ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(1.XI 1932 г.)

Задачи теории дифракции. Метод их решений по Кирхгофу и границы его применимости. Когда имеет смысл говорить о потоке энергии через незамкнутую поверхность?

Сегодня мы будем заниматься вопросами дифракции, играющими большую роль в оптике и имеющими большое значение в акустике и в волновой механике.

Задача теории дифракции может быть формулирована приблизительно так. Имеется экран с отверстием, на него падает волна, требуется найти поле за экраном. Общие рецепты для решения таких дифракционных задач были даны еще Гюйгенсом и Френелем. Первый серьезный аппарат для решения этих задач был дан Кирхгофом, который получил соответствующие соотношения, исходя из волнового уравнения. В этом смысле Кирхгоф первый сделал попытку вывести принципы Гюйгенса и Френеля, позволяющие решать задачи дифракции из теории света.

Волновое уравнение

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

для монохроматического света $\varphi \sim e^{i\omega t}$ приобретает вид

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0 \tag{2}$$

$\left(k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right.$ — «циклическое» волновое число). Пользуясь теоремой Грина, можно показать, что значение решения φ волнового уравнения в некоторой точке P определяется через значения φ самого этого решения и его производной $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ по внешней нормали на замкнутой поверхности S, охватывающей область пространства, в которой находится точка P, и дается формулой

$$4\pi\varphi_P = \int\left\{\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{e^{-ikR}}{R}\right\}dS. \tag{3}$$

Здесь R — расстояние точки P от элемента dS. Эту формулу Кирхгоф и применяет для решения задач дифракции, при этом он поступает следующим образом.

Формула Кирхгофа позволяет найти значение φ, если даны значения φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на замкнутой поверхности, например на замкнутом экране с отверстием. Практически же наиболее интересен случай плоского бесконечного экрана. Можно этот случай свести к замкнутой поверхности, если замкнуть пространство за экраном с помощью бесконечно большой полусферы. Обыкновенно формулу (3) применяют к этому случаю, распространяя интеграл только по поверхности плоского экрана, между тем как он должен быть еще распространен по бесконечно большой полусфере. Обычно это не приводит к неправильному результату, так как интеграл по поверхности бесконечно большой полусферы, замыкающей экран, для большинства задач (хотя и не для всех) равен нулю. Примером, когда это не так, может служить случай, когда на экран падает волна не только слева, но и справа. Однако если считать, что волны на экран падают только с одной стороны, и искать решение, для которого за экраном есть только расходящаяся от него волна, то интеграл по бесконечной полусфере равен нулю. Только при этом необходимом дополнительном физическом требовании о *расходящихся* волнах получается единственное решение. Если этого требования не ставить, то можно получить много математически правильных решений, соответствующих разным физическим задачам.

Для доказательства исчезновения интеграла по поверхности бесконечно большой полусферы при условии расходящейся волны нужно учесть, что общий вид расходящейся волны такой:

$$\varphi = f(\theta, \psi)\,\frac{e^{-ikR}}{R}. \tag{4}$$

Если два решения φ_1 и φ_2 имеют этот вид при $R \to \infty$

$$\varphi_1 = f_1\frac{e^{-ikR}}{R}, \qquad \varphi_2 = f_2\frac{e^{-ikR}}{R},$$

то интеграл $\int\left\{\varphi_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varphi_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right\}dS$, взятый по поверхности бесконечно большой полусферы, равен нулю. Этим и доказывается, что интеграл можно распространять в этом случае только по плоскости экрана.

Чтобы применить формулу (3), нужно знать φ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ на поверхности экрана и отверстия. Строго говоря, чтобы их знать, нужно уже знать решение задачи. Кирхгоф обходит эту трудность. Он дает рецепт, указывающий, как задавать φ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ на поверхности. Он говорит: для точек внутри отверстия возьмите те значения φ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$, которые они имели в этом месте при той же падающей волне в отсутствие экрана, а вне отверстия, на экране, положите их равными нулю. Например, для плоского экрана (расположенного в плоскости $z=0$), на который нормально падает плоская волна $e^{i(\omega t-kz)}$, значения на отверстии надо брать равными

$$\varphi = e^{i\omega t}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -ike^{i\omega t}. \qquad (4')$$

Если принять этот рецепт Кирхгофа, то решение задачи сводится к простому интегрированию по формуле (3). Это предположение, таким образом, дает возможность практически решить задачу, но, с другой стороны, оно влечет за собой целый ряд принципиальных трудностей.

Рассмотрим более подробно задачу о дифракции на одном отверстии в экране. Решение Кирхгофа относится к скалярной величине φ, но ведь в оптике световое поле определяется электрическим (**E**) и магнитным (**H**) векторами. Таким образом, для решения оптических задач, в сущности, *нужно найти формулу*, аналогичную формуле (3), но не для скаляра, удовлетворяющего волновому уравнению (2), а для векторов **E** и **H**, удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Конечно, каждая из компонент **E** и **H** удовлетворяет волновому уравнению. Однако если просто применить формулу (3) к каждой компоненте **E** и **H**, то получается неправильный

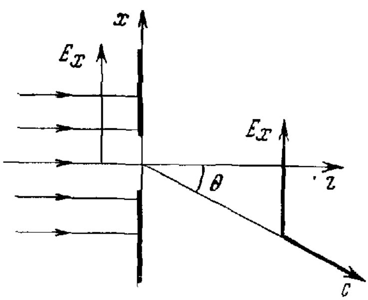

Рис. 6

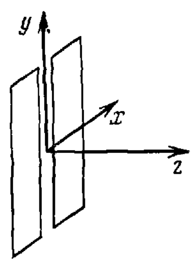

Рис. 7

результат: во всем пространстве за экраном будут отличны от нуля только те компоненты поля, которые отличны от нуля в падающей волне. Это значит, что волны, идущие от отверстия, не будут волнами поперечными (рис. 6).

Здесь дело в том, что **E** и **H** удовлетворяют волновому уравнению, только если div **E** $= 0$ и div **H** $= 0$, т. е. только там, где нет зарядов. Решая, например, задачу о дифракции при нормальном падении волны на экран, расположенный при $z=0$, по Кирхгофу, мы принимаем, что в плоскости $z=0$ всюду $E_z=0$, как и в падающей волне. На краю экрана компоненты E_x и E_y испытывают в плоскости $z = 0$ скачки; это значит, что div E в этом месте не равна нулю, что соответствует наличию наведенных зарядов на краю экрана. Поэтому, решая волновые уравнения для E_x, E_y, E_z этим способом, мы и не получаем решения оптической задачи.

Однако есть один случай, когда это затруднение отпадает и который можно правильно решить, пользуясь скалярным волновым уравнением. Рассмотрим дифракцию на бесконечно длинной щели в экране, и пусть электрическое поле падающей волны параллельно щели (направленной вдоль оси y) и зависит только от x и z (рис. 7). В этом случае div E, очевидно, всюду равна нулю и задача (как и все плоские задачи) сводится к решению скалярного волнового уравнения. В этом случае при применении метода Кирхгофа нельзя отбрасывать интеграл по бесконечно удаленной поверхности полусферы, но теперь можно решать задачу с самого начала как задачу в двух измерениях. Волновое уравнение, которому удовлетворяет $E = E_y$, будет теперь

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0. \tag{5}$$

При этом вместо формулы Кирхгофа (3) можно воспользоваться аналогичной формулой для волнового уравнения в двух измерениях, имеющей вид

$$2\pi\varphi_P = \int \left\{ \varphi \frac{\partial Z(kr)}{\partial z} - Z(kr) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} ds, \tag{6}$$

где r — расстояние точки P от элемента замкнутого контура ds. Здесь $Z(\xi)$ с точностью до постоянного множителя — функция Ганкеля $Z(\xi) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(\xi)$, встречающаяся во всех вопросах, связанных с распространением волн в двух измерениях. Для больших значений аргумента она равна

$$Z(\xi) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\, e^{-i\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)}; \tag{7}$$

при малых ξ она ведет себя, как $\ln \xi$. В трех измерениях вспомогательная функция, входящая в формулу Кирхгофа, была e^{-ikR}/R и изображала расходящуюся шаровую волну, распространяющуюся от светящейся точки. В двухмерной задаче, когда поле не зависит от одной из трех координат, заменой светящейся точки является светящаяся линия. Функция Ганкеля $Z(kr)$ дает волну, распространяющуюся от светящейся линии.

Формулу (6) мы применим теперь к решению задачи о щели по методу Кирхгофа. При этом интеграл по бесконечно удаленной части контура интегрирования при тех же условиях, что и в трех измерениях, пропадает. И здесь нам придется воспользоваться основным допущением метода Кирхгофа — задать φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ на щели такими же, как в ее отсутствие, и считать их нулем на экране. Это допущение является для большого числа задач единственным путем для их решения (так как строго решенных задач о дифракции не больше четырех-пяти), и его следствия хорошо оправдываются. Практически оно представляет собой гениальный шаг; однако именно в этом допущении кроется причина тех противоречий, к которым приводит иногда теория дифракции в форме Кирхгофа. Чтобы это показать, мы рассмотрим задачу о дифракции с энергетической точки зрения.

Для решения энергетических вопросов в электромагнитном поле нужно применить теорему Пойнтинга. Теорема Пойнтинга, которая доказывается, исходя из уравнений Максвелла, состоит в том, что прирост электромагнитной энергии W за единицу времени в объеме, ограниченном поверхностью σ, равен

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -Q + \frac{c}{4\pi} \oint\limits_{\sigma} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]_n \, d\sigma, \tag{8}$$

где Q — приращение других видов энергии, например энергии тепловой. Для простоты мы положим $Q = 0$. Тогда, если ввести вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \tag{9}$$

то

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \oint\limits_{\sigma} \mathbf{S}_n d\sigma. \tag{8'}$$

Эта теорема в виде (8′) — следствие уравнений Максвелла. Нужно обратить внимание на то, что при этом доказывается, что интеграл от нормальной компоненты вектора Пойнтинга по замкнутой поверхности дает прирост энергии внутри объема, ограниченного этой поверхностью. Эту теорему часто формулируют как утверждение, что $S_n d\sigma$ дает количество энергии, проходящее в единицу времени через площадку $d\sigma$. Конечно, соотношение (8′) этим будет удовлетворено, но при этом упускают, что обратное неверно. Такая локализация потока энергии отнюдь не вытекает из доказанного для замкнутой поверхности соотношения (8′), и поэтому такая локализация неоднозначна: (8′) будет выполнено и в том случае, если вместо (9) принять

$$\overline{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{9'}$$

где **A** — произвольный вектор.

Что же правильно? Какой поток энергии протекает через площадку $d\sigma$?

На этот вопрос можно ожидать одного из следующих трех ответов. Либо $\operatorname{rot}\mathbf{A} \neq 0$, либо $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$, либо это безразлично, и вопрос лишен содержания. Правильно последнее, и поэтому все относящиеся сюда парадоксы не имеют смысла.

В учебниках часто говорят: примем, что $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ прибавлять не нужно. Это неудачная формулировка, ибо при этом, очевидно, предполагается, что возможен опыт, который мог бы решить этот вопрос. Но для замкнутой поверхности такой опыт невозможен, так как из (8′) $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ выпадает. В физических задачах никогда не имеет смысла говорить об изменении энергии внутри незамкнутой поверхности и о потоке через незамкнутую поверхность, так что вопрос о том, нужно ли к $\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ прибавить $\operatorname{rot}\mathbf{A}$, не может быть проверен на опыте [1].

Локализация потока энергии приводит к парадоксам потому, что из теоремы Пойнтинга выводят то, чего в ней не содержится, незаконно применяют соотношение, установленное для замкнутой поверхности, к отдельной площадке. Известный пример такого парадокса — комбинация непараллельных электрического и магнитного статических полей. Здесь $S = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \neq 0$, поток же вектора S через замкнутую поверхность, конечно, нуль. В связи с этим либо говорят, что к статическим полям рассуждения с вектором Пойнтинга неприменимы, либо же, что в статических полях электромагнитная энергия циркулирует по замкнутым кривым. Против первого утверждения можно возразить, что статическое поле — предельный случай переменного. Второе утверждение физически бессмысленно — энергия циркулирует, и это ни на чем не сказывается.

Укажем еще простой пример случая, когда локализация потока энергии на незамкнутой площадке часто приводит к недоразумениям. Представим себе передающую антенну (вытянутый проводник) с включенной в нее сторонней электродвижущей силой

---

[1] В гидродинамике в противоположность этому имеет смысл говорить о локализации потока жидкости, так как мы можем следить за движением определенной частицы жидкости.

(рис. 8). Если антенна—идеальный проводник, то вектор **E** перпендикулярен к поверхности антенны всюду, кроме участка, где действует сторонняя электродвижущая сила. Поэтому нормальная к поверхности антенны слагающая вектора Пойнтинга $S_n \sim [\mathbf{E}, \mathbf{H}]_n$ равна нулю на всех элементах поверхности антенны, кроме тех, где действует сторонняя электродвижущая сила. Полный поток вектора Пойнтинга через всю поверхность антенны дает правильный результат, он отличен от нуля — антенна излучает энергию. Но возьмем другой случай: в идеально проводящей антенне были возбуждены колебания и затем электродвижущая сила была выключена. Тогда во всех точках поверхности антенны $S_n = 0$ никакого потока энергии через поверхность антенны нет и как будто получается, что и излучения не будет.

Дело здесь просто. В объеме проводника антенны при выключенной электродвижущей силе нет никакого поля и, следовательно, нет и энергии, так что потока энергии через поверхность антенны в этом случае и не может быть. Но это не значит, что нет излучения. Излучение есть, и оно происходит благодаря тому, что энергия, находящаяся к моменту выключения электродвижущей силы в пространстве вблизи антенны, перемещается во все более и более далекие части пространства. Поток энергии через поверхность, окружающую антенну, но не совпадающую с ее собственной поверхностью, уже не будет нулем.

Недоразумения, вызванные локализацией вектора Пойнтинга, получаются и в оптике. Однако, в отличие от статического поля, в оптике имеет иногда смысл говорить о потоке энергии через незамкнутую площадку. Разбирая задачи дифракции, мы увидим, когда это имеет смысл. Мы увидим, что обычное толкование $S_n d\sigma = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]_n d\sigma$ как потока энергии через площадку $d\sigma$ допустимо и имеет смысл тогда, когда размеры площадки $d\sigma$ велики по сравнению с длиной волны. В статическом случае длина волны равна бесконечности, и поэтому здесь локализация вектора Пойнтинга никогда не имеет смысла.

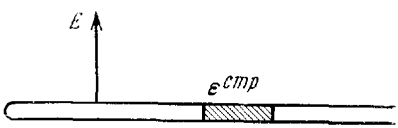

Рис. 8