Мы видим, что если $V = 0$, то при всякой энергии $E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_z^2)$ k действительно и в интеграле (71) всегда найдутся члены, для которых корень $\sqrt{k^2 - s^2}$ действителен. Следовательно, в случае $V = 0$ изображение получится всегда.

Если же потенциальная энергия настолько велика, что $k^2 < 0$, то на пластинке

$$\Psi = iA \int \Delta(iy\sqrt{|k|^2 + s^2}) \cos sx\, ds, \tag{72}$$

т. е. ни при каких s аргумент функции Δ не становится действительным и изображения не получится. Можно ли вообще увидеть частицу с помощью нашего микроскопа, если $V \neq 0$? Очевидно, это становится возможным всякий раз, когда энергия освещающих электронов взята настолько большой, что $E > V (k^2 > 0)$.

Как видите, в результате произведенного анализа оказалось, что никакого парадокса нет. Действительно, бывает, что $\Psi \neq 0$ там, где $V > E$. Но что это значит? Из разобранного примера мы видим, что утверждение о местонахождении частицы в области больших V имеет смысл, если можно осветить частицу электронами со столь большой энергией, что $E > V$. Но тогда нет парадокса с энергией.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(20.V 1939 г.)

Наши общие положения заключались в том, что всякая физическая теория состоит из двух (связанных друг с другом) частей: математической части, оперирующей символами (числами, операторами и т. п.), и измерений — рецептов, связывающих эти символы с объектами природы. Только обе эти стороны, взятые вместе, позволяют давать ответы на физические вопросы.

Под этим углом зрения мы рассмотрели некоторые общие вопросы измерений, а затем перешли к отдельным конкретным задачам. Располагая этим материалом, мы можем подойти теперь и к другим проблемам. В их числе имеется такой фундаментальный вопрос, как толкование соотношения неопределенностей. Многие склонны считать это соотношение тем центральным пунктом, который отличает волновую механику от классики.

Однако мне представляется нецелесообразным начать теперь дискуссию этого вопроса во всей полноте с тем, чтобы потом где-то ее прервать. Быть может, лучше будет, в порядке подготовки к следующему семестру, коснуться лишь некоторых сторон вопроса, и то не в общем случае, а показать на примере электронного микроскопа, в чем здесь дело и какие здесь встречаются неточные утверждения.

Сначала один общий вопрос — о происхождении соотношения неопределенностей. Мы видели, что самое лучшее и самое большее, что может сделать волновая механика,— это дать, во-первых, функцию ψ, во-вторых, рецепты того, как следует сопрягать получаемые из ψ числовые величины с результатами измерений различных физических величин. Импульсу при этом приписывается оператор $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, и собственные значения этого оператора и являются возможными значениями импульса. *Уже здесь, т. е. в определениях, содержится соотношение неопределенностей. По определению*, неточность в координате Δx берется из естественной меры разброса

$$(\Delta x)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx. \tag{73}$$

Точно так же, по *определению*,

$$(\Delta p)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (p - \bar{p})^2 \, |g(p)|^2 \, dp, \tag{74}$$

где $g(p)$ — коэффициенты разложения ψ по собственным функциям оператора импульса. Отсюда чисто математически вытекает, что [1]

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

Таким образом, можно сказать, что соотношение неопределенностей заключено в математическом аппарате, в математической символике квантовой механики.

С другой стороны, говорят (Дирак ставит это во главу угла), что соотношение неопределенностей обусловливается *возмущением измеряемой системы*, неизбежно испытываемым ею в акте измерения; всякое измерение x дает разброс p_1 и обратно.

Грубо говоря, имеются эти две точки зрения на происхождение соотношения неопределенностей. Ясно, однако, что это не противо-

[1] [См., например, *В. Гейзенберг*. Физические основы квантовой механики; *Д. И. Блохинцев*. Введение в квантовую механику, § 15].

поставление, а две стороны одного и того же. Полная теория необходимо содержит и математический аппарат, и рецептуру измерений. Дирак подчеркивает второе, я здесь — первое.

Могло бы случиться, что в математическом аппарате *заложено* соотношение неопределенностей, в то время как измерения одновременно давали бы точные значения и x, и p. Тогда в теории было бы заключено внутреннее противоречие. Но дело спасают возмущения при измерении: x и p можно было бы одновременно измерять точно, если бы измерительные устройства были таковы, что функция ψ не претерпевала бы изменений. Но этого нет, ибо акт измерения *согласно* теории (или, лучше сказать, теория *так* и была построена) неизбежно изменяет ψ. Значит, указанные две точки зрения не противоречивы, а что считать за исходное, это до известной степени дело вкуса. Можно сказать, что теория сразу же строится так, чтобы она отражала экспериментальные факты. Но можно сказать и так, что я постулирую теорию, а затем смотрю, подходит она или не подходит к природе.

Во всяком случае, вы видите, что уравнение Шрёдингера здесь не при чем, что соотношение неопределенностей возникает еще до уравнения Шрёдингера.

Итак, если я хочу точно измерить x, то, вообще говоря, я должен при этом *совершенно* разрушить $\psi_0(x)$ [1]. Именно так обстоит дело при точных измерениях, о которых мы до сих пор только и говорили. Но нельзя ли пойти на компромисс: ценой не вполне точного знания x исказить $\psi_0(x)$ не до конца, т. е. так, чтобы какие-то основные черты исходного состояния сохранились? Другими словами, как подойти к вопросу об измерениях с допуском, к вопросу о *приближенных* измерениях, стоявшему очень остро и в волновой механике?

В классике приближенное знание величины, как правило,— минус. Всегда желательно знать все величины возможно точнее, и в классике это не встречает принципиальных препятствий. В волновой же механике к этому имеется принципиальное препятствие. Приближенные измерения мы теперь и рассмотрим. Мы ограничимся при этом примером микроскопа — прибора, позволяющего в идеальном случае точно измерять координату.

Разумеется, вопрос об измерениях шире и сложнее, чем то, что мы рассматривали. К счастью, с микроскопом все обстоит хорошо, хотя если начать разговор и об измерении импульса, то появляются некоторые тонкости. Ландау и Пайерлс обратили внимание на то, что представление в x-пространстве совершенно равнозначно представлению в p-пространстве. Символически переход между этими

---

[1] [Если только $\psi_0(x)$ не является δ-функцией от x. См. конец 3-й лекции, стр. 360.]

представлениями можно записать так:

$$\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \to \left(-\frac{\partial}{\partial p}, p\right). \tag{75}$$

Можно спросить, откуда же берется несимметрия x и p в некоторых задачах? Ответ заключается в том, что взаимодействие обычно является функцией от x, а не от p, т. е. природа устроена так, что не всякие гамильтонианы H существуют. Обычно мы берем H из грубой классической модели и переносим его в микромир. Откуда же мы знаем, что в микромире не может быть других H? Заранее это ниоткуда не следует, но принято считать, что других гамильтонианов в микромире не существует.

Возвращаясь к вопросу о приближенных измерениях, необходимо прежде всего отметить, что в этом случае нужно уже иначе строить теорию. При точных измерениях сама функция $\psi(x)$ имела смысл только потому, что существуют измерительные устройства, дающие точное значение x. Теперь речь идет о неточных значениях x. Как же следует изменить микроскоп, чтобы сделать его приближенным измерителем, и чего мы можем достичь таким путем?

Прежде чем заняться этим вопросом, я хотел бы сначала дать критику того, что обычно говорят по поводу микроскопа и что всегда меня шокировало.

Вот обычное рассуждение: если апертура равна φ (рис. 8), то сколь угодно малая диафрагма дает в плоскости изображения кружок, средний размер которого $\lambda/\sin\varphi$. Значит, я не могу определить положение диафрагмы с меньшей ошибкой, чем $\Delta x \sim \lambda/\sin\varphi$. Далее, так как существует комптон-эффект (сохранение импульса при взаимодействии фотона и диафрагмы), то диафрагма может заимствовать от фотона любой импульс в пределах от 0 до $\frac{h\nu}{c}\sin\varphi$, т. е. импульс диафрагмы известен с точностью до $\Delta p \sim \frac{h\nu}{c}\sin\varphi$. Следовательно,

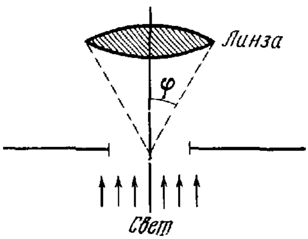

Рис. 8

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim h.$$

Не знаю, может быть, с моей стороны здесь проявляется известный педантизм, но каждое слово в этом рассуждении, по-моему, ошибочно (хотя по существу все так и есть).

Во-первых, ссылаются на то, что разрешающая сила не может быть больше $\lambda/\sin\varphi$, т. е. что мы не можем различить *два* более близких кружка. Но *одна* точечная диафрагма дает *один* кружок. Что же мне мешает точно определить координату его центра? Очевидно, с классической оптикой здесь ничего нельзя получить, надо сразу же говорить об *отдельном фотоне*, а не о *кружке* почернения фотопластинки, получающемся под действием многих фотонов. Место, куда попадает отдельный фотон, действительно не определено однозначно.

Во-вторых, как из того факта, что фотон попал в данную точку, заключают о координате диафрагмы? Почему точку на пластинке, в которую попал фотон, проектируют через центр линзы? Давайте лучше не думать об этом.

Наконец, получают $\Delta x \cdot \Delta p \sim h$. Но существует общая теорема, согласно которой ширина спектра разрывной функции бесконечна [1]. Между тем берут диафрагму с резкими краями (дырочку в экране), а тогда, как легко убедиться и прямым расчетом, $\Delta p = \infty$. Таким образом, в таком неудачном примере мы имеем попросту

$$\Delta x \cdot \Delta p = \infty.$$

Мы оставим теперь в стороне все такие и подобные соображения и, пользуясь оптической математикой (но не физической оптикой), рассмотрим микроскоп с конечным значением отношения $\lambda/\sin\varphi$ строго. Именно этим разбираемая нами сейчас задача отличается от случая $\lambda/\sin\varphi \to 0$, справедливого, когда микроскоп дает точное знание координаты. В остальном все расчеты прежние. Нас интересуют два вопроса: 1) что дает нам такой микроскоп на пластинке и 2) в каком состоянии находится наблюдаемая частица после измерения.

Если мы повторим весь вывод, содержащийся в формулах (36) — (50), взяв для исходного состояния частицы-дырочки не $e^{\frac{i}{\hbar}pz}$, а некоторую функцию $\psi_0(z)$, то, как нетрудно видеть, получим на пластинке (полагая $s = 1$)

$$\Psi(y, z) = c\psi_0(z)\int e^{\frac{i}{\hbar}r(y-z)}dr, \tag{76}$$

где y — координата пятна, оставляемого электроном на пластинке. Можно ввести обозначение

$$\frac{r}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\varphi. \tag{77}$$

Здесь φ не что иное, как угол, образуемый направлением полета

---

[1] [См., например, *С. М. Рытов*. Труды Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР, т. II, вып. 1, 1938, стр. 59 и 121.]

рассеянного электрона с осью микроскопа. Если мы интегрируем по r от $-\infty$ до $+\infty$, то получаем точный микроскоп

$$\Psi(y, z) = c'\psi_0(z)\,\delta(y - z). \qquad (78)$$

Но теперь мы будем интегрировать по r от $-a$ до $+a$, так как линза или какая-то другая диафрагма ограничивает угол[1]. Тогда

$$\Psi(y, z) = c''\psi_0(z)\,\frac{\sin\frac{a}{\hbar}(y-z)}{\frac{a}{\hbar}(y-z)}. \qquad (79)$$

Если теперь рассчитать Δp, то и получается $\Delta p = \infty$.

Разумнее исходить из другого микроскопа (принципиально легко осуществимого), у которого происходит плавное ослабление волн на «краях» диафрагмы, тем большее, чем больше r (или φ). Возьмем фактор ослабления в виде e^{-r^2/k^2}. Тогда мы получим вместо (76) и (79)

$$\Psi(y, z) = c\psi_0(z)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{k^2}} e^{\frac{i}{\hbar} r(y-z)}\,dr = c'''\psi_0(z)\,e^{-\frac{k^2}{4\hbar^2}(y-z)^2}. \qquad (80)$$

В этом наиболее выгодном случае получается $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$.

В частности, если мы заведомо знаем, что частица находилась в z', т. е. $\psi_0(z) = \delta(z - z')$, то

$$\Psi(y, z) = c\delta(z - z')\,e^{-\frac{k^2}{4\hbar^2}(y-z)^2}. \qquad (81)$$

Вероятность того, что электрон попал на пластинку в точку $y = y'$, будет тогда $|f(y', z')|^2$, где $f(y, z) = e^{-\frac{k^2}{4\hbar^2}(y-z)^2}$.

Поставим теперь вопрос иначе. Рассмотрим те случаи, в которых координата пятна, оставляемого электроном на пластинке, имела некоторое фиксированное значение y. Какую координату z имела при этом частица-щель? Однозначного ответа нет. Однозначный ответ получается только при $k \to \infty$, когда (80) переходит в

[1] Выражая с помощью (77) r через φ и полагая, что $\frac{\lambda a}{2\pi\hbar} \ll 1$, можно сказать, что в случае микроскопа с отверстием диафрагмы конечных размеров мы интегрируем по углу φ полета рассеянного электрона от $\varphi = -\frac{\lambda a}{2\pi\hbar}$ до $\varphi = +\frac{\lambda a}{2\pi\hbar}$.

(78), т. е. когда координата частицы z заведомо равна координате пятна y.

Мы можем, однако, определить, какова вероятность того, что $z = z'$, если известно, что $y = y'$. Итак, сначала мы предполагали известным $\psi_0(z)$; тогда вероятность события $z = z'$ есть $|\psi_0(z')|^2$. Вероятность же того, что при $z=z'$ получается $y=y'$, есть $|f(y',z')|^2$. Но сейчас наша цель состоит в том, чтобы получить хотя бы некоторое приближенное знание о координате z частицы по результатам измерений с помощью неточного микроскопа (т. е. микроскопа с конечной апертурой). Поэтому сейчас мы спрашиваем: какова вероятность того, что $z = z'$, если я обнаружил $y = y'$? Это типичная задача Байеса о вероятности a posteriori [1].

Имеются урны A_i, и вероятность попасть на урну A_i есть $W(A_i)$. В урнах лежат шары разных цветов, и вероятность того, что, попав в урну A_i, я вытащил белый шар, есть $W(a, A_i)$. Спрашивается, если я вынул белый шар, то какова вероятность того, что это была урна A_i? Обозначим искомую вероятность через $W(A_i, a)$. Тогда, как известно,

$$W(A_i, a) = W(A_i)\frac{W(a, A_i)}{\sum\limits_j W(A_j)W(a, A_j)}. \qquad (82)$$

Замечу, что Мизес в своей книжке [2] резко восстает против такой терминологии (вероятности a posteriori или вероятности гипотез, причин), называя ее метафизической и указывая, что здесь мы имеем просто специальный выбор подсовокупности. Это верно, но результата (82) не меняет.

В нашем случае $W(A_i)$ — это $|\psi_0(z')|^2$, а $W(a, A_i)$ — это $|f(y', z')|^2$. Таким образом, вероятность нахождения частицы в $z = z'$, когда в изображении $y = y'$, есть

$$W(z') = \frac{|\psi_0(z')|^2\cdot|f(y', z')|^2}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi_0(z')|^2\cdot|f(y', z')|^2 dz'}. \qquad (83)$$

В предельном случае точного микроскопа, когда $k \to \infty$, $f(y, z) = \delta(y - z)$, и мы получаем из (83), что $W(z')$ пропорционально $\delta(y' - z')$, т. е. в точном случае мне не нужно знать $\psi_0(z)$. В приближенном же случае знать $\psi_0(z)$ нужно. Это и понятно: если одно только $W(a, A_5)$ отлично от нуля (а это как раз и соот-

---

[1] [См., например, *С. Н. Бернштейн.* Теория вероятностей. Изд. 4-е, ОГИЗ, 1946, стр. 76.]

[2] [По-видимому, имеется в виду *R. v. Mises.* Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Springer, 1928, стр. 95.]

ветствует случаю $f = \delta(y - z)$, все же остальные $W(a, A_i)$ равны нулю, то, какой бы шар мы ни вынули, он будет из пятой урны. Или вообще если в A_1 только красные шары, в A_2 — только зеленые и т. д., то знание цвета однозначно определяет урну.

Что касается состояния частицы после измерения, то ведь с этого мы и начали: до измерения была $\psi_0(z)$, после измерения, т. е. при известном $y = y'$,

$$\Psi(y', z) = c\psi_0(z) f(y', z). \tag{84}$$

Если $f(y', z)$ — очень острая δ-образная функция (т. е. микроскоп хороший, k или a велики), то состояние коренным образом меняется. Если же $f(y', z)$ — расплывчатая функция от z, такая, что в пределах тех значений z, в которых сосредоточены отличные от нуля значения $\psi_0(z)$, $f(y', z)$ почти неизменна, то $\Psi(y', z)$ подобна $\psi_0(z)$, состояние измеряемой системы меняется мало. Конечно, лишь в таком специальном случае $\Psi(y', z)$ просто пропорциональна $\psi_0(z)$. Он имеет место благодаря коммутации энергии взаимодействия с z и y, но существа дела это не меняет. Сводится же оно к тому, что, выбирая аппарат, делая его более или менее точным, мы можем либо точно измерять z и тогда совершенно расстраиваем систему, либо же можем сохранить основные черты состояния системы и тогда не точно знаем z. Этим мы можем *управлять* по желанию, по своей надобности. Таким образом, приближенный характер результата измерений, в отличие от классики, здесь не является минусом.

Последнее замечание: что я сделал, чтобы перейти от точных измерений к приближенным? Я прикрыл диафрагму микроскопа, *не влияя* на акт соударения электрона с частицей. Как же получилась другая волновая функция? Ответ всегда надо искать в том, чтó же именно хотят сказать. Сплошь и рядом недоумение порождается просто неточными выражениями. Да, соударения мы не изменили, но мы *выбрали другую подсовокупность опытов*, мы выбрали только те из рассеянных электронов, которые летят внутри определенного угла; поэтому нет ничего удивительного в том, что и функция Ψ стала иная.

Мы разобрали некоторые принципиальные вопросы, относящиеся к квантовомеханическим измерениям, выяснили сущность таких измерений и потом на примерах видели, как эти принципы применяются к той или иной конкретной задаче.

Я хочу, однако, подчеркнуть в согласии с тем, что я сказал уже во вступлении, что этими рассуждениями далеко не исчерпываются все вопросы, относящиеся к измерениям.

Укажу, например, на следующее. Мы предполагали, что измерительное устройство таково, что если наша измеряющая система находится в собственном состоянии, описываемом функцией $\psi_i(x)$ с собственным значением λ_i, то после взаимодействия $\Psi(x, y) = u_i(x)\varphi_i(y)$, т. е. что есть однозначное соответствие между λ_i и μ_i. Я уже тогда упомянул, что это не необходимо, что достаточно однозначного соответствия, при котором одному λ соответствует несколько μ, но так, что каждому μ соответствует только одно λ.

Более существенный вопрос — это вопрос о времени. В нашей постановке вопроса время играло второстепенную роль. Другими словами, мы не учитывали, например, продолжительности измерений. Есть класс явлений, где такое рассмотрение законно. Но какую роль время играет при измерениях? Этот глубокий и интересный вопрос оказывается неизбежно связанным с вопросом об энергии, о принципе сохранения энергии. Соблюдается ли закон сохранения энергии в каждом отдельном акте взаимодействия? Шенкланд думал, что наблюдал нарушения этого закона [1]. Надо сказать, что в своей классической форме закон сохранения в волновой механике неприменим. Просто понятия в классике такие, которых здесь нет. Все же правильная теория предсказывает, что если пользоваться обычными формулировками, то в опытах Шенкланда должно быть сохранение энергии в каждом отдельном акте. Таким образом, *если бы* он был прав, то это было бы опровержением волновой механики. Но он оказался неправ.

Другой вопрос — о связи или переходе от волновой механики к классической. Обычно указывают на теорему Эренфеста, но я думаю, что это не единственный путь. Ведь в классике есть не только детерминистическая ньютонова механика, к которой ведет теорема Эренфеста, но и статистическая теория. Как связаны микро- и макростатистики — это особый вопрос.

В этом семестре на всех подобных вопросах останавливаться я не могу.

[1] [Имеются в виду впоследствии опровергнутые эксперименты, в которых якобы было доказано, что в отдельных актах взаимодействия фотонов с электронами законы сохранения энергии и импульса не соблюдаются, но что они верны в среднем для большого числа актов.]