взаимодействия мы задаем некоторое количество макроскопических параметров, достаточное для того, чтобы определить волновые функции $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ систем I и II. После взаимодействия этих параметров обычно уже недостаточно, и для определения парциальных волновых функций надо задать некоторые макропараметры дополнительно. Этим и выделяется подсовокупность, в пределах которой снова существует $\psi(x)$.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(20.IV 1939 г)

Резюмируем кратко сформулированные нами общие положения квантовомеханической теории измерений.

Чтобы косвенно измерить относящуюся к системе I величину R с собственными значениями λ, мы приводим систему I во взаимодействие с другой, тоже микроскопической системой II, в которой мы умеем прямо, классическими опытами, измерять величину S, обладающую собственными значениями μ_k. До взаимодействия имеем

$$\Psi_0(x, y) = \psi_0(x)\,\varphi_0(y). \tag{23}$$

После взаимодействия [1] всегда можно представить Ψ в виде разложения по собственным функциям оператора S

$$\Psi(x, y) = \sum_i c_i u_i(x)\,\varphi_i(y). \tag{24}$$

Коэффициенты c_i мы теперь ввели для того, чтобы $\varphi_i(y)$ можно было считать нормированными.

Если условия таковы, что при $\psi_0(x) = \psi_i(x)$ после взаимодействия будет

$$\Psi(x, y) = u_i(x)\,\varphi_i(y), \tag{25}$$

то, измеряя состояние системы II после взаимодействия, мы можем заключить о состоянии системы I до взаимодействия. Требование, чтобы такое соотношение выполнялось, есть требование того, чтобы данная аппаратура являлась измерителем величины λ.

[1] [См. примечание 2 на стр. 344.]

После измерения мы, вообще говоря, имеем смесь. Но мы можем выделить подсовокупность (скажем, тем, что выберем определенное $\mu = \mu_k$), в которой для системы I существует волновая функция, а именно, $u_k(x)$. В общем случае $u_k(x) \neq \psi_0(x)$. Возможно, что система II имеет не одну, а две степени свободы — практика обычно гораздо сложнее, чем удобные для дискуссии примеры. Тогда

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{i,j} c_{ij} u_{ij}(x)\, \varphi_i(y)\, \chi_j(z). \tag{26}$$

Одновременно, измеряя собственные значения μ_i и ν_j для систем II и III, мы выделяем подсовокупность, в которой система I описывается волновой функцией $u_{ij}(x)$.

Для непрерывных спектров суммы заменятся интегралами.

Все эти общие положения несколько абстрактны. Теперь мы проиллюстрируем их на примерах измерения двух основных величин — импульса и координаты. Дискуссия этих примеров представляет интерес, с одной стороны, потому, что в них мы уже будем иметь дело с определенными физическими измерительными устройствами (конечно, упрощенными), с другой стороны, мы рассмотрим действие этих устройств с точки зрения нашей схемы.

Прежде всего рассмотрим *измерение импульса свободной частицы*.

Если на частицу не действуют силы и ее энергия есть E, то решением уравнения Шрёдингера является функция

$$\psi'(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \tag{27}$$

(штрих отмечает, что это решение временно́го уравнения). Эта функция является собственной функцией оператора импульса. Следовательно, отбрасывая временно́й множитель, ее можно записать так:

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}p'x}.$$

Отсюда получается связь между энергией и импульсом

$$p' = \sqrt{2mE}. \tag{28}$$

Я намеренно ничего не говорю пока о *скорости*. Мы пока ввели определенным образом только координату и импульс (или, лучше сказать, квазикоординату и квазиимпульс).

Если частица заряженная (протон или α-частица), то ее импульс можно измерить чисто классически — прямым опытом, например по ее пробегу в камере Вильсона. Но для нейтрона этот путь закрыт, и нам нужно найти устройство, позволяющее измерять импульс нейтрона косвенно. Его можно измерять, например, по пробегу протона, с которым мы заставляем этот нейтрон соударяться. Для простоты допустим, что все происходит в одном измерении. (Фактически осуществить это нельзя, но все важные нам принципиальные моменты при таком рассмотрении сохраняются.)

Пусть нейтрон падает на пластинку водородсодержащего вещества (например, парафина) и выбивает из него протон, который влетает в стоящую за пластинкой камеру Вильсона (рис. 3). По пробегу этого протона в камере Вильсона, поддающемуся прямому измерению, мы и хотим узнать импульс нейтрона.

Для падающего на пластинку нейтрона (системы I) мы имеем[1]

$$\psi_0(x) = e^{\frac{i}{\hbar}px}. \tag{29}$$

Протон заключен в толще пластинки, и если она велика по сравнению с длиной волны, то можно считать, что импульс p_1 у протона какой-то определенный. Именно, можно положить

$$\varphi_0(y) = f(y)\, e^{\frac{i}{\hbar}p_1 y}, \tag{30}$$

где $f(y)$ — медленно меняющаяся функция, не равная нулю

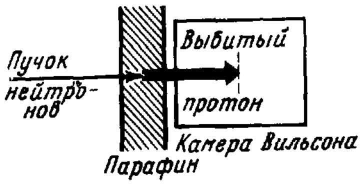

Рис. 3

внутри пластинки и исчезающая вне ее. Таким образом, она мало меняется на протяжении одной длины волны. Протон прак-

[1] Я хочу сделать одно общее замечание, не специфичное для волновой механики. Его, однако, следует иметь в виду при переходе к обсуждению опытов. Мы говорим об определенном импульсе, когда $\psi = \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right)$, причем эта формула должна быть верна во всем пространстве ($-\infty < x < +\infty$). Фактически такую волну получить нет возможности. Но это то же самое, что в оптике с монохроматическим светом. И там замена достаточно монохроматического света (достаточно длинных цугов) идеальным монохроматическим для многих вопросов (конечно, не при рассмотрении групповой скорости) представляет собой вполне законную идеализацию.

тически не движется, так что можно считать $p_1 = 0$. Следовательно,

$$\varphi_0(y) = f(y) \tag{31}$$

— медленно меняющаяся функция. Итак, до соударения

$$\Psi_0(x, y) = f(y)\, e^{\frac{i}{\hbar} px}. \tag{32}$$

Условие, чтобы функция $\psi_0(x)$ являлась собственной функцией оператора измеряемой величины (в нашем случае — импульса), здесь выполнено. Будет ли наше устройство измерителем импульса? Для этого нужно посмотреть, каково $\Psi(x, y)$ после взаимодействия. Если наше устройство может служить измерителем импульса, то после взаимодействия должно быть

$$\Psi(x, y) = u(x)\varphi(y).$$

Фактически мы не включаем и не выключаем взаимодействия, но последовательность во времени обусловливается перемещением частиц. При этом взаимодействие весьма кратковременно, так как оно имеет место лишь на малых расстояниях. Мы должны написать теперь для Ψ уравнение Шрёдингера и учесть в нем это взаимодействие добавочным членом.

Мы упростим задачу, положив, что взаимодействие является отталкиванием, что оно бесконечно велико при совпадении частиц $(x - y)$ и равно нулю во всех остальных точках.

Что означает бесконечно большое отталкивание при $x = y$? Это значит, что вероятность найти там что-нибудь равна нулю [1]:

$$\Psi(x, y) = 0 \text{ при } x = y. \tag{33}$$

С этим условием мы должны обратиться теперь к уравнению для Ψ, но в самом уравнении никаких членов, описывающих взаимодействие, учитывать уже не надо. Так как массы у нейтрона и протона, к счастью, одинаковы, то уравнение будет

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{p^2}{2m\hbar^2}\Psi = 0, \tag{34}$$

где $p^2/2m$ — общая энергия системы. Разумеется, функция (32) удовлетворяет этому уравнению, если только помнить, что $f(y)$ — почти постоянная величина в широком интервале.

[1] [Условие (33) можно вывести, рассматривая модель непроницаемых частиц исчезающе малого размера в одном измерении. В трех измерениях условие для Ψ формулируется на поверхности сферы конечного радиуса; см. уравнение (66).]

Вместо того чтобы решать формулированную выше задачу, я сошлюсь теперь на точно такую же задачу из оптики — способ, который во многих случаях оказывается полезным. Именно, возьмем действительно двухмерную задачу, когда волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+k^2\Phi=0$$

такое же, как (34), возьмем *широкий пучок света*, идущий в направлении x

$$\Phi_0=f(y)\,e^{ikx},$$

т. е. зададим его той же формулой, что и (32), и, наконец, поставим граничное условие (33)

$$\Phi\,|_{x=y}=0.$$

Очевидно, при такой постановке вопроса мы имеем задачу об отражении от идеального зеркала, поставленного под углом 45°

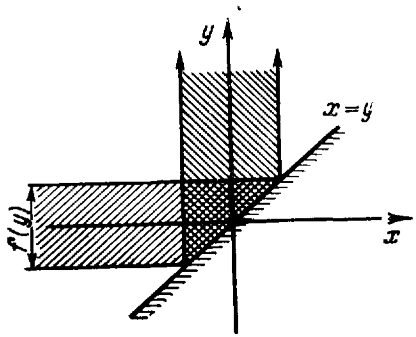

Рис. 4

к падающему пучку (рис. 4). Результат известен: получится такой же пучок, идущий в направлении оси y, т. е. $\Psi(x, y)$ после взаимодействия есть

$$\Psi_1(x,y)=-f(x)\,e^{\frac{i}{\hbar}py}. \tag{35}$$

Это значит, что теперь нейтрон покоится [нейтроны застряли в парафине, и собственная функция системы I изменилась $e^{\frac{i}{\hbar}px}\rightarrow f(x)$], а протон имеет импульс p, измерять который мы умеем прямо.

Функция (35) имеет как раз такой вид, который, согласно (25), необходим, чтобы по состоянию системы *II* после взаимодействия можно было заключить о состоянии системы *I* до взаимодействия, т. е. наше устройство действительно является измерителем импульса. Если $\mu_i = p$, то мы заключаем отсюда, что до взаимодействия нейтрон обладал импульсом $\lambda_i = p$.

Как видно из этого примера, введенные нами величины p и E обладают тем свойством, что их суммарное значение сохраняется в процессе взаимодействия. Это чрезвычайно важно, потому что как раз таким свойством обладают классические импульс и энергия. Поэтому при нашем определении импульса и энергии в квантовой механике получаются те же законы сохранения, что и в классике. Между тем законы сохранения вообще и есть то, что придает в механике смысл введению понятий энергии и импульса.

С другой стороны, если для нейтрона нет других способов измерения p, то наш опыт как раз и представляет собой определение понятия «импульс нейтрона». Тем не менее наш опыт имеет большее содержание, чем простое определение. Дело в том, что можно проделать такой же опыт, воспользовавшись частицей с иной массой, чем у протона. Тогда, сравнивая результаты разных опытов, мы уже будем иметь проверку теории. Такой опыт с частицей другой массы сведется (в оптической аналогии) к тому, что зеркало будет стоять под углом, отличным от 45°. В самом деле, если масса второй частицы не m, а αm, то в (34) перед членом $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}$ появится коэффициент $1/\alpha$. Поэтому, рассматривая все в системе координат не (x, y), а (x, y'), где $y' = \sqrt{\alpha}y$, мы из условия $\Psi = 0$ при $x = y$ получим условие $\Psi = 0$ при $x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}y'$. Если масса рассеивающей частицы очень велика ($\alpha \gg 1$), то $\Psi = 0$ на всей плоскости $x = 0$, зеркало станет поперек пучка и вернет нейтрон обратно (нейтрон отразится). Законы сохранения отсюда легко вывести, и мы получаем возможность проверять теорию [1].

[1] Необходимо сделать одно замечание: как до удара, так и после удара мы имеем произведение функций от x и y. Это как раз требуется для возможности производить измерения. Но в дважды заштрихованном на рис. 4 пространстве у нас

$$\Psi(x, y) = f(y)\, e^{\frac{i}{\hbar}px} - f(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}py},$$

т. е. здесь нет простого произведения. Здесь, таким образом, нельзя «измерять». «Время пробега» частицы в этой области $\Delta t \sim l/v$, где l — ее ширина. Однако, применяя оптическую аналогию, мы пользовались геометрической оптикой, т. е. пренебрегли дифракцией, считая $f(y)$ функцией, достаточно медленно меняющейся по длине волны, т. е. считая, что $l \gg \hbar/p$. Это означает, что производить измерение можно, только подождав время $\Delta t \gg \hbar/mv^2$ после удара.

Перейдем теперь ко второму примеру — *к измерению координаты*. Мы воспользуемся для этого электронным микроскопом, с помощью которого всегда излагают эти вопросы, причем почти всюду, если не всюду, излагают неправильно.

Следует отметить, что и здесь мы будем касаться лишь вопроса о *точном* измерении. В предыдущем примере мы показали, как можно *точно* измерить импульс. Немонохроматичность у нас была, но не принципиальная: она возникла из-за конечной толщины пластинки парафина. В принципе же мы имели $\Delta q = \infty$, и поэтому, не нарушая соотношения $\Delta p \cdot \Delta q \gg \hbar$, у нас могло быть $\Delta p = 0$. О неточности лучше говорить не сейчас, а далее, при дискуссии приближенных измерений. Теперь же, как и в примере с импульсом, мы рассмотрим задачу о точном (когда это возможно) косвенном измерении координаты.

Итак, мы имеем следующее устройство: частица M, координату которой мы хотим измерить, может двигаться только вдоль оси z (рис. 5); по направлению оси x падает пучок электронов, имеющих массу m, причем координаты электрона в плоскости чертежа обозначим x и y (y — координата электрона по оси z). Рассеянные электроны собираются линзой на пластинку, где и дают изображение. Может ли такой микроскоп измерять значения координаты частицы?

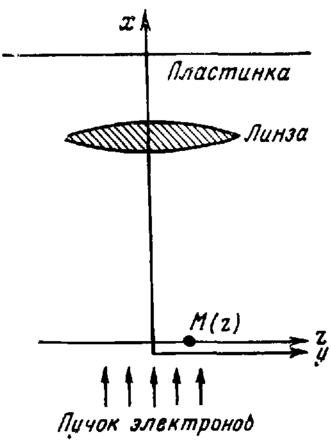

Рис. 5

Для упрощения мы заменим частицу дырочкой (дополнительным экраном, по Бабине), что позволит нам рассматривать только поле, рассеянное «частицей». Без такой замены пришлось бы учитывать и первичное поле. Замена частицы движущейся диафрагмой (с той же массой) может показаться странной, но очевидно, что она возможна и законна. Мы имеем уравнение

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2M}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{E}{\hbar^2}\Psi=0, \tag{36}$$

причем до соударения, когда частицы не взаимодействуют,

$$\Psi_0(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar}qx}e^{\frac{i}{\hbar}pz}, \qquad \left(E = \frac{q^2}{2m}+\frac{p^2}{2M}\right), \tag{37}$$

где q — импульс электрона по оси x, p — импульс частицы. Как учесть, что электроны могут проходить только через бесконечно малую дырочку? Мы должны, очевидно, выразить то обстоятельство, что прохождение имеет место лишь при совпадении координаты электрона y с координатой «частицы» (на плоскости $x = 0$). Очевидно, мы достигнем цели, приняв, что при $x = 0$

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar} pz} \delta(z - y). \tag{38}$$

Легко построить оптическую аналогию нашей задачи, введя y как настоящую третью координату, ортогональную к x и z. Это будет задача о дифракции на щели.

Если воспользоваться равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha r} dr = 2\pi\hbar\delta(\alpha), \tag{39}$$

то условие (38) можно переписать в виде

$$\Psi(0, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar} pz} \delta(z - y) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}[ry + (p-r)z]} dr. \tag{40}$$

Итак, нам нужно написать решение уравнения (36), соответствующее заданной энергии E и удовлетворяющее условию (40), которое выражает мгновенный акт взаимодействия электрона с частицей-дырочкой. Нетрудно убедиться простой подстановкой, что искомое решение есть

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}[ry + (p-r)z + \sqrt{k^2 - \varepsilon^2(p-r)^2 - r^2}\, x]} dr, \tag{41}$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{m}{M}, \qquad k^2 = 2mE. \tag{42}$$

Что это решение означает? Оно представляет собой интеграл (сумму) произведений трех экспонентов, т. е. трех собственных функций операторов проекций импульса. Коэффициент при каждом слагаемом по общему правилу дает вероятность того, что компоненты импульса по осям y, z и x будут соответственно равны

$$r, \; p - r \; \text{и} \; \sqrt{k^2 - \varepsilon^2(p-r)^2 - r^2}.$$

Таким образом, в смесь входят лишь такие члены, для которых выполняются вполне определенные соотношения между импульсами

$$p_y + p_z = r + (p - r) = p = \text{const}, \tag{43}$$

$$\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2M}=E. \tag{44}$$

Импульс по направлению совпадающих друг с другом осей y и z сохраняется, причем очевидно, что электрон приобретает импульс r по оси z за счет импульса частицы ($p \to p - r$), т. е. здесь сказывается обратное действие измерителя на измеряемое. Это, по существу, и соответствует комптон-эффекту. По оси x сохранения импульса нет: до взаимодействия импульс был q, а теперь он не равен q. Конечно, смысл этого не тот, что нарушен закон сохранения, а тот, что мы наложили связь, запретив диафрагме (частице) двигаться по оси x. Другими словами, импульс по оси x у частицы есть, но мы его не учитываем. Отсюда и проистекает несохранение импульса p_x. Наконец, из (37) и (44) мы видим, что наше решение удовлетворяет сохранению энергии.

Нам нужно теперь, для того чтобы микроскоп был измерителем координаты, уметь измерять координаты рассеянного электрона с помощью прямого эксперимента. Но это заведомо не всегда возможно: интеграл в (41) берется по r от $-\infty$ до $+\infty$, для больших $|r|$ корень в экспоненте сделается мнимым, и соответствующие волны быстро затухают с ростом x. Как ловить такой электрон, как его измерять, мы не знаем. Поэтому поставим вопрос совершенно конкретно: то, что мы до сих пор рассматривали, еще не микроскоп. Чтобы получить микроскоп, мы поместим на пути рассеянных электронов линзу или систему линз и посмотрим, что даст линза на плоскости пластинки, какие заключения можно будет сделать по даваемому линзой изображению.

Через линзу идет сумма плоских волн (41), и нам следует теперь учесть действие оптического аппарата, действие линзы наиболее удобным способом. Это рассмотрение нужно произвести раз навсегда, чтобы в дальнейшем к нему уже не возвращаться. Поэтому мы предпримем сейчас небольшое отступление в область оптики.

Если поставить вопрос о том, какая оптическая система может отобразить плоскость на плоскость, то оказывается, что это будет *телескопическая система*[1]. Ее свойство в том и состоит, что падающая на нее плоская волна $e^{i(ry+\sqrt{k^2-r^2}\,x)}$ ($x=0$ — плоскость предмета) преобразуется в плоскую же волну $e^{i\left[\frac{r}{s}y+\sqrt{k^2-\left(\frac{r}{s}\right)^2}\,x'\right]}$, где x' отсчитывается вдоль прежней оси x, но от плоскости

[1] [См. том II, статья 56.]

изображения, принимаемой за плоскость $x' = 0$. Это свойство математически выражают, говоря, что телескопическая система действует, как линейный оператор.

Может ли такая система давать изображение? Покажем, что может. Пусть на плоскости $x = 0$ имеем некоторую структуру, которую можно описать формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\, e^{iry} dr.$$

Тогда поле, падающее на линзу, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\, e^{i\left(ry+\sqrt{k^2-r^2}x\right)} dr. \tag{45}$$

Для $|r| > k$ волны затухают. Реальные линзы не пропускают таких волн. Следовательно, поле, прошедшее линзу, будет

$$\int_{-k}^{+k} f(r)\, e^{i\left[\frac{r}{s}y+\sqrt{k^2-\left(\frac{r}{s}\right)^2 x'}\right]} dr, \tag{46}$$

т. е. интеграл будет распространяться уже на промежуток в конечных пределах, а в плоскости изображения $x' = 0$ мы получим структуру

$$\int_{-k}^{+k} f(r)\, e^{i\frac{r}{s}y} dr. \tag{47}$$

Если бы и здесь был интеграл от $-\infty$ до $+\infty$, то изображение было бы в точности подобно предмету, но в другом масштабе ($1/s$ в показателе), т. е. мы получили бы идеальное изображение. Если k достаточно велико, настолько, что $f(r) \approx 0$ там, где r приближается к k, то изображение будет очень хорошим, почти идеальным. Большие k — это малые длины волн в оптике, большие импульсы у электронов в нашем случае.

Возвратимся теперь к измерению координаты частицы с помощью электронного микроскопа.

Итак, мы должны написать выражение для Ψ, преобразованное нашей линзой. Мы предположим для упрощения, что масса частицы велика, так что $\varepsilon^2 \ll 1$ и членом $\varepsilon^2 (p - r)^2$ под корнем можно пренебречь, так как он мал либо по сравнению с k^2, либо по сравнению с r^2. Тогда до линзы имеем

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{2\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\left[ry+(p-r)\;+\sqrt{k-r^2}x\right]} dr. \tag{48}$$

После линзы

$$\Psi(x', y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-k}^{+k} e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{r}{s} y + (p-r) z + \sqrt{k^2 - \left(\frac{r}{s}\right)^2} x'\right]} dr. \qquad (49)^1$$

Заметим, что уже теперь видно, как перейти к приближенным измерениям. Это будет случай небольших k, не очень коротких волн. Мы наблюдаем электроны в плоскости $x' = 0$, т. е. имеем

$$[\Psi(x', y, z)]_{x'=0} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-k}^{+k} e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{r}{s} y + (p-r) z\right]} dr = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} pz}}{2\pi\hbar} \int\limits_{-k}^{+k} e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{y}{s} - z\right) r} dr. \qquad (50$$

Итак, взяв в качестве исходной волновой функции частицы собственную функцию импульса $\psi_0(z) = e^{\frac{i}{\hbar} pz}$, мы получили смесь — сумму произведений собственных функций импульсов частицы и электронов. Следовательно, измеряя импульс рассеянного электрона в $x' = 0$, мы не узнаем состояния рассеивающей диафрагмы-частицы. Наше устройство *не* является измерителем импульса.

Но является ли оно измерителем координаты? Чтобы проверить это, мы должны взять в качестве волновой функции частицы до измерения, $\psi_0(z)$, собственную функцию координаты

$$\psi_0(z) = \delta(z - z_1), \qquad (51)$$

и посмотреть, какая функция $[\Psi(x', y, z)|_{x'=0}$ получится в этом случае.

Вместо (38) мы имеем теперь

$$\text{при } x = 0 \qquad \Psi = \delta(z - z_1)\, \delta(z - y), \qquad (52)$$

или, если воспользоваться разложением (39),

$$\text{при } x = 0 \qquad \Psi = \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p (z_1 - z)}\, dp \cdot \delta(z - y). \qquad (53)$$

Так как Ψ представляет собой интеграл, т. е. сумму отдельных членов вида (38), и так как мы знаем, какое $\Psi(x', y, z)$ получается для каждого такого члена [а именно, формула (49)], то мы можем

[1] Здесь, в отличие от (41), уже нет сохранения импульса [даже если мы не будем отбрасывать член $\varepsilon^2 (p - r)^2$]. Объясняется это, конечно, тем, что некоторый импульс приняла на себя линза.

сразу же написать окончательный результат

$$\Psi(x', y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-i\frac{p}{\hbar}z_1} \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-k}^{+k} dr\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{r}{s}y + (p-r)z + \sqrt{k^2-\left(\frac{r}{s}\right)^2}x'\right]}. \tag{54}$$

На плоскости $x' = 0$ это дает

$$[\Psi(x', y, z)]_{x'=0} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-i\frac{p}{\hbar}z_1} \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-k}^{+k} dr\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{r}{s}y + (p-r)z\right]}. \tag{55}$$

Если можно считать, что $k = \infty$, то

$$[\Psi(x', y, z)]_{x'=0} = \delta(z - z_1)\,\delta\left(\frac{y}{s} - z\right) = \delta(z - z_1)\,\delta\left(\frac{y}{s} - z_1\right). \tag{56}$$

Таким образом, если до измерения интересующая нас система обладала определенной координатой, $\psi_0(z) = \delta(z - z_1)$, то в конце концов мы получаем произведение функций от y' и z_1', причем $\varphi(y) = \delta\left(\frac{y}{s} - z_1\right)$ — собственная функция координаты. Измерять координату электрона (координату пятна на пластинке), т. е. y, мы умеем классически. Измерив же y, мы получаем, что координата частицы до соударения была $z_1 = \frac{y}{s}$. Значит, наш микроскоп, по крайней мере при $k = \infty$, действительно является измерителем координаты. Заметим, что после измерения мы получили $u(z) = \delta(z - z_1) = \psi_0(z)$, т. е. волновая функция частицы (существующая после измерения в пределах подсовокупности $y \sim \text{const}$) совпадает с исходной волновой функцией. Таким образом, измерения координаты повторимы.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8.V 1939 г.)

Мы разобрали некоторые принципиальные вопросы квантово-механической теории измерений и иллюстрировали их двумя типичными примерами. Следует подчеркнуть, что мы разобрали не все вопросы, касающиеся измерений, а только некоторые, наиболее характерные. Так, например, мы брали ψ только в виде функции координат и совсем не рассматривали зависимости от времени, хотя уже понятия «до» и «после» измерения — временные. Взаимо-