ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(19.XII 1932 г.)

Дифракция на щели. Применение функции Грина в задачах дифракции

Рассмотрим дифракцию на щели плоской волны при нормальном ее падении и выясним энергетическую сторону дела в этом случае. Мы будем применять теорию Кирхгофа и воспользуемся формулой (6) второй лекции. Найдем поле на больших расстояниях от щели. В этом случае для $Z(kr)$ можно воспользоваться асимптотическим выражением

$$Z(kr) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Из чертежа видно, что

$$dz = -\frac{dr}{\cos\theta}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial Z}{dz} = -\frac{dZ}{dr}\cos\theta \approx \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\left(ik+\frac{1}{2r}\right)\cos\theta\cdot e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

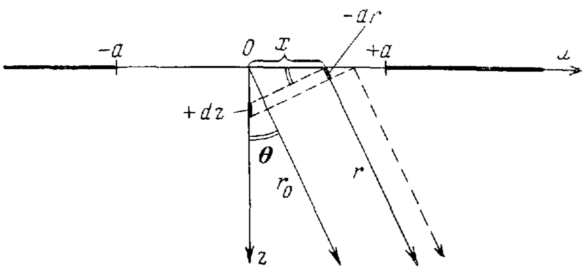

Рис. 9

Пренебрегая $1/2r$ по сравнению с $k = 2\,\pi/\lambda$, получаем

$$\frac{\partial Z}{\partial z} \approx i\sqrt{\frac{\pi k}{2r}}\cos\theta\cdot e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Подставив это выражение, (7) и (4′) в (6) (вторая лекция), получим

$$E = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{1+\cos\theta}{\sqrt{r}}\, e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\,dx.$$

Для очень больших расстояний $r = r_0 - x \sin\theta$, а под корнем r можно заменить на r_0; интегрируя, получим тогда

$$E = i\sqrt{\frac{k}{2\pi r_0}}\,(1+\cos\theta)\,e^{-i\left(kr_0-\frac{\pi}{4}\right)}\,\frac{\sin(ka\sin\theta)}{k\sin\theta}. \tag{10}$$

Полученное выражение представляет собой цилиндрическую волну с амплитудой, зависящей от угла θ. Основная зависимость от угла θ дается типичным множителем $\frac{\sin(ka\sin\theta)}{k\sin\theta}$. В зависимости от угла амплитуда E имеет максимум при $\theta = 0$, равный $2a\sqrt{\frac{k}{2\pi r_0}}$. Острота этого максимума зависит от ka, т. е. от отношения ширины щели к длине волны. Если ka велико (ширина щели велика по сравнению с длиной волны), то поле за щелью сосредоточено в малых углах θ; в противоположном случае дифракционная картина размыта.

Рассмотрим баланс энергии при дифракции от щели. Применим теорему Пойнтинга к замкнутой поверхности — экран со щелью и бесконечно удаленная полуцилиндрическая поверхность. Мы вычислим потоки энергии через щель и через полуцилиндр, следуя Релею, который провел этот расчет и проверил, действительно ли здесь выполняется баланс энергии.

Нас будет интересовать среднее значение вектора Пойнтинга за период. Легко убедиться, что среднее значение вектора Пойнтинга за период равно[1]

$$S = \frac{c^2}{16i\omega\pi}\left([\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}^*] - [\mathbf{E}^*, \operatorname{rot}\mathbf{E}]\right),$$

---

[1] Вычислим среднее значение, например, z-компоненты вектора Пойнтинга. Оно равно

$$\overline{S}_z = -\frac{c}{4\pi}\,\overline{\operatorname{Re}E_y\cdot\operatorname{Re}H_x}.$$

Здесь входят действительные части E_y и H_x, так как мы пользуемся комплексными величинами, и физический смысл имеют их действительные части. Так как

$$\operatorname{Re}E_y = \frac{1}{2}\,(E_y + E_y^*), \qquad \operatorname{Re}H_x = \frac{1}{2}\,(H_x + H_x^*)$$

и, кроме того, средние значения от E_yH_x и $E_y^*H_x^*$ равны нулю, а $E_yH_x^*$ и $E_y^*H_x$ не зависят от времени, то

$$\overline{S}_z = -\frac{c}{16\pi}\,(E_yH_x^* + E_y^*H_x).$$

В силу уравнений Максвелла

$$i\frac{\omega}{c}\,H_x = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \qquad -i\frac{\omega}{c}\,H_x^* = \frac{\partial E_y^*}{\partial z},$$

где ω — частота, а звездочкой обозначены комплексно сопряженные величины. Энергия, проходящая через щель, равна (множитель $c^2/16\omega\pi$ мы будем всюду отбрасывать)

$$J_0 = \frac{1}{i}\int\limits_{-a}^{+a}\left(E\frac{\partial E^*}{\partial z} - E^*\frac{\partial E}{\partial z}\right)dx.$$

Так как на щели $E = 1$, $\frac{\partial E}{\partial z} = ik$, то мы получаем

$$J_0 = 4\,ka.$$

На основании теоремы Пойнтинга мы можем утверждать, что такой же поток энергии протекает и через бесконечно большую полуцилиндрическую поверхность. Вычислим, однако, поток через эту поверхность непосредственно.

Принимая во внимание, что на этой поверхности при $r_0 \gg \lambda$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r_0}, \qquad \frac{\partial E}{\partial r_0} \approx k\sqrt{\frac{k}{2\pi r_0}}\,(1+\cos\theta)\,e^{-i\left(kr_0 - \frac{\pi}{4}\right)}\,\frac{\sin(ka\sin\theta)}{k\sin\theta},$$

получим для потока выражение

$$J = \frac{r_0}{i}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(E\frac{\partial E^*}{\partial r_0} - E^*\frac{\partial E}{\partial r_0}\right)d\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\left(\frac{\sin(ka\sin\theta)}{\sin\theta}\right)^2 d\theta.$$

Если щель очень велика по сравнению с длиной волны ($ka \gg 1$), то, в силу наличия очень острого максимума амплитуды поля при малых углах дифракции, в интеграле существенна только та его часть, которая относится к малым углам. Поэтому под интег-

---

так что

$$\overline{S}_z = \frac{c^2}{16i\omega\pi}\left(E_x\frac{\partial E_y^*}{\partial z} - E_y^*\frac{\partial E_y}{\partial z}\right).$$

Точно так же получим

$$\overline{S}_x = \frac{c^2}{16i\omega\pi}\left(E_y\frac{\partial E_y^*}{\partial x} - E_y^*\frac{\partial E_y}{\partial x}\right).$$

Легко видеть, что это компоненты векторного выражения, приведенного в тексте, в случае нашей двухмерной задачи ($E_y = E$).

ралом можно заменить $\sin\theta$ на θ, а $\cos\theta$ на 1. Сделав это, получим

$$J = \frac{4k^2a^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin ka\theta}{ka\theta}\right)^2 d\theta = \frac{4ka}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}ka}^{+\frac{\pi}{2}ka}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi.$$

Пределы по ξ можно теперь в нашем случае приближенно заменить на $-\infty$ и на $+\infty$. Тогда, учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi = \pi,$$

получим

$$J = 4ka.$$

Таким образом, все обстоит хорошо, баланс энергии соблюдается, теорема Пойнтинга справедлива.

Однако полученное совпадение даже слишком хорошо. Действительно, при расчете были сделаны пренебрежения и, следовательно, должно было получиться лишь приближенное совпадение J с J_0.

Рассмотрим обратный случай — щель, очень узкую по сравнению с длиной волны ($ka \ll 1$). В этом случае

$$\frac{\sin(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} = 1$$

и

$$J = \frac{k^2a^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}k^2a^2 \neq J_0.$$

Это грубое нарушение теоремы Пойнтинга, баланса энергии нет. В чем здесь дело?

Иногда на этот вопрос вам ответят так: неправильны те значения E и $\frac{\partial E}{\partial z}$, которые вы взяли на отверстии равными значениям при отсутствии экрана, а на экране — равными нулю. Говорят, что энергетическая проверка для широкой по сравнению с длиной волны щели показывает, что в данном случае это предположение Кирхгофа относительно E и $\frac{\partial E}{\partial z}$ на щели правильно.

Этот ответ неудовлетворителен. Нужно выяснить, что значит неправильное задание E и $\frac{\partial E}{\partial z}$ на экране и отверстии. Нужно охарактеризовать физические свойства экрана. Будем, например, считать экран идеально проводящим. Для решения задачи нужно найти поле E такое, которое вместе со своими первыми производными было бы всюду вне экрана (в том числе и на отверстии) непрерывно, на экране обращалось бы в нуль, а за экраном представляло бы собой расходящиеся волны. Решение этой задачи дает поле не такое, какое получается при решении по методу Кирхгофа.

Однако это еще не значит, что значения E и $\frac{\partial E}{\partial z}$, которые берет Кирхгоф на экране и в отверстии, неправильны — они могут соответствовать экрану с другими физическими свойствами, не идеально проводящему экрану. Может быть, можно придумать такой экран, на котором E и $\frac{\partial E}{\partial z}$ имели бы эти значения. Возможно ли это на самом деле, совместимо ли это с тем, что E удовлетворяет волновому уравнению? Это вопрос чисто математический.

Решение вопроса состоит в том, что это невозможно, что предположение Кирхгофа математически противоречиво. Кирхгофом было доказано только, что если E есть решение волнового уравнения, то между значениями E и $\frac{\partial E}{\partial n}$ на замкнутой поверхности и внутри нее имеет место соотношение (3) [или в двух измерениях — (6)]. Но он не доказал, что при произвольно заданных на поверхности функциях E и $\frac{\partial E}{\partial n}$ левая часть выражения (3) [или (6)] будет таким решением волнового уравнения, значения которого на поверхности будут равны этой функции E, а значения его производной — $\frac{\partial E}{\partial n}$.

Вообще говоря, это не имеет места. При решении волнового уравнения $\nabla^2 E + k^2 E = 0$ нельзя произвольно задавать на замкнутой поверхности E и $\frac{\partial E}{\partial n}$, так как решение волнового уравнения, вообще говоря, определяется заданием на этой поверхности одного только $\frac{\partial E}{\partial n}$ (или одного только E). Задание E (или $\frac{\partial E}{\partial n}$) на плоскости $z = 0$ и условие уходящих волн на бесконечно большой полусфере определяют решение волнового уравнения однозначно. Значит, предположение Кирхгофа, с одной стороны, не всегда может быть оправдано физически, а с другой стороны,— математически противоречиво. Кирхгоф знал это, но считал, что с достаточным приближением его допущение все же справедливо.

Теорию Кирхгофа можно избавить от этой математической неприятности. Так как решение волнового уравнения определяется заданием значений одного E на плоскости $z = 0$, то можно найти представление решения только через эти значения. Для этого вместо $Z(kr)$ возьмем другую функцию

$$\Gamma = Z(kr) - Z',$$

где Z' — всюду непрерывное внутри поверхности решение волнового уравнения, представляющее собой на бесконечном полуцилиндре уходящие волны. Соотношение (6) останется тогда справедливо, если в нем заменить Z на Γ, так как для непрерывной функции Z': $\oint\left(E\frac{\partial Z'}{\partial z} - Z'\frac{\partial E}{\partial z}\right)ds = 0$. Можно положить

$$Z' = Z(kr'),$$

где r' — расстояние от зеркального изображения P' точки P в плоскости $z = 0$ (рис. 10). Тогда на плоскости $z = 0$, $\Gamma = 0$ и $\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 2\frac{\partial Z}{\partial z}$, а интеграл по бесконечному полуцилиндру по-прежнему пропадает. Поэтому (для двухмерного случая) получаем равенство

$$\pi E_P = \int E\frac{\partial Z}{\partial z}dx. \tag{11}$$

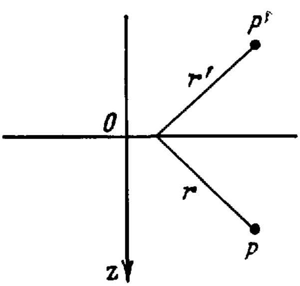

Рис. 10

Значение $\frac{\partial E}{\partial z}$ на поверхности выпало. Эта формула Грина дает возможность решать задачу математически корректно.

Однако и при применении вместо (6) этой формулы (11) остается вопрос о том, как задавать значение E на плоскости экрана с отверстием. Поэтому формула Грина, в сущности, мало подвинула нас к решению вопроса.

Поскольку задание E на плоскости $z = 0$ и условие уходящих волн на бесконечности определяют решение однозначно, постольку, если решение, удовлетворяющее этим условиям, будет каким-нибудь образом найдено, будет то решение, которое нужно. Поэтому можно получить это решение и не применяя формулы (11) и пользуясь, например, методом Релея (представляя решение в зависимости от x в виде ряда или интеграла Фурье).

Замечу, что я вижу в теории дифракции еще одну неприятность. Мы получили для щели решение (10), годное для очень больших расстояний от нее, для таких, что $r \gg \frac{a^2}{\lambda}$. Это так называемый случай Фраунгофера. Это решение дает нам распределение интенсивности на очень большом расстоянии от отверстия: если там поставить экран, то на нем будет широкое светлое пятно, распределение интенсивности в котором мы выяснили. Обычно для получения фраунгоферовой дифракции рекомендуют пользоваться трубой (телескопом), и говорят, что при этом получится то же самое, что и без трубы на очень большом расстоянии. Однако из изложенного это без дальнейшего еще не вытекает. Единственный случай, когда наблюдают дифракцию без трубы — это случай дифракции рентгеновских лучей от кристаллов. Однако в этом случае условие $r \gg \frac{a^2}{\lambda}$ не выполнено, так как здесь $\frac{a^2}{\lambda} \sim 10^7$ *см*. В чем здесь дело, будет объяснено дальше.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25.XII 1932 г.)

Строгая постановка задачи о дифракции. О невозможности абсолютно черных экранов. Дифракция на очень малых телах. Рассеяние энергии резонатором и электроном

Математическую задачу, соответствующую физической задаче о дифракции плоской волны, падающей нормально на щель в идеально проводящем бесконечно тонком экране, можно формулировать так.

Требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0,$$

удовлетворяющее следующим условиям.

При $z \to \infty$ (далеко за экраном)

$$E = f(\theta) \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}},$$