закон, который лег в основу ньютоновского закона всемирного тяготения. Галилей наблюдает в Пизанском соборе качания паникадил и открывает изопериодичность малых колебаний. Он заложил учение о колебаниях маятника и сам кладет этот периодический процесс в основу измерения времени. Следует помнить, что часов ведь тогда не было, тогда не умели точно измерять время. Уже через два года после этих наблюдений Галилея Гюйгенс начал приспосабливать маятник к часам. Точные часы были необходимы для мореплавания, для определения долгот. В 1714 г. английское Адмиралтейство объявило премию в 20 тыс. фунтов стерлингов тому, кто построит хронометр с неточностью хода не более 3 секунд в сутки. Только через 45 лет Гаррисон построил такой хронометр (деньги ему, конечно, выдали не сразу, а еще через 10 лет). Важность этого дела нельзя преуменьшить: точные хронометры — это развитие мореплавания. Конечно, теперь их заменяет радио, но тогда это был жизненно важный вопрос.

Маятник сыграл большую роль и в создании общей теории относительности. Альфа и омега этой теории — равенство инертной и весомой масс. Это равенство впервые было установлено Ньютоном путем опытов с маятниками. С их помощью была исследована форма Земли. Измерения Рише (1672 г.), проведенные в Кайене и в Париже, показали, что для синхронности колебаний длина маятников должна отличаться в этих местах на 2,5 *мм*.

Еще бо́льшую роль сыграло учение о сложном маятнике, вопрос о нахождении центра качаний. На задаче о маятнике, как простом, так и особенно сложном, на задаче об определении периода такого маятника (вероятно, это одна из самых важных проблем в XVII и XVIII вв.) развился, по существу, вопрос о законе «живых сил» (Гюйгенс) и о сохранении энергии.

ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(28.III 1944 г.)

Прошлый раз я кратко и в общих чертах дал обозрение громадного материала, охватываемого теорией колебаний, а с другой стороны, тоже кратко начал исторический обзор того, какие этапы развития физики связаны с теорией колебаний. Сегодня я продолжу этот обзор.

Я указал, что Коперник вскрыл периодичность в обращении планет. Галилей и Гюйгенс изучали маятник. В этой проблеме по существу впервые возник вопрос о сохранении энергии. Но в это же примерно время изучались и другие, я сказал бы, более скромные (с общей точки зрения) вопросы. В 1636 г. Мерсен формулировал все законы колебания струн, хотя и в непривычной для нас теперь форме. Он установил четыре положения: при одинаковых весах натягивающего груза числа колебаний (высоты тонов) относятся обратно длинам струн и т. д. По существу, он установил все, что содержится в формуле

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

которую известный математик Тэйлор дал только в 1713 г. Эта формула сыграла большую роль.

Ньютон изучал распространение звука, т. е. периодических сгущений и разрежений воздуха, и открыл основной закон этого явления, чем было положено основание всему учению о распространении колебательных процессов в среде. Он получил формулу для скорости распространения

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

но принял изотермический закон $p = c\rho$ вместо адиабатического $p = c\rho^{\gamma}$, что в дальнейшем сделал Лаплас.

Именно Ньютон, а не Гюйгенс — это недостаточно известно — первый делает замечательное открытие, что в основе монохроматического света лежит *периодический* процесс. На это открытие опирается, по существу, дальнейшее развитие всей оптики.

Надо было объяснить открытые самим Ньютоном кольца. Ньютон сказал, что они возможны только потому, что в монохроматическом свете имеется периодичность, и определил период — длину волны λ. Вместе с тем он считал, что свет — это поток частиц, и вот тут он и выдвинул свою знаменитую гипотезу «приступов» — периодических «припадков» у световых частиц легкого прохождения и легкого отражения. На этой основе, видимо, было трудно провести последовательную теорию, однако самое открытие периодичности принадлежит Ньютону.

Следующий этап связан с именами Юнга и Френеля. Ньютон умер в 1727 г., но авторитет его был так велик, что эмиссионная теория держалась почти сто лет. В 1801 г. в своем бакерианском чтении Юнг сказал: свет — это колебания очень тонкой среды — эфира, заполняющего всю Вселенную. Колебательное движение возбуждается в этом эфире всякий раз, когда тело начинает светиться. Говоря, что свет — это колебания, он примкнул к Ньютону, вводя эфир, он примкнул к Гюйгенсу. Частота колебаний, по

Юнгу, определяет цвет света. Он дал принцип известного объяснения интерференции и заложил основы волновой оптики, однако признана она была далеко не сразу. Господствовавшие в то время умы'— Лаплас, Пуассон, Био — не хотели верить этой теории и решили ее убить, поставив конкурсную тему — объяснение дифракции света. У Ньютона дифракция объяснялась просто — протяжением частиц к краю экрана.

Ответом на это был мемуар Френеля, представленный в 1819 г., в котором он не только объяснил, но и количественно рассчитал дифракцию. Это была не смерть, а победа волновой теории.

Френель объяснял все явления, пользуясь зонами. На заседании комиссии Пуассон возразил, что, по Френелю, в центре тени круглого экрана должно получаться светлое пятно. Непосредственно после заседания Араго показал на опыте, что это так и есть. С тех пор волновая теория окончательно восторжествовала. В 1850 г. Физо непосредственно измерил скорость света и, как думали тогда, доказал волновую теорию. Таким образом, колебания и волны завоевали громадную область физики — оптику.

Однако и после Френеля было еще немало трудностей и противоречий в вопросе о свойствах упругого эфира. В силу поперечности световых колебаний он должен был обладать свойствами твердого тела. С другой стороны, он не оказывает никакого сопротивления движениям планет. В другой форме эти противоречия занимали уже Ньютона. Их преодоление пришло из совсем другого круга идей, связанного с именами Фарадея и Максвелла.

19 октября 1861 г. Максвелл пишет свое знаменитое письмо Фарадею об электромагнитной теории света, которая и устранила все трудности механических теорий. С Максвеллом было обратное тому, что рассказывает легенда о Ньютоне. Ньютон будто бы 20 лет держал в секрете закон тяготения, так как значения ускорения для Луны и для падающего камня не сходились; он ждал, пока не будет более точно измерен радиус Земли. Максвелл сразу же заключил и высказал, что свет есть электромагнитные волны, опираясь на следующее поразительное совпадение. В его теории есть величина c — отношение электростатической единицы заряда к электромагнитной, равная 193,088 *миль/сек.* С такой скоростью, по теории Максвелла, должны распространяться электромагнитные волны. По прямым измерениям Физо, цитирует Максвелл, скорость света равна 193,188 *миль/сек* (1 *миля* = 1,6 *км*). Любопытно то, что оба эти числа неверны на 6000 *миль*, но случайно ошибки в обоих в одну сторону! В последующей публикации Максвелл дает уже другие числа, хуже совпадающие. К счастью, однако, это расхождение не разочаровало Максвелла.

Фарадей и Максвелл создали эпоху в физике. Но на чем укрепилась их теория? Опять-таки на колебаниях. Для развития фарадей-максвелловских представлений об электрических и магнитных явлениях, для создания электромагнитной теории света решающее значение имело теоретическое изучение колебательных периодических процессов самим Максвеллом и осуществление электромагнитных колебаний Герцем. Основные опыты были сделаны Герцем в 1886 г. Герц написал о своих опытах письмо Гельмгольцу. Ответ был краток: «Манускрипт получил. Браво!» Эта оценка кое-что означала.

Любопытно, что в дневнике Герца имеются (в двух местах) упоминания о распространении волн в трубах. Так, например, 17 мая 1888 г. он пишет: «Начал работать по вопросу о распространении в металлических трубах».

После первых увлечений максвелловской теорией начались неполадки: надо было объяснить дисперсию. Теория Максвелла не могла этого сделать. Она занималась распространением электромагнитных волн, но не рассматривала их источник. Здесь на сцену появляется Лоренц.

Лоренц предположил, что источником света является упруго связанный электрон, т. е. электрон-осциллятор, сидящий в атоме и обладающий собственной частотой. Таким образом, колебания были внесены в атом и это позволило объяснить дисперсию.

Сейчас мы стоим на квантовой точке зрения, но те же колебательные явления, как мне кажется, заставили бросить все старое и перейти к квантам. Спектральные серии не удавалось объяснить классически. При тепловом равновесии каждая степень свободы имеет определенную энергию. Спектральная серия содержит бесконечно много линий, каждая линия — от своего осциллятора, а следовательно, из-за огромного числа степеней свободы должна быть колоссальная теплоемкость. Опыт не давал ничего подобного. Эти соображения, вносящие ясность в вопрос, высказал Релей. Он почерпнул их из серий и equipartition [закона равномерного распределения энергии по степеням свободы], т. е. опять-таки из колебательных вещей. Кельвин хотел показать, что equipartition — неверный закон, и придумывал для этого разные примеры. Релей показывал, что неверны примеры и что так просто не отделаешься, а нужен радикальный пересмотр всего. Однако теорию квантов он встретил без энтузиазма. В октябре 1911 г. он писал: «Но я признаюсь, мне не нравится это решение загадки. Конечно, я не могу ничего возразить против того, чтобы проследили следствия теории квантов энергии, которая уже дала в руках способных людей ряд интересных результатов. Но я затрудняюсь принять это в качестве картины того, что происходит в действительности».

И в разрушении классических представлений, и в создании волновой механики колебания играли основную роль. Каждое из названных открытий, относящихся именно к периодическим явлениям, как ни различны они сами по себе, составило эпоху в развитии физики. Недаром вопросы колебаний имеют такое большое значение. Каждый успех в этой области, несомненно, имеет гораздо более широкое значение, чем те специальные вопросы, на которых он был достигнут, и не удивительно, что теория колебаний выделена теперь в самостоятельную дисциплину.

Я хотел бы отметить еще одну черту теории колебаний. В ней мы имеем, пожалуй, наиболее сильное взаимодействие с математикой. До последних 30—40 лет весь аппарат был *линейным*, соответственно и колебания были *линейные* колебания. Дифференциальные уравнения в частных производных и краевые задачи, интегральные уравнения, разложение произвольных функций в ряды по ортогональным функциям и, в частности, ряды Фурье, — в развитии всех этих математических средств физические запросы играли не последнюю роль. Но только благодаря развитию этих математических дисциплин сделалось возможным углубленное понимание основных физических колебательных процессов.

Однако огромное количество явлений принципиально не может быть хорошо рассмотрено с помощью линейных уравнений. Вопросы радио, музыкальные инструменты (кроме ударных и щипковых), автоматика и регулирующие механизмы, сосуществование видов в биологии, вопросы трения (например, колебания, возникающие при сухом трении, давшие повод Боудену и Лебену в 1939 г. утверждать, что само трение имеет скачкообразный характер, хотя еще раньше С. Э. Хайкин показал, что дело вовсе не в этом), динамика полета, поведение цефеид — все это вопросы, не поддающиеся линейной трактовке.

Нелинейный математический аппарат был известен ранее. Он был создан Пуанкаре и Ляпуновым, но для других задач. Исследования Ляпунова вообще были математическими. В конце своего труда он писал, что он должен был бы привести примеры, но действительных примеров нет, а он не хочет искусственно их создавать. Таким образом, математика предвосхитила здесь потребности теории колебаний. В настоящее время несомненно, что задача и физиков, и математиков состоит в том, чтобы разрабатывать нелинейные методы дальше.

На этом я закончу исторический обзор.

Как я уже говорил, я хотел бы взять лишь несколько основных вопросов и на них показать, в чем заключаются трудности, в чем состоит центральный пункт вопроса и как результаты его решения применяются в разных областях. Углубляться, делать все выводы я, конечно, не могу.

Я сказал, кроме того, что точное определение той или иной дисциплины — очень трудное и нецелесообразное дело. Примером может служить разграничение физики и химии, попытки поставить между ними колючую проволоку. Важно другое, важны руководящие точки зрения, объединяющие ряд проблем, позволяющие создать цельную стройную концепцию, связать в одно целое разнородные явления и отсюда получить нить для дальнейших исследований. Указание и выяснение таких точек зрения — это хорошее дело. Но можно ли их найти в теории колебаний? Да, можно.

Чтобы понять колебательные процессы, надо знать полностью их протекание во времени. В этом их отличительная черта. Если я хочу узнать работу, производимую быстро движущимся телом, то я не интересуюсь историей процесса. Мне достаточно знать скорость тела в данный момент, и я тогда вычисляю $A = \frac{mv^2}{2}$. В колебательных процессах так делать нельзя. Если нас интересует действие силы на резонатор, то надо знать *всю форму* колебания силы. Два колебательных процесса могут различаться по своей форме лишь в узком интервале времени, и все же это уже *разные* процессы.

Периодические процессы заданы тем, что

$$f(t + T) = f(t)$$

для *всех* t; T — период. Это определение имеет смысл, только если оно выполняется для любого t от $-\infty$ до $+\infty$. Существует ряд типичных, наиболее удобных, *стандартных* форм периодических процессов. Среди них очень важная синусоидальная форма

$$y = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Все равно, что̀ такое y. Важна сама форма (простое, гармоническое, монохроматическое колебание). Для выкладок иногда удобнее комплексная форма

$$y = Ae^{i\omega t},$$

где A — комплексная величина. При этом подразумевается, что потом, т. е. в результатах, мы перейдем к действительной части.

Почему это одна из важных стандартных функций? Сразу ответить на это трудно, но мало-помалу мы в этом убедимся. Прежде всего можно указать на то, что в природе очень много явлений, протекающих по этому закону,— колебания маятника без затухания, простой тон, монохроматический свет, правильная зыбь на поверхности воды, колебания в радиопередатчике. Второе обстоятельство, на которое следует указать, состоит в том, что функции, описывающие процессы иной формы, можно представить рядом или интегралом Фурье, т. е. разложить их на синусообразные составляющие. Но тут мы и наталкиваемся на вопрос, на который обычно мало обращают внимания, а из этого проистекает ряд плохих последствий.

Я сказал, что синусоида важна нам потому, что она часто встречается в действительности. Но ведь синусоида определена тем, что A, ω и φ постоянны во все времена t, т. е. от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, маятник колеблется по синусоиде *только* в том случае, если он колеблется по указанному закону от $-\infty$ до $+\infty$. То же относится и к простому тону, и к монохроматическому свету, и т. д. Ясно, что в природе таких явлений нет, всегда есть начало и конец колебания, т.е. синусоида *никогда* не встречается. Более того, часто самое применение колебаний требует изменения A, ω или φ; так обстоит дело при измерении скорости света, так обстоит дело в музыке, при телеграфировании и т. д. Вместо синусоиды мы имеем тогда отображающую функцию вида $A(t) \cos(\omega t + \varphi)$ или же функцию, в которой ω или φ зависят от t. Но говорить о синусоиде с переменной амплитудой (частотой, фазой) — это значит вступать в противоречие с определением. Ведь синусоида определена *однозначно* только при условии постоянства A, ω и φ при *всяком* t от $-\infty$ до $+\infty$.

Спрашивается, что же делать: мы всегда и успешно пользуемся синусоидой, а в природе ее никогда нет? Это серьезный вопрос, и подойти к нему надо также серьезно. Его можно формулировать так: при каких условиях, несмотря на то, что синусоидальных процессов в природе не бывает, можно с достаточной точностью пользоваться косинусом и синусом?

Можно, конечно, сказать, что при *достаточно медленном* изменении A, ω или φ, как это имеет место, например, в тех случаях, когда они меняются «по долгу службы» (пение, радиотелефония), я могу решать вопросы так, как если бы они были постоянны. Но тогда тотчас же возникает другой вопрос: что значит «достаточно медленно»? A priori почти никогда нельзя сказать, достаточно ли медленно меняются A, ω, φ, и это *типично* для колебательных процессов. Необходимо знать, *на что это колебание действует*: при одной и той же $A(t)$ для одного приемника изменение может оказаться достаточно медленным, для другого — нет.

Вместе с тем *благодаря* изменению A, ω, φ возникают *новые* вопросы, например вопрос о *распространении* таких колебаний, о соответствующих волнах, акустических и ультраакустических, оптических, радио, волнах на поверхности воды, волнах в каналах, упругих волнах (например, землетрясения) и т. д.

Начнем с простого и конкретного вопроса. Мы нарочно накладываем на волну какой-то признак, скажем меняем амплитуду для того, чтобы дать сигнал. Мы имеем, таким образом, синусоиду с медленно меняющейся амплитудой, и вопрос заключается в том, как будет распространяться этот сигнал или *группа* волн (такую волну называют группой). Ведь нам известно только, как распространяется синусообразная волна.

Но здесь приходит на помощь то обстоятельство, что главные типы волн подчиняются *линейным*, *однородным* дифференциальным уравнениям с *постоянными* коэффициентами. Благодаря этому, как мы увидим далее, синусообразные волны и оказываются особо выделенными.

Рассмотрим конкретные примеры, ограничиваясь одномерным случаем. Однородная «мягкая» струна при постоянном натяжении. Ее поперечное отклонение подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Поперечные (изгибные) колебания тонкого «жесткого» стержня описываются таким уравнением:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Оптические (электромагнитные) колебания в однородной среде — поляризованная волна. Пусть E и H — электрический и магнитный векторы, а s — среднее отклонение электрона. Тогда уравнения, которым подчиняются эти величины, будут

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \qquad \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E}{\partial t} + Ne\dot{s}\right) = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$m\ddot{s} + fs = eE,$$

где e и m — заряд и масса электрона, N — число электронов в 1 *см*^{3}, fs — квазиупругая сила, возвращающая колеблющийся электрон в положение равновесия.

Во всех трех случаях мы имеем уравнения с постоянными коэффициентами. Такие уравнения обладают замечательным свойством: для каждой из величин они имеют частное решение вида

$$y = e^{i(kx - \omega t)},$$

где ω и k — постоянные, но не любые, а связанные между собой, так что $\omega = \varphi(k)$, причем $\varphi(k)$ определяется видом уравнения. Подставьте это частное решение, и получатся алгебраические уравнения, определяющие связь между ω и k.

Существенно еще одно обстоятельство: сумма частных решений благодаря линейности уравнений также есть частное решение. Это *принцип суперпозиции*, играющий чрезвычайно важную роль в теории колебаний, хотя почти всегда его применяют неправильно (но об этом речь пойдет дальше).

К сожалению, есть много случаев в физике, где дело обстоит не так просто. Например, волны при больших отклонениях от положения равновесия описываются *нелинейными* уравнениями, волны в неоднородной среде — уравнениями с *непостоянными* коэффициентами и т. п. К таким случаям наша теория не относится.

Пусть при $t = 0$ задано начальное распределение $y = e^{ikx}$. Тогда при любом t получим $y = e^{i(kx-\omega t)}$, т. е. волну, распространяющуюся со скоростью

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Это ясно. Легко показать, что в отсутствие поглощения, т. е. при незатухающих волнах, если $\omega = \varphi(k)$ удовлетворяет нашим уравнениям, то $-\omega$ тоже удовлетворяет. Мы получаем, другими словами, на выбор два направления распространения вдоль оси x [причем то или иное из них определяется заданием при $t = 0$ не только y, но и $\dot{y}$]. Ограничимся далее одним направлением — в сторону возрастания x.

Нас интересует, однако, другой вопрос: как будет распространяться волна, заданная при $t = 0$ распределением y:

$$y = f(x)\, e^{ik_0x}?$$

Прежде всего заметим, что *всегда*, *во всех* вопросах распространения мы сталкиваемся именно с *этой* задачей, ибо никогда $f(x)$ не бывает константой. Правда, $f(x)$ обычно меняется медленно, гораздо медленнее, чем e^{ik_0x}, но все же это не постоянная величина.

До Стокса говорили так: $f(x)$ — почти постоянна, а значит, волна будет распространяться так, как будто $f(x)$ — постоянная величина

$$y = f(x)\, e^{i(k_0x-\omega_0t)},$$

т. е. скорость распространения такая же, как у синусоидальной волны

$$v = \frac{\omega_0}{k_0}.$$

Но это как раз и неверно. В среде с дисперсией, *как бы медленно ни изменялась* $f(x)$, волна так не распространяется, и впервые на это указал Стокс.

Наши основные уравнения имеют частное решение в виде бесконечной синусоидальной волны. Как распространяется синусоидальная волна, мы знаем. На наше счастье, существует теорема Фурье, и поэтому мы можем решить задачу так: представим $f(x)$

в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dx,$$

где

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Тогда начальное отклонение можно записать в виде

$$y(x, 0) = e^{ik_0x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(k+k_0)x} dk.$$

Каждый элемент интеграла $g(k)\, e^{i(k+k_0)x}\, dk$ представляет синусоидальную волну, протяженную по x от $-\infty$ до $+\infty$, волну с *постоянной* амплитудой. Мы имеем непрерывный набор таких синусоидальных функций, и к каждой из них уже может быть применена наша теория.

Таким образом, при $t > 0$ мы получим

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i[(k+k_0)x - \omega t]} dk, \qquad (1)$$

где ω является определенной функцией от $k + k_0$.

Я нарочно сделал все подробно, потому что часто эти выкладки обходят и говорят о них лишь на словах. В следующий раз мы продискутируем эту формулу, из которой без дальнейшего следует все учение о групповой скорости.

Замечу только, что теперь уже не представляет труда дать определение того, что значит, что $f(x)$ медленно изменяется. Это значит, что $g(k) \neq 0$ лишь при малых значениях k, т. е. в разложении $f(x)$ будут играть роль только значения $k \ll k_0$. Малость этих значений k по сравнению с k_0 и дает меру медленности $f(x)$. Если условие $k \ll k_0$ выполнено, то вся дискуссия может быть доведена до конца.