временно́й характеристикой среды, раньше не принимавшейся во внимание. Здесь мы имеем *релаксационный* тип дисперсии (если сначала была, скажем, только поступательная энергия, то потом, если систему предоставить самой себе, происходит перераспределение — релаксация). Ясно далее, что здесь получится не только дисперсия, но и абсорбция, так как передача энергии происходит быстро (необратимо). Мы имеем здесь, таким образом, новый способ изучения молекул в газах — способ, открывающий широкие перспективы. В частности, большой интерес представляет изучение влияния примесей, зависимости времени релаксации от температуры и т. п.

Интересную область открывает перенос этих взглядов на жидкости, в которых, по-видимому, тоже обнаружена не только аномальная абсорбция, но и дисперсия. Хотя для жидкостей теория довольно расплывчата, но принципиально явления носят тот же характер, что и в газах. Общая теория такого рода объясняет очень многое и сулит ряд ценных выводов, касающихся и оптики.

Итак, во втором цикле мы рассмотрим следующие конкретные проблемы дисперсии: 1) оптическая дисперсия, 2) ионосфера, 3) дисперсия в полярных диэлектриках и 4) дисперсия в акустике.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФРОНТА ВОЛНЫ

(Доклад М. А. Леонтовича 14 I 1937 г.)

Мы рассмотрим теперь вопрос о том, с какой скоростью бежит начальная точка некоторого импульса, во всех отношениях произвольного, но такого, что в любой точке пространства до некоторого момента времени вообще нет никакого возмущения. Конечно, вопрос о возможности фактического измерения этой скорости более сложен: импульс может быть или может сделаться очень пологим, так что момент появления возмущения зависит от чувствительности аппарата. Говоря о начальной точке возмущения, мы имеем в виду предельно чувствительный аппарат. Скорость фронта представляет интерес в ряде случаев, особенно в связи с принципом относительности. Последний запрещает скорости, превышающие c. Но существуют области аномальной дисперсии, где фазовая скорость $v > c$, и если бы оказалось, что скорость фронта есть фазовая скорость, то мы получили бы противоречие. Конечно, для монохроматической волны противоречия нет, так как у нее нет фронта, она не является сигналом. Но для импульса, хотя бы односторонне ограниченного, вопрос остается в полной силе.

Будем по-прежнему рассматривать одномерную задачу, но включим возможность поглощения. Предположим, что волновое поле описывается n линейными однородными уравнениями первого порядка для n функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$:

$$\sum_m \left(a_{jm} \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + b_{jm} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + c_{jm} \varphi_m \right) = 0, \qquad j - 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Среду мы будем считать однородной, т. е. все коэффициенты a_{jm}, b_{jm}, c_{jm} постоянны. Разумеется, исходные уравнения могут быть второго и высшего порядков, но, понимая под частью функций φ_m производные от остальных φ, мы всегда можем считать, что задача описывается системой уравнений первого порядка.

Могут быть поставлены два вопроса.

1) Как распространяется монохроматическая волна

$$\varphi_m = a_m e^{i(\omega t - ka)} \qquad ? \tag{2}$$

Решение этого вопроса дает нам закон дисперсии $v = \frac{\omega}{k} = v(k)$.

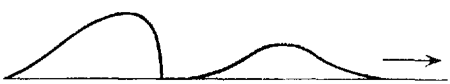

Рис. 4

Подставив (2) в (1), мы получаем для определения a_m систему однородных уравнений

$$\sum_m (i\omega a_{jm} - ikb_{jm} + c_{jm})\, a_m = 0.$$

Условие существования нетривиального решения ($a_m \neq 0$) и дает закон дисперсии

$$\mathrm{Det} \left| a_{jm} v - b_{jm} + \frac{c_{jm}}{ik} \right| = 0, \qquad \therefore v = v(k). \tag{3}$$

2) Какова скорость фронта волны и от чего она зависит? Движение фронта изображается на плоскости (x, t) линией (заранее ясно, что в однородной среде это будет прямая, но это, впрочем, несущественно), по одну сторону которой все $\varphi_m = 0$, а по другую все или хотя бы одна из них отлична от нуля. Теорема, которую мы

хотим доказать, такова: *Если закон дисперсии есть $v = v(k)$, то фронт любой волны идет со скоростью $F = v(\infty)$*, т. е. соответствует скорости бесконечно коротких волн (бесконечно высокой частоте).

Мы воспользуемся следующей математической теоремой: если на отрезке какой-либо кривой на плоскости (x, t) заданы значения всех φ_m, то можно найти единственное решение дифференциальных уравнений (1), обращающееся на отрезке A в заданные значения, причем это возможно лишь при условии, что отрезок A взят *не на характеристике*. Характеристиками называются специальные кривые на плоскости (x, t), обладающие тем свойством, что задание на этих кривых либо вообще не дает решения, либо определяет его неоднозначно (теорема Коши: задание на любой кривой, кроме характеристики, определяет решение однозначно). Нетрудно видеть, что движение фронта должно быть характеристикой. Действительно, мы имеем на линии, изображающей движение фронта (линии Ф), что все $\varphi_m = 0$. Но для таких значений φ_m, заданных на Ф, уравнения (1) заведомо допускают *два* решения. Это, во-первых, рассматриваемый сигнал и, во-вторых, тривиальное решение $\varphi_m \equiv 0$. Следовательно, задание φ_m на линии Ф не определяет решения однозначно, т. е. Ф должно быть характеристикой.

Как же находить характеристики?

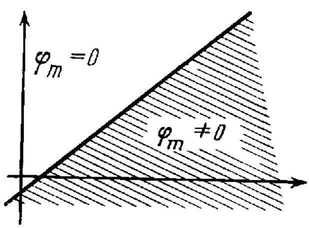

Рис. 5

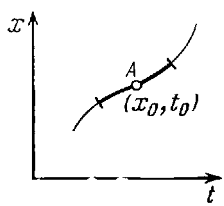

Рис. 6

Пусть на плоскости (x, t) имеется некоторая кривая, на ней отрезок A и (x_0, t_0) — некоторая точка этого отрезка. Для всего отрезка заданы значения $\varphi_m = \varphi_m^{(0)}$. Индексом 0 мы будем отмечать значения в точке (x_0, t_0).

Будем искать решение в виде рядов

$$\varphi_m = \varphi_{m0} + \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right)_0 (t - t_0) + \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \ldots$$

Мы должны, таким образом, найти коэффициенты этих рядов и прежде всего — первые производные φ_m по x и по t. Так как φ_m

на отрезке A заданы, то, двигаясь по отрезку, мы можем найти полный дифференциал φ_m

$$d\varphi_m^{(0)} = \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right)_0 dt + \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right)_0 dx,$$

причем $\frac{dx}{dt}$ — угловой коэффициент касательной к отрезку A. Иначе

$$\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right)_0 = -\left(\frac{d\varphi_m}{\partial x}\right)_0 \frac{dx}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_m^{(0)}}{dt}. \tag{4}$$

Подчеркнем, что $\frac{dx}{dt}$ известно из уравнения кривой, на которой лежит A, а $\frac{d\varphi_m^{(0)}}{dt}$ известно тогда и только тогда, когда мы движемся по отрезку.

Из уравнений (4) надо определить совместно с уравнениями (1), которым φ_m должны удовлетворять всюду, значения $\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right)_0$. Подставив (4) в (1), мы сначала исключим $\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right)_0$ и получим следующие уравнения для нахождения $\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right)_0$:

$$\sum_m \left\{\left(-a_{jm}\frac{dx}{dt} + b_{jm}\right)\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right)_0 + a_{jm}\frac{d\varphi_m^{(0)}}{dt} + c_{jm}\varphi_m^{(0)}\right\} = 0.$$

Эти неоднородные линейные уравнения имеют единственное решение только тогда, когда детерминант отличен от нуля. В этом случае мы однозначно получим $\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right)_0$, а с помощью (4) определим затем $\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right)_0$.[1] Все это может не получиться (может вообще не быть решения или же их может быть не одно, а несколько), если детерминант равен нулю, т. е.

$$\operatorname{Det}\left| a_{jm}\frac{dx}{dt} - b_{jm}\right| = 0. \tag{5}$$

Это уравнение n-й степени для $\frac{dx}{dt}$, определяющее n (постоянных)

[1] Аналогичным путем затем определяются последовательно высшие производные — коэффициенты последующих членов разложений φ_m. Их вычисление опять сводится к решению системы линейных неоднородных уравнений, причем детерминант системы, определяющей производные n-го порядка, равен n-й степени детерминанта (5).

значений $\frac{dx}{dt}$, среди которых могут быть, конечно, и кратные значения и комплексно сопряженные. Другими словами, (5) определяет, вообще говоря, n различных угловых коэффициентов, n прямых на плоскости (x, t). Если корни (5) комплексно сопряжены, то таким $\frac{dx}{dt}$ действительных направлений на (x, t) не соответствует.

Эти прямые и есть характеристики: задавая значения φ_m на них, мы не можем получить однозначного решения. Так как линия Ф должна быть характеристикой, то *один из корней* (5) *есть скорость фронта.* Сравнивая (5) с (3), мы заключаем, что $F = v(\infty)$, так как при $k \to \infty$ (3) переходит в (5).

Эта теория без существенных изменений может быть обобщена на случай неоднородной среды, когда a, b, c — функции точки (и даже времени). Тогда будет функцией точки как скорость монохроматической волны, так и скорость фронта (т. е. линия Ф будет кривая, а не прямая).

Если мы рассматриваем не одномерную задачу, то имеется еще вопрос о *форме* фронта. Этот вопрос решается чрезвычайно просто: скорость фронта соответствует $\lambda \to 0$, т. е. *переходу к геометрической оптике.* Поэтому все, что касается фронта (форма, момент прихода и т. д.), может быть найдено по предельным законам, законам геометрической оптики — принципу Гюйгенса, принципу Ферма и т. д.

Для электромагнитных волн $F = c$ для всякой однородной и неоднородной среды. Значит, плоский фронт всегда остается плоским и идет со скоростью света в пустоте, какие бы тела ни стояли на пути волны. Эта теорема оправдывает применение методов геометрической оптики в расчетах, делаемых при сейсмических методах геологической разведки по приходу переднего фронта волн.

Л. И. Мандельштам. Закон дисперсии электромагнитных волн дает $F = c$. Можно ли положиться на этот вывод? Ведь сам закон дисперсии перестает быть верным при $k \to \infty$, ибо он выводится в предположении, что на протяжении одной длины волны имеется еще очень много диполей. Но изложенная теорема позволяет, по-моему, сказать больше. Она говорит, что мне не надо знать закона дисперсии, а надо знать только скорость очень короткой монохроматической волны. Действительно, как колеблется один осциллятор под действием синусоидальной силы одной частоты, я знаю. Я не знаю только, как мне ввести действие осцилляторов в показатель преломления в случае очень коротких волн. Но этого мне теперь и не нужно. При $\omega \to \infty$ осциллятор, наверно, не колеблется, значит, волна с $\omega = \infty$ проходит так, как если бы электронов не было вовсе, т. е. без всякой дисперсии. Конечно, для этого вывода необходимо, чтобы дифференциальные уравнения (1) оставались в силе и для $\omega \to \infty$.

То, что фронт электромагнитной волны ни при каких условиях не может идти быстрее c, довольно ясно из обычных простых и правильных соображений насчет времени раскачивания электронов. Я сказал бы наоборот, что из этих простых соображений отнюдь не сразу видно, что фронт не может идти со скоростью, меньшей c, т. е. невозможно такое положение, что первичная волна, интерферируя со вторичными (все они идут со скоростью c), гасится вплоть до некоторой точки, движущейся медленнее, чем c.

Вопрос о характеристике был развит здесь для уравнений первого порядка. Очень часто мы имеем дело с уравнениями второго порядка. Конечно (с известными оговорками), их можно привести к уравнениям первого порядка, но можно формулировать изложенную теорему в несколько измененном виде — непосредственно для случая уравнений второго порядка. А именно: если на отрезке какой-либо кривой заданы φ_m и их производные, скажем по нормали к этому отрезку, то опять решение определяется однозначно при условии, что исходная кривая не является характеристикой. С этим связано деление уравнений второго порядка на эллиптические, гиперболические и параболические.

Следующее обстоятельство кажется здесь на первый взгляд странным. Мы говорим, что можно задать произвольно сами функции и их производные по нормали и тогда решение определится однозначно. Но ведь в ряде задач, в частности в теории потенциала, решение однозначно определяется заданием значений *самих функций*, а задания производных *не нужно*. Изучая дифракцию, мы даже ставили в минус теории Кирхгофа то, что она задает φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, в то время как достаточно задания φ, и тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ уже *нельзя* задавать. В чем же здесь дело? На простом примере можно показать, что оба утверждения вполне совместимы. М. А. Леонтович показал, что можно построить требуемый ряд, но будет ли он всюду непрерывен и будет ли давать непрерывные производные? Это может быть не так, да мы этого и не требовали. В тех случаях, когда мы ищем решение по заданию только самих функций, мы требуем, кроме того, однозначности и непрерывности решения. Только этим обеспечивается его единственность.

Предположим, что мы ищем решение уравнения Лапласа в двух измерениях, причем зависящее только от r (осевая симметрия). Мы имеем

$$\varphi = a \ln r + b.$$

Если я требую, чтобы на круге $r = R$ имело место $\varphi = C$ и чтобы

φ всюду было непрерывно и однозначно, то единственное решение будет

$$a = 0,\ b = C, \text{ т. е. } \varphi = C \text{ всюду.}$$

Если же мы хотим, чтобы не было особенностей только на круге $r = R$, то можно задать и φ_R и $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_R$, определять a и b, и тогда при $r \to 0$ всегда будет особенность.

Еще один любопытный вопрос. Ведь у сигнала нули имеются, вообще говоря, не только на фронте, но и в других точках позади фронта. Но значит ли это, что они должны идти с той же скоростью, что и фронт, т. е. для электромагнитных волн со скоростью c? Легко видеть, что для любых нулей это не так. Волновое уравнение — второго порядка, и поэтому на фронте должна быть нулем и волновая функция и ее производные. *Только для таких* нулей скорость будет c. Следовательно, это не относится к нулям обычной синусоиды. Но возьмем монохроматическую волну в недиспергирующей среде. Мы имеем волновое уравнение, для которого постоянная всегда является решением. Добавив к синусоиде постоянную (равную амплитуде, рис. 7), мы через каждую волну получаем точку, где и функция и производная равны нулю. Это уже страшно: а что, если есть дисперсия? Тогда *все* нули идут со скоростью c, т. е. все синусоиды должны двигаться со скоростью c, а не $v(k)$.

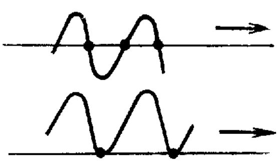

Рис. 7

Ошибка вот где: добавлять постоянную можно только тогда, когда в уравнения входят производные, но не сами функции. Если в уравнения входят сами функции, то постоянная уже не будет решением. Но в диспергирующей среде уравнения обязательно содержат и сами функции, т. е. $c_{jm} \neq 0$ в (1) (согласно (3), дисперсия есть только тогда, когда хотя бы один из коэффициентов c_{jm} отличен от нуля).

Еще одно замечание: с какой скоростью движется фронт ψ-волны в волновой механике? Если мы работаем с уравнением Шрёдингера, то связь между энергией и импульсом частицы такова:

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Переход к дебройлевским волнам $\left(\omega = \frac{E}{h},\ k = \frac{p}{h} = \frac{mv}{h}\right)$ дает

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{hk}{2m},$$

и, следовательно, $F = \infty$, что противоречит принципу относительности. Конечно, это противоречие ничего не значит, так как уравнение Шрёдингера релятивистски не инвариантно. С уравнениями Дирака все получается правильно. Связь энергии и импульса здесь сложнее:

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + p^2,$$

откуда

$$c = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{hk}\right)^2}.$$

Таким образом, здесь $F = c$.