дело, что это практически неосуществимо. Я думаю, что в нем она могла бы и не почернеть. Поэтому я здесь лишен возможности дать определение координаты частицы на основании классических измерений. В таких случаях мы можем производить *косвенные* измерения, применяя некоторые посторонние частицы. Поэтому в рецепт войдут промежуточные звенья, которые, разумеется, могут быть не макроскопическими. Я должен, как будет видно ниже, идти по этому пути, пока не дойду до такого этапа, где стык с классикой несомненен. Но в конечном этапе вспомогательные частицы должны оказаться свободными.

Конечное звено всякого измерения есть классическое измерение потому, что оно должно сводиться к констатации совпадения «материальных точек» (деления на масштабе, стрелки и т. п.). Неудовлетворительность такого положения вещей заключается в том, что общего рецепта для указанного перехода я дать не могу. Отсюда видно, насколько существенно изучить косвенные измерения.

Итак, поставив вопрос о том, как же волновая механика устанавливает связь математических символов с реальными объектами, мы пришли к задаче — дать теорию косвенных измерений. Это необходимо, так как мы уверены, что прямые измерения являются исключением и что их исключительность не случайна, а имеет глубокий принципиальный характер.

ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(8.IV 1939 г.)

Напомню некоторые положения, которые мы установили на прошлой лекции.

Последнее звено измерения в волновой механике обязательно макроскопично. *Прямыми* измерениями мы называем такие измерения, в которых первый же шаг макроскопичен.

Принцип косвенного измерения состоит в том, что данную систему, в которой мы хотим измерить величину A, мы заставляем взаимодействовать с другой микросистемой, для которой уже возможно прямое измерение, и потом теоретически заключаем о значении A. Здесь взят случай прямого измерения во втором звене, но, вообще говоря, может быть сколько угодно промежуточных звеньев. Лишь последнее должно быть макроскопическим. Для простоты я предположу, что уже во втором звене возможно сведе́ние на классическое измерение.

Здесь, по существу, входит рассмотрение двух взаимодействующих систем. Поэтому, прежде чем мы приступим к основному вопросу о косвенных измерениях, мы должны сделать довольно длинное отступление и рассмотреть сначала некоторые общие положения волновой механики, высказываемые ею для случая двух систем или одной системы, состоящей из двух частей.

Пусть имеются две системы, характеризуемые для простоты каждая одной «координатой», например две частицы, движущиеся по одной прямой. Пусть их «координаты» обозначены буквами x и y, $\Psi(x, y)$ — их волновая функция. В квантовой механике постулируется, что

$$dw = \Psi\overline{\Psi}dx'dy' \tag{6}$$

есть вероятность того, что одновременно x и y заключены соответственно в пределах $(x', x' + dx')$ и $(y', y' + dy')$.

Упростим терминологию. Если спектры собственных значений дискретны, то $\Psi\overline{\Psi}$ дает вероятность равенств: $x = x'$, $y = y'$. Если спектры непрерывны, то $\Psi\overline{\Psi}$ есть плотность вероятности неравенств $x' \leqslant x \leqslant x' + dx'$, $y' \leqslant y \leqslant y' + dy'$. Ради краткости мы и в этом случае будем говорить просто о вероятности $x = x'$ и $y = y'$, понимая под этим указанные неравенства.

Как найти вероятность того, что некоторая величина R, относящаяся к первой системе (характеризуемой координатой x), имеет одно из возможных своих значений λ_i? Постулируется, что для этого следует разложить $\Psi(x, y)$ по собственным функциям $\psi_i(x)$ оператора величины R

$$\Psi = \sum_i c_i\psi_i, \tag{7}$$

и тогда $c_i\bar{c}_i$ будет искомая вероятность.

Какова вероятность того, что величина R, относящаяся к первой из рассматриваемых систем (к системе I), имеет значение λ_i, а величина S, относящаяся к системе II, одновременно имеет значение μ_k? Искомая вероятность определится из разложения

$$\Psi(x, y) = \sum_{i,k} a_{ik}\psi_i(x)\varphi_k(y), \tag{8}$$

как $a_{ik}\bar{a}_{ik}$, причем ψ_i и φ_k — собственные функции операторов R и S, соответствующие собственным значениям λ_i и μ_k.

Пусть имеются две *независимые* системы, скажем, катодный пучок и пучок α-частиц. Для каждой системы можно написать свое уравнение Шрёдингера со своей волновой функцией [$\psi(x)$

и $\varphi(y)$]. Но я могу, по крайней мере мысленно, рассматривать эти две системы как одну с волновой функцией $\Psi(x, y)$. Какова эта общая волновая функция, если известно, что для одной из систем она есть $\psi(x)$, а для другой $\varphi(y)$? Как известно, если я хочу выразить с помощью Ψ то же самое, что выражают ψ и φ, то я должен положить

$$\Psi(x, y) = \psi(x)\varphi(y). \tag{9}$$

Разумеется, это надо показать, т. е. надо показать, что, не обращая внимания на α-частицы (на систему *II*), я буду получать для электронов (для системы *I*) с помощью Ψ те же физические результаты, что и с помощью отдельно взятой функции $\psi(x)$.

Пусть и для ψ, и для φ возможны прямые измерения координаты (например, по пятнам на пластинке, получающимся для электронов в одном месте, а для α-частиц — в другом). Тогда правильность высказанного утверждения очевидна: статистика для координаты x системы *I*, рассматриваемой независимо, дается функцией $|\psi(x)|^2$. Она получается совершенно такой же и из формулы (9). Действительно, вероятность значения x, независимо от того, чему равно y, получим, проинтегрировав $|\Psi(x, y)|^2$ по всем возможным значениям y. В силу нормированности функции φ мы опять получаем $|\psi(x)|^2$. Это для координаты.

Однако тождественность результатов должна иметь место для любой физической величины R. Разлагая $\psi(x)$ по собственным функциям ψ_i оператора R, $\varphi(y)$ — по собственным функциям φ_k, вообще говоря, иного оператора S, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_i a_i\psi_i(x), \\ \varphi(y) &= \sum_k b_k\varphi_k(y), \\ \Psi(x, y) &= \sum_{i,k} a_i b_k \psi_i\varphi_k. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Вследствие нормированности функций ψ_i и φ_k, очевидно, $\sum_i a_i\bar{a}_i = \sum_k b_k\bar{b}_k = 1$. По определению, $a_i b_k \overline{a_i}\,\overline{b_k}$ есть вероятность того, что система *I* находится в состоянии i, а система *II* — в состоянии k. Но нас интересует состояние системы *I* независимо от того, каково состояние системы *II*. По теореме сложения вероятностей получаем

$$w = a_i\bar{a}_i \sum_k b_k\bar{b}_k = a_i\bar{a}_i. \tag{11}$$

Это справедливо для любого оператора R. Если, с другой стороны, мы рассматриваем только изолированную систему I, то с помощью ее функции $\psi(x)$ получаем тот же результат сразу.

Но этим совпадением вопрос еще не исчерпывается. Это совпадение имеет место в начальный момент, когда системы I и II еще разобщены. Таким образом, для начальных Ψ, ψ и φ мы по доказанному имеем

$$\Psi = \psi\varphi \quad \text{при } t = t_0. \tag{12}$$

Но затем мы обращаемся с этими начальными функциями к уравнению Шрёдингера, с одной стороны, для ψ и φ, взятых порознь, с другой — к совокупному уравнению для Ψ. Каково будет соотношение между ψ, φ и Ψ в дальнейшем?

Если между системами I и II нет взаимодействия, энергия полной системы равна сумме энергий систем I и II, $E = E_1 + E_2$, то переменные разделяются, т. е. соотношение (12) остается в силе для *любого момента времени:*

$$\Psi(x, y, t) = \psi(x, t)\,\varphi(y, t).$$

В этом случае оказывается, таким образом, действительно безразлично, рассматривать ли две невзаимодействующие системы совместно или порознь.

Но возможны и другие, более интересные случаи.

В самом деле, уравнение

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{2m}{\hbar^2}[V_1(x) + V_2(y)]\,\Psi = -\frac{2mi}{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{13}$$

имеет решения и не сводящиеся к виду (12), т. е. к одному произведению двух функций $\psi(x)$ и $\varphi(y)$, а именно решения вида

$$\Psi(x, y) = \sum_i u_i(x)\,v_i(y). \tag{14}$$

Чему соответствуют такие решения и когда они встречаются? Это очень важный класс решений: с ними приходится иметь дело почти всякий раз, когда происходит измерение.

Предположим, что мы заставляем две первоначально не связанные системы I и II взаимодействовать в течение короткого времени (например, когда частицы сталкиваются) и затем вновь их развязываем. Краткость взаимодействия может проистекать, например, из того, что оно имеет место лишь на малых расстояниях. Таким образом, мы имеем первоначально функцию (12), затем на короткое время уравнение для Ψ, содержащее член

$V_{12}(x, y)$, который описывает взаимодействие

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\left[V_1(x) + V_2(y) + V_{12}(x, y)\right]\Psi = -\frac{2mi}{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (15)$$

Для него начальное выражение Ψ задается по (12), и из него мы получаем выражение для $\Psi(x, y)$, которое, в свою очередь, является начальным для третьей стадии, когда системы вновь не взаимодействуют друг с другом. Так вот, в этой третьей стадии мы и имеем не произведение, а сумму произведений (14).

Естественно возникает вопрос: если известна функция $\Psi(x, y)$ (я ее могу рассчитать), то какая же функция $\psi(x)$ характеризует систему I, когда она уже сильно отошла от системы II? Какая функция характеризует поведение электрона, а какая — поведение α-частицы? Нейман первый обратил внимание на то, *что такой функции нет*. Но ведь системы уже разошлись, ведь есть же какое-то поведение у системы I?

Ответ на этот недоуменный вопрос заключается в следующем. Можно ответить на все вопросы, касающиеся системы I, т. е. (при любом состоянии II) найти вероятности значений различных величин для этой системы (вероятности различных значений импульса и т. д.), но функции $\psi(x)$, которая характеризовала бы состояние системы I вне зависимости от состояния системы II, все же нет.

Прежде всего удостоверимся, что здесь нет ничего особенно поразительного. Действительно, если существует функция $\psi(x)$, то мы знаем, как следует связывать между собой статистики различных величин: надо разлагать эту $\psi(x)$ по собственным функциям операторов рассматриваемых величин. Тем самым статистики этих величин определенным образом связаны между собой через $\psi(x)$. Но откуда следует, что *для системы после взаимодействия* статистики различных физических величин будут связаны между собой так же, как и при наличии $\psi(x)$? Это ниоткуда не следует, и, как правило, этого как раз нет.

Нетрудно убедиться на простом примере, что случаи, когда $\psi(x)$ не существует, действительно могут иметь место. Пусть функция для совокупности систем I и II есть

$$\Psi(x, y) = a_1\psi_1(x)\varphi_1(y) + a_2\psi_2(x)\varphi_2(y) + a_3\psi_3(x)\varphi_3(y). \quad (16)$$

Здесь ψ_i — собственные функции какого-то оператора R, φ_i — оператора S. Что можно сказать о системе I на основании формулы (16)? Очевидно, для нее отличны от нуля вероятности состояний 1, 2 и 3, но равны нулю вероятности состояний 4, 5, ... Следовательно, если существует $\psi(x)$ для системы I, то она должна иметь вид

$$\psi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + c_3\psi_3(x). \qquad (17)$$

Теперь нужно потребовать, чтобы статистика любой величины, относящейся к системе I, получалась одной и той же из (16) и из (17). Но, например, вероятность координаты x (независимо от того, каково y) из (16) получается равной

$$\int \Psi\overline{\Psi}dy = a_1\bar{a}_1\psi_1\overline{\psi}_1 + a_2\bar{a}_2\psi_2\overline{\psi}_2 + a_3\bar{a}_3\psi_3\overline{\psi}_3,$$

а из (17)

$$\psi\overline{\psi} = c_1\bar{c}_1\psi_1\overline{\psi}_1 + c_2\bar{c}_2\psi_2\overline{\psi}_2 + c_3\bar{c}_3\psi_3\overline{\psi}_3 + c_1\bar{c}_2\psi_1\overline{\psi}_2 + \ldots$$

Не представляет труда выбрать такой случай, когда $\psi_1\overline{\psi}_1, \psi_2\overline{\psi}_2$, $\psi_3\overline{\psi}_3$, $\psi_1\overline{\psi}_2$, ... линейно независимы. Значит, для совпадения результатов необходимо, чтобы было $c_1\bar{c}_1 = a_1\bar{a}_1$, $c_2\bar{c}_2 = a_2\bar{a}_2$, $c_3\bar{c}_3 = a_3\bar{a}_3$ и вместе с тем $c_1\bar{c}_2 = \bar{c}_1 c_2 = c_2 c_3 = \bar{c}_2 c_3 = c_3\bar{c}_1 = c_3 c_1 = 0$. Но это невозможно. Следовательно, нельзя подобрать такие c_1, c_2 и c_3, при которых (17) давало бы такую же статистику, как и (16), т. е. функции $\psi(x)$ для системы I не существует [1]. Физически в этом нет ничего невероятного: статистики для различных величин у системы I есть, но они связаны между собой не так, как при наличии $\psi(x)$.

Итак, встречаются случаи, не описываемые функцией $\psi(x)$ и наступающие обычно после взаимодействия. Они называются *смесями* в отличие от *чистых случаев* (чистых состояний), описываемых функцией $\psi(x)$. Для объединенной системы существует $\Psi(x, y)$, но не существует в отдельности взятых функций $\psi(x)$ и $\varphi(y)$.

Спрашивается, нельзя ли выбрать такую подсовокупность, для которой функция $\psi(x)$ существует? Очевидно, это можно сделать, если для системы I мы будем принимать во внимание только такие состояния, когда состояние системы II выделено (определенным значением либо координаты, либо какой-нибудь другой величины). Например, если мы в статистике, описывающей электрон, будем принимать во внимание только те случаи, когда α-частица имеет определенную координату, то легко ви-

[1] [Если ψ_i вещественны, как, например, для осциллятора, то

$$\psi\overline{\psi} = c_1\bar{c}_1\psi_1^2 + c_2\bar{c}_2\psi_2^2 + c_3\bar{c}_3\psi_3^2 + (c_1\bar{c}_2 + c_2\bar{c}_1)\psi_1\psi_2 + \ldots$$

и должны одновременно соблюдаться условия

$$\frac{\bar{c}_1}{c_1} = -\frac{\bar{c}_2}{c_2} = \frac{\bar{c}_3}{c_3} = -\frac{\bar{c}_1}{c_1},$$

что невозможно если все c_i не равны нулю.]

деть, что для такой подсовокупности поведение электрона описывается ψ-функцией.

После этих общих замечаний вернемся теперь к вопросу о косвенных измерениях.

Пусть мы хотим измерить в системе I (координата x) некоторую величину λ (оператор R с собственными значениями λ_1, λ_2, ... и собственными функциями $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ...). Мы приводим систему I во взаимодействие с системой II (координата y), в которой *после взаимодействия* мы можем осуществить *прямое измерение* некоторой величины μ (оператор S с собственными значениями μ_1, μ_2, ... и собственными функциями $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, ...). Если я утверждаю, что такое устройство может служить для определения λ_i по результатам прямого измерения μ_i, то это предполагает, что между μ_i и λ_i существует однозначное (или достаточно полное) соответствие.

Самый известный пример такого типа измерения, описываемый во всех учебниках, это гейзенберговский микроскоп: если мы хотим определить положение какой-либо частицы, то мы можем «осветить» ее потоком других частиц, например электронов, и по положению пятен, создаваемых этими частицами на фотографической пластинке, судить о координате интересующей нас частицы. Разумеется, если система II — фотоны, то она будет описываться не шрёдингеровским уравнением. Но это не принципиальный момент, микроскоп может быть и электронным, ибо нас интересуют вопросы, не зависящие от частных особенностей фотона. При этом мы будем считать, что мы находимся в нерелятивистской области.

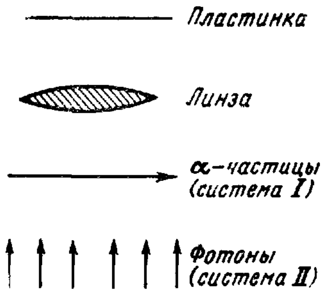

Рис. 1

До соударения мы имеем $\psi_0(x)$ для системы I и $\varphi_0(y)$ для системы II, т. е.

$$\Psi_0(x, y) = \psi_0(x)\varphi_0(y). \tag{18}$$

После соударения, как правило, мы имеем не произведение, а смесь [1], но мы всегда можем разложить $\Psi(x, y)$ по собственным функциям оператора S, относящегося ко второй системе

$$\Psi(x, y) = \sum_i u_i(x)\varphi_i(y). \tag{19}$$

Входящие сюда коэффициентами функции $u_i(x)$ не обязательно ортогональны. Предположим теперь, что функция $\psi_0(x)$ была

[1] Для всей системы у нас чистый случай, но для каждой подсистемы — смесь.

собственной функцией нашего оператора R, скажем, что $\psi_0 = \psi_i$, т. е. до взаимодействия было $\lambda = \lambda_i$. Вообще говоря, $\Psi(x, y)$ будет смесью, но может случиться, что для рассматриваемого процесса взаимодействия, при $\psi_0(x) = \psi_i(x)$, после взаимодействия получается простое произведение двух функций, из которых функция, описывающая вторую систему $\varphi_i(y)$, принадлежит собственному значению $\mu = \mu_i$ оператора S, одно-однозначным образом связанному с собственным значением λ_i оператора R, которым система I обладала до взаимодействия

$$\Psi = u_i(x)\,\varphi_i(y). \tag{20}$$

Тогда, зная, что в системе II после взаимодействия $\mu = \mu_i$, мы тем самым знаем, что в системе I до взаимодействия было $\lambda = \lambda_i$ [1]. Если такое устройство, в котором для всех i выполняется (20), найдено, то мы скажем, что мы нашли аппарат для измерения значения величины R, имевшего место до измерения [2].

Волновая механика постулирует, что такое устройство можно найти для всякой физической величины R (хотя бы в каком-то n-м звене). Без такого постулата значения λ теряют физический смысл. Обладает ли некоторое данное устройство таким свойством, это можно просто вычислить. Разумеется, устройство, являющееся измерителем для некоторой величины, может не быть измерителем для какой-либо другой величины, т. е. для нее уже не будет справедливо (20).

Вот, в сущности, вся основа косвенных измерений в волновой механике. Эти положения имеют далеко идущие следствия, к которым мы теперь и перейдем.

---

[1] Совершенно очевидно, что можно требовать гораздо меньше: если λ_i дает, скажем, три значения μ, но каждое λ_i — свои три значения μ, то этого достаточно для определения λ по μ. Однако для простоты мы остановимся на одно-однозначном соответствии.

[2] [Когда две системы I и II приводятся во взаимодействие в измерительном устройстве, то, вообще говоря, всегда существует конечная вероятность того, что состояния обеих систем после этого останутся неизменными. Например, когда освещают некоторую частицу I для того, чтобы определить ее положение, то фотон (система II) может пройти мимо частицы, не испытав рассеяния или поглощения. Таким образом, конечное состояние системы $I + II$ описывается наложением начальной функции системы $\Psi_0(x, y)$ («проходящая волна») и видоизмененной взаимодействием функции $\Psi'(x, y)$ («рассеянная волна»).

В дальнейшем предполагается, что измерительное устройство регистрирует только рассеянную волну, что всегда осуществимо с желаемой степенью точности. Если же состояние системы после «прохождения» через измерительное устройство не изменилось («проходящая волна»), то считается, что как взаимодействие систем, так и самое измерение не осуществилось. Соответственно этому утверждение, что если начальное состояние системы I описывается функцией $\psi_i(x)$, то после взаимодействия систем I и II в измерительном устройстве получается состояние, описываемое функцией $u_i(x)\,\varphi_i(y)$, относится к «рассеянной волне».]

Если величину λ в системе I можно измерить прямо и, кроме того, косвенно, то, поскольку во втором случае привходит теория — уравнение Шрёдингера, постольку мы имеем здесь *проверку теории*. Конечно, если прямого измерения для λ нет, то косвенное измерение ничего не проверяет, а является, по сути дела, *определением* λ. Но может случиться, что прямого измерения нет, зато есть несколько косвенных. Тогда мы опять имеем проверку теории. Эти последние соображения применимы, конечно, и в классике. Например, измерение положения «материальной точки» может быть сделано и прямым измерением (совпадение с делением масштаба) и косвенным (например, при помощи микроскопа). Совпадение обоих значений есть проверка оптических законов. Если бы прямое измерение было невозможно, то измерение координаты микроскопом должно было бы служить ее определением. Но тогда, конечно, о какой-нибудь проверке оптики нет речи. Но если я возьму два или несколько различных оптических измерений и результаты совпадут, то, хотя прямое измерение невозможно, совпадение отдельных результатов служит проверкой оптики.

Мы рассмотрели случай, когда начальная $\psi(x)$ была собственной функцией: $\psi_0(x) = \psi_i(x)$. Если этого нет, то я всегда могу разложить $\psi_0(x)$ по собственным функциям

$$\psi_0(x) = \sum_i c_i \psi_i(x) \tag{21}$$

и, зная, что́ дает каждая $\psi_i(x)$ после взаимодействия, записать результирующую $\Psi(x, y)$. Очевидно, в силу линейности уравнения Шрёдингера

$$\Psi(x, y) = \sum_i c_i u_i(x)\, \varphi_i(y). \tag{22}$$

При этом, вообще говоря, $u_i(x)$ не равно $\psi_i(x)$.

Величины μ_i, соответствующие функциям $\varphi_i(y)$, мы считаем измеряемыми прямо. Эти прямые измерения μ после взаимодействия дадут значение μ_i с вероятностью $c_i\bar{c}_i$ (при любых конечных состояниях системы I). Поэтому имеет непосредственное содержание высказывание, что $c_i\bar{c}_i$ есть вероятность получения значения μ_i, а следовательно, и λ_i ввиду однозначного соответствия между ними. Если бы в системе I существовал прямой метод измерения λ_i, то, согласно (21), вероятность значения λ_i была бы $c_i\bar{c}_i$. Отсюда видно, что статистика (выражение для вероятности), получаемая косвенным измерением, та же, что и получаемая прямым [из $\psi_0(x)$], если прямое измерение возможно. Если прямое измерение невозможно, то статистика для μ_i служит определением статистики для λ_i.

В первом случае я имею существенный результат: статистика инвариантна по отношению к тому этапу, где мы переходим на классику (именно, она одинакова при прямом измерении, где классика уже в первом этапе, и в косвенном, где классика во втором этапе). Как видите, это очень существенное обстоятельство, показывающее, что во всей постановке вопроса нет внутреннего противоречия.

Далее, $\Psi_0(x, y)$ зависит не только от того, каково $\psi_0(x)$, но и от $\varphi_0(y)$. При одних $\varphi_0(y)$ данное устройство может являться измерителем λ, при других не может. Здесь особенно ясно видно, что в волновой механике само определение величины зависит от прибора, которым вы работаете. Если это постоянно иметь в виду, то можно избегнуть многих «парадоксов». Вот, например, один из них, на который я сейчас только укажу: собственные функции осциллятора $\psi_n(x)$ стремятся к нулю при $x \to \infty$, но для всякого сколь угодно большого *конечного* x: $|\psi(x)|^2 \neq 0$. Таким образом, существует отличная от нуля вероятность того, что потенциальная энергия осциллятора $V = \frac{\alpha x^2}{2}$ *превышает* его полную энергию $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$. Это, говорят, очень неприятно, это парадокс.

Прежде всего, я не вижу, почему это шокирует. В классике мы знаем, что $E = V + T$, причем $T = \frac{mv^2}{2} > 0$. Здесь действительно неприятно, если $V > E$. Но в волновой механике мы ведь вообще не можем измерять одновременно x и v, а стало быть, и V и T.

Однако если здесь и нет парадокса, то может быть существенное отличие от классики. Рассмотрим вопрос об измерении таких больших x, что $V > E$. Можно ли констатировать (измерить), что осциллирующая частица претерпевает столь большие отклонения от положения равновесия? Оказывается, как мы увидим далее, что не всякий измеритель x пригоден для измерения таких отклонений, при которых $V > E$. Именно поэтому, пока мы рассуждаем оторванно от измерителя, и получается парадокс. Необходимо рассматривать измеритель и измеряемую величину в совокупности: измерительное устройство, т. е. физические условия, в которых находится частица, существенно определяет возможные значения измеряемой величины. В данном случае обычные измерительные устройства, годные при малых x, когда $V < E$, вообще говоря, не будут годны для измерения положения частицы вдали от положения равновесия, когда $V > E$, если только эти устройства не могут при измерении передавать измеряемой частице достаточно большой энергии [1].

Я уже указывал, что нужно каждый раз изыскивать определенное измерительное устройство. Но встречалась и даже превалировала другая точка зрения. Так, в первом издании книги Дирака (во втором издании этого вообще нет) утверждалось, что два измерения, очень быстро следующих одно за другим, дают одно и то же («повторяемость» значений). Так ли это?

Пусть перед первым измерением для системы I мы имели $\psi_1(x)$. Тогда после взаимодействия получим $\Psi(x, y) = u_1(x)\varphi_1(y)$ [2]. Таким образом, для второго измерения мы имеем начальную функцию $u_1(x)$, вообще говоря, не равную $\psi_1(x)$. Значит, и $\Psi(x, y)$ после второго измерения будет другим. Иными словами, нигде не сказано, что измерительное устройство обязательно позволяет повторять измерение с теми же результатами. Это может иметь место, но, вообще говоря, лишь в исключительных случаях. Например, измерения координат повторимы [3], а импульса — нет.

Остановимся в заключение еще на одном интересном вопросе, на так называемой редукции волнового пакета. Обычное изложение этого вопроса мне представляется какой-то мистикой. Между тем дело, по-моему, совсем просто.

Как ставился вопрос?

Имеется пакет, изображающий некоторую частицу и падающий на потенциальный барьер. Пусть барьер таков, что пакет наполовину отражается и наполовину проходит. Мы получаем,

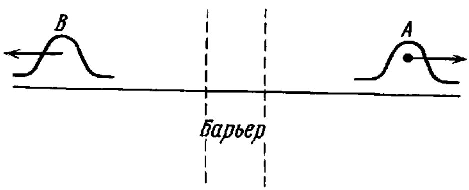

Рис. 2

следовательно, два пакета, разбегающихся в противоположные стороны (рис. 2). Мы подождем, пока A и B не удалятся друг от друга чрезвычайно далеко, и затем произведем измерение, скажем, с помощью микроскопа.

Пусть в результате этого измерения мы нашли, что частица находится в A. Тогда после измерения, если есть волновая функ-

[1] [Этот вопрос детально разбирается ниже, в 4-й лекции.]
[2] [См. примечание 2 на стр. 344.]
[3] [См. стр. 360.]

ция для изучаемой частицы, то она отлична от нуля только в A, а в B ничего нет. Говорят, что акт измерения положения частицы *редуцирует волновой пакет* (*собирает его в* A). По этому поводу Эйнштейн сделал на Сольвеевском конгрессе замечание, смысла которого я, сколько ни думал, не понимаю. Действие в A, сказал Эйнштейн, изменило вероятность в B от $1/2$ до 0. Так как расстояние между A и B очень велико, а действие в A могло быть очень кратким, то, следовательно, действие в A передалось в B со скоростью, которая может в любое число раз превышать скорость света. *Эйнштейну возразили, что это действие не является сигналом*, и на этом успокоились.

По-моему, дело вообще совсем в другом и совершенно не относится к квантовой механике. Здесь попросту нет никакого *действия*. Разве вероятность есть что-то такое, на что физически действуют? До измерения (с помощью системы II — координата y) мы имели $\Psi_0(x, y) = \psi_0(x)\varphi_0(y)$; $\psi_0(x)$ — это и был (уже раздвоившийся) пакет. После измерения мы получаем $\Psi(x, y) = = \sum\limits_i c_i u_i(x)\varphi_i(y)$, т. е. теперь вообще нет волновой функции $\psi(x)$ и нет никакого пакета. Можно, однако, выделить подсовокупность, т. е. выбрать только те случаи, когда прямое измерение над системой II дает, скажем, $\mu = \mu_1$. В пределах этой подсовокупности для системы I существует волновая функция, а именно, $u_1(x)$. *Это выделение волновой функции и чистого состояния происходит за счет добавочного классического измерения*, относящегося к y. Это и есть «редукция волнового пакета», образование нового пакета. Ничего удивительного в том, что этот пакет отличен от прежнего, разумеется, нет.

Предположите, что некое лицо N ездит из Ленинграда в Москву и обратно, проводя в среднем одинаковое время в каждом из этих городов. В Москве и Ленинграде сидят наблюдатели и производят, скажем, ежедневно, «измерения», а именно, констатируют наличие или отсутствие N. Длительная статистика покажет им, что вероятность нахождения в каждом из городов равна $1/2$. Но если мы примем в расчет только те наблюдения ленинградского наблюдателя, при которых произведенные в тот же день наблюдения москвича дали 1, то мы получим, что вероятность пребывания в Ленинграде равна нулю. Вот и вся «редукция волнового пакета». Очевидно, здесь нет никакого противоречия с теорией относительности. Если москвич поставит себе задачей предупредить ленинградца о своем результате, то он будет телеграфировать. Телеграмма — это, конечно, «действие», это сигнал, но она и идет не быстрее света в вакууме.

Сказанное интересно связать с самым первым нашим положением о том, что совокупность задается макроскопически. До взаимодействия мы задаем некоторое количество макроскопических параметров, достаточное для того, чтобы определить волновые функции $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ систем I и II. После взаимодействия этих параметров обычно уже недостаточно, и для определения парциальных волновых функций надо задать некоторые макропараметры дополнительно. Этим и выделяется подсовокупность, в пределах которой снова существует $\psi(x)$.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(20.IV 1939 г)

Резюмируем кратко сформулированные нами общие положения квантовомеханической теории измерений.

Чтобы косвенно измерить относящуюся к системе I величину R с собственными значениями λ, мы приводим систему I во взаимодействие с другой, тоже микроскопической системой II, в которой мы умеем прямо, классическими опытами, измерять величину S, обладающую собственными значениями μ_k. До взаимодействия имеем

$$\Psi_0(x, y) = \psi_0(x)\varphi_0(y). \tag{23}$$

После взаимодействия [1] всегда можно представить Ψ в виде разложения по собственным функциям оператора S

$$\Psi(x, y) = \sum_i c_i u_i(x)\varphi_i(y). \tag{24}$$

Коэффициенты c_i мы теперь ввели для того, чтобы $\varphi_i(y)$ можно было считать нормированными.

Если условия таковы, что при $\psi_0(x) = \psi_i(x)$ после взаимодействия будет

$$\Psi(x, y) = u_i(x)\varphi_i(y), \tag{25}$$

то, измеряя состояние системы II после взаимодействия, мы можем заключить о состоянии системы I до взаимодействия. Требование, чтобы такое соотношение выполнялось, есть требование того, чтобы данная аппаратура являлась измерителем величины λ.

[1] [См. примечание 2 на стр. 344.]