Замечу, что я вижу в теории дифракции еще одну неприятность. Мы получили для щели решение (10), годное для очень больших расстояний от нее, для таких, что $r \gg \frac{a^2}{\lambda}$. Это так называемый случай Фраунгофера. Это решение дает нам распределение интенсивности на очень большом расстоянии от отверстия: если там поставить экран, то на нем будет широкое светлое пятно, распределение интенсивности в котором мы выяснили. Обычно для получения фраунгоферовой дифракции рекомендуют пользоваться трубой (телескопом), и говорят, что при этом получится то же самое, что и без трубы на очень большом расстоянии. Однако из изложенного это без дальнейшего еще не вытекает. Единственный случай, когда наблюдают дифракцию без трубы — это случай дифракции рентгеновских лучей от кристаллов. Однако в этом случае условие $r \gg \frac{a^2}{\lambda}$ не выполнено, так как здесь $\frac{a^2}{\lambda} \sim 10^7$ *см*. В чем здесь дело, будет объяснено дальше.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25.XII 1932 г.)

Строгая постановка задачи о дифракции. О невозможности абсолютно черных экранов. Дифракция на очень малых телах. Рассеяние энергии резонатором и электроном

Математическую задачу, соответствующую физической задаче о дифракции плоской волны, падающей нормально на щель в идеально проводящем бесконечно тонком экране, можно формулировать так.

Требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0,$$

удовлетворяющее следующим условиям.

При $z \to \infty$ (далеко за экраном)

$$E = f(\theta)\, \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}},$$

т. е. поле должно представлять собой волну, расходящуюся от щели (r здесь — расстояние от щели).

При $z \to -\infty$

$$E = e^{-ikz} - e^{ikz},$$

т. е. на больших расстояниях от щели со стороны падения света поле должно стремиться к сумме падающей и отраженной от экрана волн.

На поверхности идеально проводящего экрана всюду $E = 0$, и, наконец, всюду вне экрана, включая и отверстие, E и его производные должны быть непрерывны.

Формулированная таким образом задача очень сложна. Идея Кирхгофа, развившего свой метод решения дифракционных задач, состояла в том, чтобы обойти трудности ее решения. Мы видели, что, вводя «функцию Грина» и применяя формулу (11), мы устраняем математические недостатки метода Кирхгофа. Однако необходимость заранее знать значения поля E в точках отверстия остается. Подробный анализ показывает, что предположение Кирхгофа для задания этих значений E с достаточным приближением справедливо, только если размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны. Таким образом, в этой форме метод Кирхгофа может быть оправдан для больших отверстий.

Вообще для больших отверстий в экране и электрическое поле **E** и магнитное поле **H** будут такие же, как без экрана. Значит, в этом случае и вектор Пойнтинга в отверстии будет такой же, если бы экрана не было.

Как мы знаем, теорема Пойнтинга относится к замкнутой поверхности. Применим ее к замкнутой поверхности, образованной экраном с отверстием и полусферой бесконечно большого радиуса. Будем предполагать, что среда обладает некоторым поглощением (хотя бы и очень малым). Тогда интеграл по полусфере будет равен нулю, так что останется только интеграл по экрану и отверстию. При большом по сравнению с длиной волны отверстии правильно предположение Кирхгофа, поэтому поток через отверстие равен потоку через ту же площадку при отсутствии экрана.

Теперь мы можем указать те случаи, когда имеет смысл говорить о потоке энергии через незамкнутую пощадку. Это имеет смысл, если *размеры площадки велики по сравнению с длиной волны*.

Мы можем с помощью экрана с большим по сравнению с длиной волны отверстием выделить и измерить энергию, проходящую через площадку, совпадающую с отверстием, и утверждать, что в падающей волне и при отсутствии экрана через эту площадку будет проходить та же энергия.

Я избегал говорить о теле с абсолютно черной поглощающей поверхностью и провел рассуждение с поглощающей средой, так как абсолютно черная поверхность — функция, не совместимая с уравнениями Максвелла. Не всякие граничные условия совместимы с дифференциальными уравнениями. По Максвеллу, всякое тело характеризуется диэлектрической постоянной ε и проводимостью σ. Чтобы получить большое поглощение, нужно брать тело с большой проводимостью, но при увеличении проводимости увеличивается и отражение от поверхности тела и при $\sigma = \infty$ отражение делается полным. Если взять пластинку, у которой проводимость σ, а значит, и коэффициент поглощения можно менять, например кювету с раствором краски, и постепенно увеличивать ее коэффициент поглощения, то при определенном значении σ количество тепла, выделяющееся в пластинке за счет поглощения ею света, будет максимально. Действительно, и при $\sigma = 0$, когда весь свет проходит через пластинку, и при $\sigma = \infty$, когда весь свет отражается от нее, это тепло будет нулем. Впрочем, на практике поверхности, покрытые сажей, часто достаточно хорошо воспроизводят абсолютно черную поверхность.

Строгое решение дифракционных задач, вообще говоря, очень сложно. Проще других случай, когда рассеивающий объект очень мал по сравнению с длиной волны. В этом случае задача сравнительно легко может быть решена до конца. Здесь прежде всего интересно сопоставить количество энергии, падающей на дифрагирующую частицу, с энергией, ею рассеянной.

Рассмотрим этот вопрос в случае, когда рассеивающей частицей является, во-первых, линейный резонатор и, во-вторых, свободный электрон. Итак, рассмотрим линейный осциллятор (диполь, размеры которого гораздо меньше длины волны), на который падает волна от удаленного источника. Вычислим, как это обычно делают, по Герцу, количество энергии, рассеянное диполем [1].

---

[1] Заметим, что по существу нужно было бы более точно выяснить, что мы подразумеваем под «энергией», рассеянной диполем». Если взять любую поверхность, окружающую диполь, и учесть полное поле на ней (включая, конечно, и поле падающей волны), то, очевидно, поток через поверхность будет нуль. Если взять замкнутую поверхность, включающую источник света, то поток энергии через нее будет отличен от нуля, так как для поддержания колебаний источника затрачивается работа. Если внутри поверхности заключен и источник и рассеивающий диполь, то поток через поверхность будет равен сумме трех членов: первый дает излучение источника, второй дает как раз энергию, рассеянную диполем, третий же — интерференционный, он зависит от расстояния между источником и диполем и при усреднении по расстоянию даст нуль.

Уравнение движения осциллятора, колеблющегося под действием поля световой волны, такое:

$$m\ddot{p} - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{p} + kp = e^2E_0e^{int}. \tag{12}$$

Поле излученной осциллятором волны определяется величиной $\ddot{p}$, и энергия, излученная за единицу времени, равна

$$W = \frac{\ddot{p}_0^2}{3c^3}, \tag{13}$$

где $\ddot{p}_0$ — амплитуда $\ddot{p}$.

Нам нужно решение, дающее вынужденные колебания

$$p = p_0e^{i(nt+\varphi)}. \tag{14}$$

Будем предполагать, что имеет место *резонанс*, т. е. $n^2 = \frac{k}{m}$; тогда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и, как видно из уравнения (12),

$$\ddot{p}_0 = -\frac{3c^3}{2n}E_0. \tag{15}$$

Подставляя это значение в (13), найдем величину энергии, рассеянной за единицу времени настроенным в резонанс диполем

$$W = \frac{3c}{16\pi^2}\lambda^2E_0^2, \tag{16}$$

где λ — длина волны падающего света, $\lambda = \frac{2\pi c}{n}$. В падающей волне в отсутствие осциллятора за единицу времени через единицу площади проходит энергия, равная

$$\frac{c}{8\pi}E_0^2. \tag{17}$$

Сравнивая (16) и (17), мы можем сказать, что осциллятор выбирает энергию с площади сечения падающей волны, равной

$$\sigma = \frac{3}{2\pi}\lambda^2.$$

Таким образом, при резонансе величина этой площади рассеяния σ определяется только длиной волны и не имеет никакого отношения к размерам осциллятора (мы уже предположили, что его размеры очень малы по сравнению с длиной волны).

Это очень важный факт; учитывая его, можно, между прочим, понять взаимное влияние осцилляторов, находящихся на расстоянии порядка длины волны друг от друга. Не следует, однако, упускать из виду, что на основании сказанного раньше рассматривать поток энергии через площадку с размерами порядка длины волны, по существу, не имеет смысла, так что полученному выражению для σ нельзя приписывать особенно наглядного буквального содержания.

Перейдем теперь к рассеянию на свободном электроне. В этом случае в (12) нужно положить $k = 0$, член с $\dddot{p}$ для не слишком коротких волн очень мал по сравнению с членом с $\ddot{p}$ (если $\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}$), так что мы можем написать

$$\ddot{p}_0 = \frac{e^2}{m} E_0.$$

Рассеянная энергия согласно (13) равна

$$W = \frac{e^4}{3c^3m^2} E_0^2;$$

сравнение с (17) дает теперь для площади рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi e^4}{3c^4m^2}.$$

Полагая $\sigma = \pi R^2$, найдем для радиуса площади рассеяния величину

$$R = \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{e^2}{mc^2},$$

отличающуюся только числовым фактором $\sqrt{\frac{8}{3}}$ от «радиуса электрона», равного $a = \frac{e^2}{mc^2}$. Таким образом, как заметил Борн, свободный электрон рассеивает столько, сколько получалось бы из простых геометрических расчетов, использующих «размер электрона». Борн идет обратным путем: он исходит из представления о фотонах, считает их радиус равным нулю, использует эти геометрические соображения и, сравнивая результат с приведенным выше расчетом по формуле Герца, получает радиус электрона. Конечно, большой убедительности в этом рассуждении Борна нет, хотя оно и интересно.