответствующих элементов a и b следующим образом:

$$c_{ik} = \sum_l b_{lj} a_{jl}. \quad (26)$$

Символически это записывается так:

$$C = BA,$$

и говорят, что C есть произведение двух первых матриц.

Физически третья матрица C означает такое преобразование координат, которое соответствует переходу от системы K к системе K'' , выраженному при помощи двух переходов — от K к K' и от K' к K'' .

Формула (26) вам хорошо знакома: если бы у вас здесь были не матрицы, а детерминанты

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

то элементы детерминанта, являющегося произведением двух таких детерминантов, выражались бы именно таким образом, т. е. для произведения матриц мы имеем то же правило, что и для произведения детерминантов. Я хотел бы только подчеркнуть существенную разницу между детерминантами и матрицами. Детерминант — это число. Я записываю его в виде таблицы, но это одно число. Матрица — это таблица из n^2 чисел. Если я напишу вместо

первой таблицы такую

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix},$$

то как детерминант она равна первой, а как матрица не равна, потому что для матрицы строго определен порядок элементов, здесь же порядок изменен. Об этой разнице никогда не следует забывать. Для всякой матрицы можно вычислить детерминант, составленный из ее элементов. Детерминант матрицы, являющийся произведением двух матриц, равен произведению детерминантов этих двух матриц. Это то же самое. Но вот где существенная разница — и это очень типично для матриц. Вообще говоря, если сначала вы делаете преобразование B , а затем A , то получите другую матрицу, чем в том случае, если сначала сделать преобразование A , а потом B . Для детерминантов это не играет роли, но в произведении матриц это будут различные вещи. Поэтому, называя новую матрицу произведением двух матриц, нужно быть осторожными, потому что это произведение не обладает коммутативностью. Но вы уже привыкли к тому, что не все произведения обладают коммутативностью; например, векторное произведение не коммутативно. Между прочим, вся квантовая механика основана на некоммутативных произведениях.

Итак, если нам нужно перейти от системы K к системе K'' , то сначала мы можем перейти к системе K' , а затем от K' к системе K'' . Мы имеем вполне определенный рецепт, как найти преобразование от K к K'' , когда оба промежуточных преобразования нам известны. Нужно последовательно и в определенном порядке применить оба этих преобразования, сначала A , потом B , и мы получим новое преобразование C . Мы научились, как по двум преобразованиям найти третье, которое из них составлено, т. е. является результатом их последовательного применения. Это третье преобразование мы называем произведением первых двух. Пока запомним это и обратимся к тому, что нас в данном случае интересует.

Совокупность всех лоренцовых преобразований обладает замечательным свойством, а именно является группой. Прежде всего, что такое группа? Позвольте остановиться на этом и дать, может быть, несколько поверхностное, недостаточно углубленное и даже не всегда достаточно строгое определение понятия группы в общем случае, а потом применить его к нашим вопросам.

Пусть у нас есть совокупность каких-нибудь объектов в конечном или бесконечном числе. Будем называть эти объекты *элементами*. Это могут быть самые разнообразные вещи — числа, матрицы, преобразования как линейные, так и нелинейные. Пусть установлено правило, как каждой паре этих элементов отнести

новый элемент, причем пары, вообще говоря, направлены, т. е. может быть так, что паре AB будет отнесен другой элемент, чем паре BA , но каждой паре, составленной по определенному закону, будет отнесен новый элемент. Возьмем самый простой пример. Пусть речь идет о совокупности целых положительных чисел 1, 2, 3, 4, ... Условимся каждой паре чисел относить их сумму. Если я возьму числа 1 и 3, я буду относить им число 4, если я возьму 1 и 2, то отнесу им 3. Я установил правило, по которому каждой паре элементов отношу третий элемент. Я мог бы взять вместо сложения умножение. Тогда элементам 1 и 2 был бы отнесен элемент 2, элементам 2 и 3 — элемент 6 и т. д. Этот новый элемент, который я по установленному правилу отношу к любой паре, я буду называть *произведением* этих двух элементов. Это произведение не в том смысле, как мы понимаем обычно, так как я могу, например, установить правило сложением, т. е. буду относить третий элемент тем, что буду складывать пару элементов, но я все же буду говорить, что это произведение в новом смысле этого понятия. Я могу так условиться и так условилась определять вся теория групп.

Если у нас есть совокупность матриц, то матрицам A и B сопоставляется матрица C , определяемая по способу, который получился из физических соображений о том, какая матрица должна выражать последовательно произведенные преобразования A и B . Матрица C называется *произведением* матриц A и B , а закон ее составления и есть тот рецепт, который позволяет мне каждой паре элементов сопоставлять и здесь новый элемент.

Если совокупность элементов такова, что каким-либо образом определенное произведение любой пары этих элементов является опять элементом совокупности, то мы говорим, что эта совокупность образует группу. Это — главное свойство. Его недостаточно, но оно необходимо и является основным свойством группы. Кроме того, должны быть соблюдены еще следующие условия. Я знаю, как из A и B получить элемент AB — рецепт произведения, — и я знаю, что AB принадлежит к той же совокупности. Я могу этот новый элемент AB сопоставить с третьим элементом C : $(AB)C = D$. Но я мог бы сначала сопоставить B и C и затем образовать $A(BC) = D'$. Требуется, чтобы закон сопоставления оба раза давал одно и то же ($D = D'$), т. е. чтобы был справедлив *ассоциативный закон*.

Без этого требования тоже обойтись нельзя, оно очень существенно. Но, как сказано, самое существенное то, что произведение двух элементов есть опять элемент группы. Отсюда возникает само понятие группы — вы не выходите за пределы совокупности.

Далее требуется, чтобы в числе элементов совокупности был такой элемент, произведение которого на любой элемент A давало бы опять A . Такой элемент называется *единицей* группы или

единичным элементом. Мы имеем правило, по которому можем из любых двух элементов получать третий. Требуется, чтобы существовал такой элемент, который, будучи сопоставлен по установленному правилу с другим элементом, давал бы произведение, не отличающееся от этого второго элемента.

Наконец, последнее условие. Требуется, чтобы для каждого элемента A совокупности всегда можно было найти такой элемент B , что произведение AB равно единичному элементу. Тогда элемент B называется обратным A и обозначается A^{-1} . Это взято из обычной символики. Таким образом, если есть совокупность элементов, в которой установлено правило умножения, если произведение всегда принадлежит к элементам совокупности и если соблюдены указанные добавочные условия, то такую совокупность мы называем группой. Какие объекты взяты в качестве элементов, совершенно безразлично, важны только указанные свойства объектов.

Позвольте дать простые примеры для пояснения. Возьмем в качестве элементов числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. В качестве умножения возьмем сложение этих элементов. Если я спрошу, какой элемент соответствует элементам 2 и 3, то это будет 5. У меня есть совокупность, в которой установлен закон получения произведения. Является ли эта совокупность группой? Нет, это не группа. Возьмем, например, элементы 4 и 5. Произведение 4 и 5, по определению, есть 9, но это число не входит в совокупность. А ведь главным нашим требованием было, чтобы всякое произведение также входило в совокупность. Возьмем тот же ряд чисел, но понятие умножения определим другим образом: мы будем складывать числа, как и раньше, но произведением будем считать не сумму, а остаток суммы от деления на 8. Если теперь я возьму два каких-нибудь числа из совокупности, например 5 и 6, то получу 11, а разделю на 8, получу в остатке 3. Это число входит в совокупность. Значит, с таким определением умножения наша совокупность является группой. Во всяком случае, первый признак группы здесь имеется.

Почему важны такие совокупности? Оказывается, что совокупности, обладающие свойствами группы, имеют ряд других чрезвычайно существенных свойств.

Проверим другие свойства нашей группы. Имеется ли в нашей совокупности единица? Единица определена тем, что, будучи сопоставлена с любым другим элементом, любым другим числом нашей совокупности, она дает то же число. Что здесь будет единицей? Очевидно, нуль, потому что, будучи прибавлен к другому числу, он не изменяет этого числа. Имеются ли здесь обратные элементы, которые, будучи сопоставлены с некоторыми элементами, дают нашу единицу, т. е. нуль? Обратные элементы здесь есть. Это числа, одинаково отстоящие от обоих концов строки (не считая нуля).

Так, например, для единицы обратным элементом будет 7, потому что, сопоставив их, мы получим нашу единицу, т. е. нуль. Обратным элементом для 2 будет 6. Таким образом, эта простая совокупность, при указанном определении произведения, является группой. Группы такого типа называются *конечными*, потому что они содержат конечное число элементов.

Могут быть и *бесконечные* группы с бесконечным числом элементов. Например, совокупность всех целых чисел, положительных и отрицательных, включая нуль, образует группу, если под произведением понимать алгебраическую сумму.

Нас будут интересовать *непрерывные* группы. Под непрерывной группой мы будем понимать следующее. Каждый элемент характеризуется каким-нибудь параметром, который может принимать в известной области всевозможные значения. Один элемент от другого будет отличаться тем, что параметр принимает различные значения, а так как параметр, по предположению, изменяется непрерывно, то мы получим непрерывный ряд элементов. Такими элементами являются и преобразования Лоренца. Что в них является параметром? Скорость. Для данной скорости у вас всегда имеется определенный элемент — определенное преобразование. Измените скорость, и у вас будет другое преобразование, соответствующее новому параметру. Так как скорость меняется непрерывно между $-c$ и $+c$, то получается непрерывная цепь элементов, которую мы и будем рассматривать как совокупность. Если эта совокупность удовлетворяет всем требованиям, которые мы ввели, т. е. если сначала установлено понятие умножения и затем оказывается, что совокупность удовлетворяет нашим требованиям, то такую непрерывную совокупность элементов мы назовем непрерывной группой.

Лоренцовы преобразования образуют группу. Я утверждаю, что если бы этого не было, то получились бы большие неприятности, получилось бы так, что мы не знали бы, с чего начать при физическом подходе. Хотя мы и не ставили перечисленных условий, хотя мы и не требовали группового характера от преобразований Лоренца, но мы увидим, что без этого вряд ли можно было бы построить какую бы то ни было последовательную систему.

Итак, непрерывными группами мы называем совокупность элементов, изменяющихся непрерывно и характеризующихся одним или многими параметрами, причем в такой совокупности выполняются перечисленные нами условия. Если элемент совокупности зависит от R параметров, каждый из которых может изменяться независимо от других, то мы говорим о R -членной группе. Например, лоренцовы преобразования самого общего вида имеют 10 независимых параметров и образуют десятичленную группу. Однородные преобразования образуют шестичленную группу,

а специальные лоренцовы преобразования составляют одночленную группу — с одним параметром v .

Итак, в качестве элемента совокупности мы будем рассматривать преобразования. Произведением мы назовем преобразование, получающееся в результате двух последовательно примененных, преобразований. Тогда основное свойство совокупности преобразований, которое делает ее группой, мы можем выразить несколько иначе: совокупность преобразований представляет собой группу, если последовательное проведение двух преобразований всегда может быть заменено одним преобразованием, также относящимся к совокупности. Кроме того, в совокупности должны быть налицо единичное (т. е. тождественное) преобразование и обратные преобразования.

По существу нас интересует лишь специальное лоренцово преобразование, которое оставляет y и z неизменными и преобразует только x и ct и в котором уже выявляется вся физическая сторона дела. Поэтому мы будем заниматься только этими одночленными преобразованиями, причем будем рассматривать преобразования только x и ct . Значит, матрица лоренцова преобразования такова:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right).$$

Мы хотим показать, что это есть группа. Но сначала несколько слов о совокупности преобразований с непрерывно изменяющимся параметром.

Если вы возьмете любое преобразование с изменяющимся параметром, то, вообще говоря, совокупность таких преобразований не является группой; группа — это очень специальная совокупность, и в этом весь интерес. Я приведу простые примеры преобразования, которые являются группой, и таких, которые группой не являются. Возьмем преобразования

$$\begin{aligned} x' &= x + k, \\ y' &= y + 2k. \end{aligned}$$

Это совокупность преобразований с изменяющимся параметром k , где k — любое вещественное число. При каждом фиксированном значении k это элемент совокупности — одно преобразование. Спрашивается, является ли эта совокупность группой? Имеется ли здесь единица? Очевидно, да. Это преобразование с $k = 0$. Но как обстоит дело с главным свойством, с тем, что последовательное применение двух преобразований опять является преобразованием,

относящимся к этой же совокупности? Это свойство также присутствует. В самом деле, возьмем два преобразования из нашей совокупности:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + 2a, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x'' &= x' + b, \\ y'' &= y' + 2b \end{aligned} \right\}$$

и образуем произведение, т. е. сделаем эти два преобразования последовательно. Подставив x' и y' во вторые две формулы, получим

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x + a + b, \\ y'' &= y + 2(a + b). \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, это преобразование также принадлежит к нашей группе, причем параметром здесь является $c = a + b$, и, следовательно, наша совокупность преобразований есть группа. Если вы возьмете $b = -a$, то получите единичное преобразование, так что ко всякому преобразованию можно подобрать обратное ему. Это свойство группы тоже удовлетворено.

Когда берут такие элементарные примеры, то на первый взгляд кажется, что любые преобразования образуют группу. Легко убедиться в обратном. Возьмем преобразование

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + k, \\ y' &= y + k^2. \end{aligned} \right\}$$

Совокупность таких преобразований не является группой. Возьмем частные случаи $k = a$ и $k = b$, т. е. возьмем два преобразования:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + a^2, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x'' &= x' + b, \\ y'' &= y' + b^2. \end{aligned} \right\}$$

Если теперь произвести подстановку, то получим

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x + a + b, \\ y'' &= y + a^2 + b^2. \end{aligned} \right\}$$

Это преобразование не попадает в нашу совокупность, так как для этого во втором уравнении должен был бы стоять квадрат параметра, входящего в первое уравнение, а так его подобрать мы здесь не можем. Таким образом, любые преобразования с любой функцией, вообще говоря, не являются группой. Можно сформулировать в общем случае, когда совокупность преобразований является группой. Пусть у нас есть какое угодно нелинейное преобразование, которое мы запишем так:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots; a, b, c)$$

и пусть второе преобразование будет

$$x_i'' = f_i(x_1', x_2, \dots; a', b', c').$$

Мы можем подставить сюда x' из первого преобразования и получим тогда некоторую функцию от x, a, b, c, a', b', c'

$$x_i'' = F_i(x_1, x_2, \dots; a, b, c; a', b', c').$$

Если в результате этой подстановки x'' выразятся той же *самой* функцией f_i , но с другими параметрами, которые как-то зависят от a, b, c, a', b', c'

$$a'' = \psi_1(a, b, c; a', b', c'),$$

$$b'' = \psi_2(a, b, c; a', b', c'),$$

$$c'' = \psi_3(a, b, c; a', b', c'),$$

т. е. если совокупность двух подстановок можно заменить одной подстановкой из той же совокупности с другими значениями параметров, то мы скажем, что эти преобразования образуют группу.

Если лоренцовы преобразования образуют группу, то мы можем сказать, что группу образуют матрицы лоренцовых преобразований, — это то же самое, потому что в случае линейных преобразований матрица полностью характеризует преобразование. Мы хотим показать, что лоренцовы преобразования образуют группу в общем случае. Чем определены лоренцовы преобразования? По определению, это линейные преобразования, оставляющие инвариантной форму

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2.$$

Я произвожу первое преобразование, и при этом

$$\begin{aligned} (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2 &= \\ &= (\Delta x_1')^2 + (\Delta x_2')^2 + (\Delta x_3')^2 - (\Delta x_4')^2. \end{aligned}$$

Второе лоренцово преобразование характеризуется тем, что

$$(\Delta x_1')^2 + (\Delta x_2')^2 + (\Delta x_3')^2 - (\Delta x_4')^2 = (\Delta x_1'')^2 + (\Delta x_2'')^2 + (\Delta x_3'')^2 - (\Delta x_4'')^2.$$

Я произвожу оба преобразования последовательно, и так как они оба линейны, то в результате я опять получу линейное преобразование. Спрашивается, является ли результирующее преобразование также лоренцовым? Если да, то мы почти доказали, что это группа, потому что это основное свойство группы.

Но легко видеть, что из двух написанных равенств следует

$$\begin{aligned} (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2 = \\ = (\Delta x_1'')^2 + (\Delta x_2'')^2 + (\Delta x_3'')^2 - (\Delta x_4'')^2, \end{aligned}$$

т. е. совокупность преобразований также оставляет эту форму неизменной, а это и есть характеристика лоренцовых преобразований. Легко проверить, что и все остальные свойства группы здесь также соблюдены, — я не буду на этом останавливаться. Итак, мы можем сказать окончательно, что лоренцовы преобразования образуют группу.

Что было бы, если бы они не составляли группы? Лоренцовы преобразования позволяют находить координаты одной движущейся системы в функции от координат другой системы, по отношению к которой данная система движется. Представьте себе, что у нас имеются три координатные системы K , K' и K'' и мы хотим найти зависимость координат x'' от координат x . Мы можем сначала найти, как зависят x от x' , потом — как зависят x' от x'' , и, наконец, найдем зависимость x от x'' . Это первый путь, совершенно законный. Но, с другой стороны, мы можем не учитывать, что имеется система K' , она может нас не интересовать. Если есть только две движущиеся друг относительно друга системы K и K'' , то принцип относительности дает возможность найти x'' сразу как функцию от x . Представьте себе теперь, что преобразования не образуют группы. Тогда по первому способу мы нашли бы зависимость x'' от x , которая не соответствовала бы тому, что мы получили во втором случае. Совокупность преобразований позволяет переходить от любого преобразования к любому. Если я к третьему преобразованию перешел при помощи промежуточного и получил бы преобразование, которое не относится к совокупности, т. е. не выражает перехода от одной движущейся системы к другой, то я нашел бы некоторую зависимость между координатами x'' и x , но это не была бы зависимость координат одной движущейся системы от координат другой, а ведь мы должны были бы получить такую зависимость. Значит, все наше построение было бы непоследовательным, нам запрещалось бы сравнивать сначала x и x' , а затем x' и x'' . Не было бы транзитивных соотношений, которые позволяют нам строить всю нашу концепцию, и эта концепция обладала бы провалом, который, быть может, и можно было бы как-то исправить, но совершенно не видно как.

Вы видите, что и из физических соображений нужно требовать, чтобы совокупность преобразований теории относительности составляла группу. Это все-таки удивительно (или не удивительно, смотря по тому, как на это смотреть): получая лоренцовы преобразования, мы вовсе не заботились о том, будут ли они группой. Мы

получили их из определенных требований: физически — из двух постулатов, математически — из условия, чтобы они оставляли инвариантным определенное выражение, — и как добавку получили, что если это так, то они образуют группу. Конечно, связь между тем, что совокупность образует группу, и тем, что определенное выражение является инвариантным, как вы уже видите, не случайна, — это глубокая связь. Но, как бы то ни было, можно поставить и обратный вопрос, и вопрос действительно был так поставлен.

Прежде чем к этому обратиться, я хочу вам посоветовать в качестве простого примера и хорошего упражнения сделать следующее. Найдите произведение двух специальных лоренцовых преобразований и покажите, что это произведение действительно принадлежит совокупности, т. е. получите это не из понятия инвариантности, а из того, что

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} & -\frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \\ -\frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} & -\frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \\ -\frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Найдите преобразование, которое получается в результате последовательного произведения обоих. Для этого нужно перемножить матрицы. Произведя последовательно два преобразования, вы получите матрицу

$$C = BA = \frac{1 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2} \sqrt{1-\beta_2^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \\ -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

В таком виде это выражение несколько непонятно: здесь стоит матрица и перед ней число. Условимся считать, что если перед матрицей стоит число, то каждый член матрицы умножается на это число. Совсем не видно сразу, действительно ли это такого же вида матрица, только с каким-то новым значением параметра β_3 . Попробуйте доказать, что это действительно такая же матрица, и найдите, как выражается β_3 в функции от β_1 и β_2 . Может быть, вы и сразу угадаете, как будет выражаться β_3 . А теперь вернемся к поставленному вопросу.

Фактически было так, что физика дала два постулата, в результате которых пришли к лоренцовым преобразованиям, т. е. эти преобразования были выведены на основе требования постоянства скорости света (независимости скорости света от движения источника) и принципа относительности. Теперь вопрос ставится иначе.

Мы видели, что лоренцовы преобразования образуют группу и что не всякие преобразования обладают этим свойством. Допустим, что мы не знаем ни о принципе относительности, ни о постоянстве скорости света. Пусть имеются линейные преобразования с одним параметром

$$\begin{aligned}x' &= a(v)x + b(v)t, \\t' &= c(v)x + d(v)t,\end{aligned}\tag{27}$$

причем мы знаем, что при произвольных $a(v)$, $b(v)$, $c(v)$ и $d(v)$ совокупность группой не будет. Мы видели, однако, что свойство быть группой жизненно для физики. Что же можно сказать об этих преобразованиях, если с самого начала потребовать, чтобы они образовывали группу? Интересно выяснить, какие ограничения налагают это требование, насколько оно суживает общий вид таких преобразований, какие формулы мы должны получить уже вследствие одного этого условия. Это чисто математическая задача: имеется совокупность линейных однородных преобразований с одним параметром. Спрашивается, когда такая совокупность является одночленной группой? В таком виде вопрос был поставлен и разрешен Франком и Роте.

Мне хотелось бы рассказать вам здесь об основной теореме теории непрерывных групп — теореме Софуса Ли, которому мы обязаны разработкой теории непрерывных групп и применением их к геометрии. Вы знаете, что одно из сильных течений, имеющих в геометрии, опирается на утверждение, что вся геометрия сводится к теории групп. Здесь существует много остроумных положений, но начал все это как раз не математик, а Гельмгольц в своей работе «Was ist der Ursprung der geometrischen Axiome». У него это было сделано математически не совсем чисто. Ли это выяснил, и у Ли все получается чрезвычайно красиво. Одна теорема, о которой я буду говорить, позволит нам решить и поставленный нами вопрос.

У нас есть линейные уравнения (27), в которых v — произвольно меняющийся параметр. Сказать, какими функциями должны быть a , b , c , d , чтобы это было группой, не так просто, но вот что говорит Ли. Составим дифференциальные уравнения этих преобразований; оказывается, что относительно этих дифференциальных уравнений очень просто сказать, какими свойствами они должны обладать для того, чтобы это было группой. Что значит составить дифференциальные уравнения? Будем рассматривать x' и t' как функции от v при постоянных x и t

$$\begin{aligned}x' &= f_1(x, t, v), \\t' &= f_2(x, t, v).\end{aligned}\tag{28}$$

Согласно Ли, можно рассматривать дело так, что уравнения (27) есть интегралы дифференциальных уравнений для x' и t' по v , а x и t — произвольные постоянные. Мы можем продифференцировать эти два уравнения (28) по v при постоянных x и t . У нас получится четыре уравнения, из которых мы исключим x и t (так ведь и учат составлять дифференциальные уравнения, когда впервые начинают о них рассказывать) и получим уравнения

$$\frac{dx'}{dv} = \varphi_1(x', t', v), \quad \frac{dt'}{dv} = \varphi_2(x', t', v). \quad (29)$$

Интегрируя эти уравнения, мы предположим, что для $v = 0$ должно получаться тождественное преобразование, т. е. начальные условия должны быть такими:

$$\left. \begin{array}{l} x' = x, \\ t' = t, \end{array} \right\} \text{ при } v = 0. \quad (30)$$

Итак, мы можем теперь рассматривать преобразования (28) как интеграл дифференциальных уравнений (29) при начальных условиях (30). Ли показал, что если преобразования (28) представляют собой группу, то дифференциальные уравнения группы (29) должны быть совершенно определенными, должны иметь вполне типичную форму. В этом все дело. Значит, нужно показать, какие ограничения налагаются на эти дифференциальные уравнения для того, чтобы их интегралы были группой.

В следующий раз мы это рассмотрим и покажем, как красиво вытекают свойства преобразований из одного лишь требования групповости.

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(14. VI 1934 г.)

Краткое резюме. Основная теорема теории непрерывных групп Ли. Существование аддитивного параметра. Ограничение вида искомого преобразования требованиями групповости и выполнения принципа относительности. Два типа преобразований — лоренцово и поворот осей. Заключение

В прошлый раз мы занимались изучением свойств, принадлежащих лоренцовым преобразованиям, как совокупности. Мы видели, что эта совокупность образует группу и что это естественно получается из требований линейности преобразований и существования у них инварианта.