сразу же написать окончательный результат

$$\Psi(x', y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-i\frac{p}{\hbar}z_1} \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-k}^{+k} dr e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{r}{s}y + (p-r)z + \sqrt{k^2 - \left(\frac{r}{s}\right)^2}x'\right]}. \tag{54}$$

На плоскости $x' = 0$ это дает

$$[\Psi(x', y, z)]_{x'=0} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-i\frac{p}{\hbar}z_1} \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-k}^{+k} dr e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{r}{s}y + (p-r)z\right]}. \tag{55}$$

Если можно считать, что $k = \infty$, то

$$[\Psi(x', y, z)]_{x'=0} = \delta(z - z_1)\,\delta\left(\frac{y}{s} - z\right) = \delta(z - z_1)\,\delta\left(\frac{y}{s} - z_1\right). \tag{56}$$

Таким образом, если до измерения интересующая нас система обладала определенной координатой, $\psi_0(z) = \delta(z - z_1)$, то в конце концов мы получаем произведение функций от y' и z_1', причем $\varphi(y) = \delta\left(\frac{y}{s} - z_1\right)$ — собственная функция координаты. Измерять координату электрона (координату пятна на пластинке), т. е. y, мы умеем классически. Измерив же y, мы получаем, что координата частицы до соударения была $z_1 = \frac{y}{s}$. Значит, наш микроскоп, по крайней мере при $k = \infty$, действительно является измерителем координаты. Заметим, что после измерения мы получили $u(z) = \delta(z - z_1) = \psi_0(z)$, т. е. волновая функция частицы (существующая после измерения в пределах подсовокупности $y \sim \mathrm{const}$) совпадает с исходной волновой функцией. Таким образом, измерения координаты повторимы.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8.V 1939 г.)

Мы разобрали некоторые принципиальные вопросы квантово-механической теории измерений и иллюстрировали их двумя типичными примерами. Следует подчеркнуть, что мы разобрали не все вопросы, касающиеся измерений, а только некоторые, наиболее характерные. Так, например, мы брали ψ только в виде функции координат и совсем не рассматривали зависимости от времени, хотя уже понятия «до» и «после» измерения — временные. Взаимодействие считалось совершающимся мгновенно, хотя в действительности измерение требует времени и учет этого обстоятельства существенно усложняет рассмотрение. Вопрос о времени важен еще и потому, что в волновой механике он тесно связан с вопросом об энергии.

Вопрос этот трудный, и в этом семестре мы его не будем рассматривать, так как есть такие случаи, в которых время не играет существенной роли (например, диафрагма большой массы и малой скорости).

Мы имеем теперь уже достаточный материал для того, чтобы занять определенную позицию в полемике об основах волновой механики, происходившей между Эйнштейном, Бором и другими. Эта полемика относится еще к точным измерениям, и поэтому уместно остановиться на ней именно сейчас. Рассмотрим сначала один вопрос, я сказал бы, терминологического характера.

Говоря об измерении, мы хотели узнать, какое значение имела величина λ (оператор R с собственными функциями $\psi_i(x)$) в системе I *до ее взаимодействия* с системой II, в которой после взаимодействия мы умеем прямо измерять величину μ (оператор S с собственными функциями $\varphi_i(y)$). Мы назвали устройство измерителем λ, если, имея до опыта $\psi_0 = \psi_i'(x)$, мы после опыта получаем $\Psi = u_i(x)\varphi_i(y)$. При этом функция $u_i(x)$ вовсе не обязательно должна быть собственной функцией R.

Но возможна и другая постановка вопроса. Имеем для системы I функцию $\psi_0(x)$, вводим взаимодействие с системой II, и пусть случается так, что

$$\Psi(x, y) = \sum_i a_i \psi_i(x) \varphi_i(y), \tag{57}$$

где ψ_i — собственные функции R, а φ_i — собственные функции S. В целом Ψ не является собственной функцией ни R, ни S, но для подсовокупности с фиксированным μ_k Ψ будет собственной функцией R, а именно, $\psi_k(x)$, т. е. значение λ будет λ_k. Таким образом, здесь другое понятие измерения: зная $\varphi_k(y)$, причем μ мы измеряем после взаимодействия, когда система II уже свободна и на систему I не влияет, мы можем *предсказать* результат измерения последствий взаимодействия для системы I (т. е. результаты измерений, произведенных над системой I после ее взаимодействия с системой II).

Я видоизменю теперь рассуждение Эйнштейна с тем, чтобы, не меняя его по существу, приблизить его к нашей схеме.

Если состояние системы описывается функцией $\psi(x)$, то, как учит волновая механика, вы не можете предсказать достоверно одновременные значения двух величин, которым соответствуют два некоммутирующих оператора. Например, измеряя координату системы, обладающей точным импульсом и соответственно описываемой функцией $\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}px}$, мы получаем новую $\psi(x)$, такую, что при *определенном* x мы утрачиваем p. Здесь, говорит Эйнштейн, нет возражений и даже более: *реальным* является либо p, либо x. Но если мне удастся указать метод измерения, позволяющий однозначно предсказать, не трогая систему, одновременно и p, и x, если это удастся сделать, то это будет противоречить волновой механике. С этим утверждением я согласен: указав такой способ, мы действительно имели бы противоречие с волновой механикой.

По сути дела, Эйнштейн ставит вопрос еще глубже (он прямо так не говорит, но я его толкую). Возможно, что описание при помощи волновой функции относится только к некоторому классу состояний и что существуют измерения, относящиеся к случаям, которые не охватываются таким описанием. Т. е. возможно, что теория с функцией ψ *не полна и ее можно дополнить так, чтобы не было принципа неопределенности*. Как именно следует дополнить теорию, чтобы не получить при этом противоречий, Эйнштейн не говорит, но он уверен, что дополнить ее можно.

Очевидно, Эйнштейн не знал, что в такой плоскости вопрос уже ставился. А именно, Нейман исследовал, возможно ли «суммарное, общее» описание при помощи ψ-функции так уточнить и пополнить «скрытыми» параметрами, чтобы не было соотношения неопределенности. Нейман доказал, что *нельзя* дополнить волновую механику таким образом, чтобы изжить принцип неопределенности. Конечно, сам Нейман так не говорит, он хорошо знает, что такое физическая теория: сегодня она есть, завтра ее нет. Он говорит, что нельзя отказаться от принципа неопределенности, не отказываясь от основ волновой механики. Когда-нибудь это, может быть, и придется сделать, но существенно, что нельзя выкинуть одно без другого.

Эйнштейн ставил вопрос все же не так глубоко. Ему сразу возразил Бор, и потом Эйнштейн признал свою ошибку.

Эйнштейн говорит следующее: возьмем сравнительно общий случай, когда после взаимодействия получается

$$\Psi(x, y) = \sum_i a_i \psi_i(x) \varphi_i(y).$$

Делая измерение над системой II, уже не взаимодействующей с I, я получаю собственное значение μ оператора S. Это дает мне *точное* значение λ_i для оператора R в системе I. Но эта же функция $\Psi(x, y)$ может быть разложена иначе:

$$\Psi(x, y) = \sum_i b_i \chi_i(x) \theta_i(y), \tag{58}$$

где $\chi_i(x)$ и $\theta_i(y)$ — собственные функции двух других операторов, скажем R' и S'. Может случиться, что ψ_i и χ_i — собственные функции двух некоммутирующих операторов

$$RR' \neq R'R. \tag{59}$$

Значит, делая измерения над системой *II*, один раз для S, другой раз для S', я могу предсказать *точные* значения для двух некоммутирующих операторов в системе *I*, которая моими измерениями прямо не затрагивается. В этом Эйнштейн и усматривает противоречие с основными посылками волновой теории и указание на ее неполноту.

То, что случай (57), (58), (59) возможен, Эйнштейн показывает просто на примере, и его пример есть не что иное, как уже рассмотренный нами микроскоп. Если до измерения частица-дырочка имела определенный импульс p, то на пластинке ($x' = 0$) мы получаем, согласно (50)

$$[\Psi(x', y, z)]_{x'=0} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}[ry+(p-r)z]} ds. \tag{60}$$

В отличие от (50), здесь положено $s = 1$ (нет увеличения) и $k = \infty$ (т. е. аппарат идеальный, измерение точное). Эйнштейн берет частный случай $p = 0$ и, кроме того, отсчитывает z и y не от одной точки, так что z заменяется на $z - z_0$. Последнего мы делать не будем, но p положим равным нулю. Тогда

$$\Psi(y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(ry-rz)} dr. \tag{61}$$

Итак, (61) действительно имеет вид (57): каждый множитель — собственная функция оператора *импульса*. Значит, если мы нашли импульс r для системы *II*, то для системы *I* импульс будет равен $-r$.

Но, согласно (39),

$$\Psi(y, z) = \delta(y - z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - y')\, \delta(y' - y)\, dy', \tag{62}$$

т. е. та же самая функция $\Psi(y, z)$ может быть представлена как сумма произведений собственных функций оператора координаты. Значит, если мы нашли для системы *II* координату y', то она будет y' и у системы *I*. Тем самым доказательство Эйнштейна завершено.

Но в действительности это неверно. В чем же ошибка? Я увидел ошибку очень скоро и потом уже утратил способность ее не видеть.

Теперь мне даже трудно излагать дело так, будто ошибки нет. Сводится же она к следующему.

Электроны, попадающие в определенные точки плоскости изображения, не обладают определенными импульсами, и наоборот, положение электрона, обладающего определенным импульсом, не определено. Пока я ничего не измеряю, я имею $\Psi(y, z)$, где представлены все z и все p. Произведя измерения, я могу из всей совокупности измерений выделить подсовокупность, в которой измерение некоторой определенной величины, характеризующей систему *II*, привело к некоторому определенному результату и в которой система *I* описывается волновой функцией. В этой подсовокупности, если импульс точно измерен, то координата — любая, и наоборот. Суть дела в том, что, выполняя измерения различных величин, относящихся к системе *II*, мы выделяем разные подсовокупности: мы либо фиксируем $\varphi_i(y)$, т. е. импульс системы *II*, либо фиксируем $\theta_i(y)$, т. е. координату системы *II* [1]. В каждой из этих подсовокупностей для системы *I* имеет силу принцип неопределенности. Но одновременные точные значения импульса и координаты в *разных* подсовокупностях вполне допустимы, и никакого противоречия с волновой механикой здесь нет.

Рассматриваемое Эйнштейном состояние систем *I* и *II* описывается волновой функцией $\Psi(y, z)$, но по отношению к каждой из систем в отдельности оно является смесью. Уточнить это описание можно, выделяя подсовокупность, описываемую волновой функцией $\psi(x)$. Эйнштейн ошибся в том, что, говоря «я измеряю», он не указывает, к какой подсовокупности это относится. Таким образом, его упрек направлен не по адресу, а если направить его по адресу, то это не упрек.

Физически неправильно, когда Эйнштейн говорит: «Мы измеряем систему *II*, не затрагивая систему *I*». Спрашивается, откуда система *II* получила свой импульс? От столкновения с системой *I*. Значит, если мы берем только те случаи, когда система *II* обладает некоторым определенным импульсом, то мы берем тем самым лишь определенные удары со стороны системы *I*. Если же у системы *II* определенная координата, то она получила от системы *I* другие удары, или, точнее, удары, полученные ею от системы *I*, не являются определенными. Таким образом, здесь просто неправильно применена теория вероятностей, и никакого повода к пересмотру волновой механики возражение Эйнштейна не дает.

Перейдем теперь к другому вопросу, который в свое время сильно занимал теоретиков, но теперь уже отошел на второй план.

Представим себе полупространство, в котором есть тормозящее поле, или потенциальный барьер, и пусть на него падает по-

[1] [В этом случае в формулах (57) и (58) под координатой x системы *I* нужно понимать z в обозначениях разобранного примера.]

ток электронов. Можно найти Ψ во всем пространстве, и вот оказывается, что, как бы ни был высок барьер, $\Psi \neq 0$ и внутри, и позади него. Значит, электроны могут проникнуть внутрь барьера, где потенциальная энергия может сколь угодно превысить принесенную электронами кинетическую энергию. Это тот же вопрос, которого я уже коснулся ранее применительно к осциллятору. В том, что полная энергия меньше потенциальной, видели парадокс. Я его не вижу. В классике, где $E = V + T$, это, конечно, было бы парадоксом. Но здесь, пока мы не придали всему утверждению физического смысла, пока не сопоставили ему макроскопического измерения (скажем, пятно на пластинке, получаемое посредством «освещения» частицы), пока мы не имеем опыта, вообще нельзя сказать, парадокс это или нет. Во всяком случае, это очень интересное и большое отличие от классики, и наша задача будет теперь состоять в том, чтобы, взяв конкретный аппарат, например микроскоп, посмотреть детально, что физически означает случай $V > E$. Излагаемый ниже анализ этого вопроса провел М. А. Леонтович.

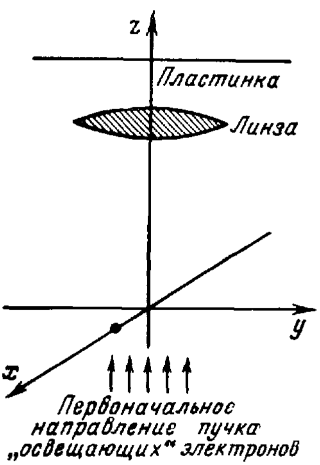

Рис. 6

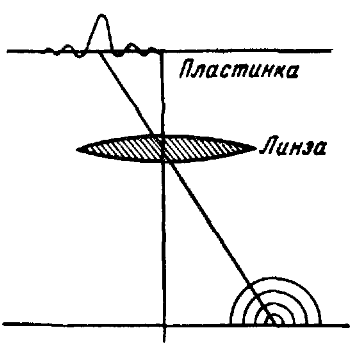

Рис. 7

Для того чтобы рассмотреть случай частицы в силовом поле с большой потенциальной энергией полно и вместе с тем просто, возьмем сильно идеализированное, окарикатуренное устройство. Пусть частица массы M может двигаться только по оси x, а «освещающие» ее электроны — только в плоскости yz (рис. 6). Наша задача состоит в том, чтобы сравнить даваемое электронами изображение частицы при наличии и в отсутствие силового поля, в котором потенциальная энергия частицы V очень велика. До взаимодействия мы имеем

$$\Psi_0(x, y, z) = e^{i(k_x x + k_z z)}, \tag{63}$$

где k_x — импульс частицы, k_z — импульс освещающих электронов.

Пусть массы частицы и электрона одинаковы ($M = m$). Нам надо решить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0, \tag{64}$$

где E — полная энергия совокупности обеих систем (частицы и электрона), а $V \equiv V(x)$ — потенциальная энергия частицы в заданном поле. Это уравнение можно записать так:

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0, \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V). \tag{65}$$

Мы предположим, что в достаточно большой области значений x $V(x)$ постоянно. Строго говоря, мы должны были бы писать $E - V - U$, понимая под U энергию взаимодействия электронов с частицей. Но мы предполагаем, что это взаимодействие проявляется лишь на очень малом расстоянии a между электронами и частицей. Расстояние R между ними, поскольку у электрона $x = 0$, а у частицы $y = z = 0$, есть

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Примем, что при $R = a$ взаимодействие (отталкивание) электрона и частицы бесконечно сильное; это, как известно, сводится к тому, что $\Psi = 0$ при $R = a$. Итак, мы должны решить уравнение (65) при начальной падающей волне (63) и при условии

$$\text{при } R = a \quad \Psi = 0. \tag{66}$$

Это, очевидно, не что иное, как оптическая задача о дифракции плоской волны, падающей на идеально проводящий шар. Если шар очень мал, то решение (рассеянная волна) есть

$$\Psi = A\frac{e^{ikR}}{R}. \tag{67}$$

Такова функция Ψ *до линзы* электронного микроскопа. Мы уже теперь можем сказать, что будет при наличии и в отсутствие V. Если $E > V$ ($k^2 > 0$), то решение отлично от нуля даже на бесконечно больших расстояниях. Если же $V > E$ ($k^2 < 0$), то мы получаем затухающую волну $\frac{e^{-|k|R}}{R}$, которая сойдет на нет еще до линзы, и изображения получить не удастся. Однако доведем задачу до конца.

Наш микроскоп двухмерный, и это несколько меняет дело по сравнению с пространственным случаем, где после линзы каждое пятно получается от элементарной сферической волны, падающей на линзу. В нашем случае рассеянные волны цилиндрические и элементарным решением является функция Ганкеля $H_0^{(1)}(\varkappa r)$, имеющая логарифмическую особенность в нуле и спадающая, как $1/\sqrt{r}$. при больших $\varkappa r$ (r — цилиндрический радиус-вектор). Это значит, что если до линзы мы имеем поле $H_0^{(1)}(\varkappa r)$, то на пластинке получим «пятно», т. е. поле вида (рис. 7)

$$\Delta(\varkappa y) = \frac{\sin \varkappa L y}{\varkappa L y}, \tag{68}$$

где параметр L характеризует нечто вроде ширины линзы, выраженной в длинах волн. Мы получили в пространстве до линзы поле (67). Если разложить это поле по $H_0^{(1)}$, то мы тотчас же сможем указать, какое оно дает изображение на пластинке.

Именно, до линзы рассеянная волна

$$\Psi = A\frac{e^{ikR}}{R} = iA\int_0^\infty H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2-s^2})\cos sx\,ds, \tag{69}$$

причем

$$r = \sqrt{y^2+z^2}. \tag{70}$$

На пластинке каждая волна $H_0^{(1)}$ дает свое Δ, причем при бóльших L Δ выглядит почти как δ-функция. В рассматриваемом сейчас вопросе, по существу, можно отвлечься от конечности размеров линзы и считать ее бесконечно большой. Тогда $L \to \infty$, Δ имеет вид δ-функции, т. е. каждая линия, служащая осью цилиндрической волны $H_0^{(1)}(\varkappa r)$, даст на пластинке также линию. От этой идеализации нам все равно придется отказаться (см. лекцию 5), когда мы будем рассматривать приближенные измерения. Поэтому мы не будем предполагать, что $L \to \infty$, а будем пользоваться формулой (68).

Изображение на пластинке дают лишь незатухающие волны, т. е. только те волны, у которых $\varkappa = \sqrt{k^2 - s^2}$ действительно. Для мнимых $\varkappa$ изображения нет, Δ экспоненциально стремится к нулю. Таким образом, поле (69) дает на пластинке поле (при произвольном L)

$$\Psi = iA\int \Delta(y\sqrt{k^2-s^2})\cos sx\,ds, \tag{71}$$

где интеграл распространен на действительные значения $\sqrt{k^2-s^2}$, т. е. при действительном k от $s = 0$, до $s = k$.

Мы видим, что если $V = 0$, то при всякой энергии $E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_z^2)$ k действительно и в интеграле (71) всегда найдутся члены, для которых корень $\sqrt{k^2 - s^2}$ действителен. Следовательно, в случае $V = 0$ изображение получится всегда.

Если же потенциальная энергия настолько велика, что $k^2 < 0$, то на пластинке

$$\Psi = iA \int \Delta (iy \sqrt{|k|^2 + s^2}) \cos sx \, ds, \qquad (72)$$

т. е. ни при каких s аргумент функции Δ не становится действительным и изображения не получится. Можно ли вообще увидеть частицу с помощью нашего микроскопа, если $V \neq 0$? Очевидно, это становится возможным всякий раз, когда энергия освещающих электронов взята настолько большой, что $E > V(k^2 > 0)$.

Как видите, в результате произведенного анализа оказалось, что никакого парадокса нет. Действительно, бывает, что $\Psi \neq 0$ там, где $V > E$. Но что это значит? Из разобранного примера мы видим, что утверждение о местонахождении частицы в области больших V имеет смысл, если можно осветить частицу электронами со столь большой энергией, что $E > V$. Но тогда нет парадокса с энергией.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(20.V 1939 г.)

Наши общие положения заключались в том, что всякая физическая теория состоит из двух (связанных друг с другом) частей: математической части, оперирующей символами (числами, операторами и т. п.), и измерений — рецептов, связывающих эти символы с объектами природы. Только обе эти стороны, взятые вместе, позволяют давать ответы на физические вопросы.

Под этим углом зрения мы рассмотрели некоторые общие вопросы измерений, а затем перешли к отдельным конкретным задачам. Располагая этим материалом, мы можем подойти теперь и к другим проблемам. В их числе имеется такой фундаментальный вопрос, как толкование соотношения неопределенностей. Многие склонны считать это соотношение тем центральным пунктом, который отличает волновую механику от классики.