

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(7.1 1933 г.)

Решение дифракционных задач по методу Релея. Применение к некоторым частным вопросам

Вернемся к задачам теории дифракции и разберем метод, применявшийся Релеем для их решения. Этот метод вполне эквивалентен применению функции Грина, так как при его применении мы считаем поле (но не его производную) на экране заданным, и приводит к тождественным результатам. Поэтому методу Релея присущи и все недостатки метода функции Грина. Однако многие задачи он позволяет решать очень изящно.

Рассмотрим опять двухмерную дифракционную задачу и будем, как и прежде (стр. 16), считать, что экран с отверстиями (щелями) лежит в плоскости $z = 0$, образующие щелей параллельны оси y , поле E направлено по оси y , волна падает на экран нормально (в направлении оси z). Частным интегралом волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0$$

будет выражение

$$e^{i(u x + z \sqrt{k^2 - u^2})},$$

где u произвольно. При $|u| < k$ это решение представляет собой плоскую волну с постоянной амплитудой, распространяющуюся под углом φ к оси z , причем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{\sqrt{k^2 - u^2}}.$$

При $|u| > k$ это решение изображает волну с амплитудой, экспоненциально убывающей в направлении оси z , бегущую вдоль оси x и синусоидально зависящую от x

$$e^{i u x - z \sqrt{u^2 - k^2}}.$$

В силу линейности волнового уравнения его решением будет и сумма

$$E = \sum_m C_m e^{i(u_m x + z \sqrt{k^2 - u_m^2})} \quad (18)$$

при любых C_m и u_m .

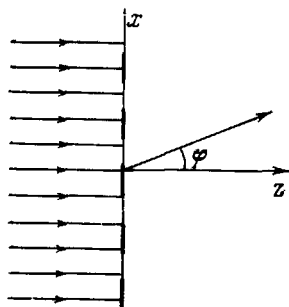


Рис. 11

Рассмотрим случай периодической структуры экрана, когда щели в экране расположены по периодическому закону (дифракционная решетка). Строго говоря, этот случай выпадает из нашего прежнего рассмотрения, так как это бесконечная структура, однако этот вопрос мы пока оставляем в стороне¹. Заметим, что в этом случае можно сформулировать общие положения, сохраняющиеся и в строгой теории и связанные только с периодичностью структуры экрана.

Можно ли подобрать C_m и u_m так, чтобы удовлетворить граничным условиям — заданному распределению поля на экране? Если это удастся, то в силу теоремы единственности для решений волнового уравнения полученное решение должно совпасть с решением по методу Кирхгофа с применением функции Грина. Мы увидим сейчас, что это действительно так.

Пусть при $z = 0$ задано распределение поля на решетке как периодическая функция x

$$E(x, 0) = f(x).$$

Тогда необходимо, следовательно, чтобы наше решение (18) обратилось при $z = 0$ в эту функцию $f(x)$

$$\sum_m C_m e^{i u_m x} = f(x).$$

Это осуществимо; достаточно положить

$$u_m = m \frac{2\pi}{d} = m\mu \quad \left(\mu = \frac{2\pi}{d} \right),$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а d — период решетки, т. е. период функции $f(x)$. Мы получим тогда разложение функции в ряд Фурье, и коэффициенты этого ряда будут

$$C_m = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} f(x) e^{-i m \mu x} dx.$$

Таким образом, мы получили простой рецепт для решения задач о дифракции на бесконечных периодических структурах (решетках). Надо найти коэффициенты разложения Фурье C_m функции $f(x)$, представляющей поле на решетке, и решение запишется

¹ В частности, к этому случаю неприменимо обычное доказательство единственности решения волнового уравнения.

тогда в виде

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i(m\mu x + z\sqrt{k^2 - m^2\mu^2})}. \quad (19)$$

Члены этого ряда для больших номеров m ($|m\mu| > k$) экспоненциально убывают в зависимости от z и на больших расстояниях от решетки поэтому не играют роли¹. На больших расстояниях остаются только члены ряда, для которых $|m\mu| < k$. Это плоские волны постоянной амплитуды, распространяющиеся в направлениях, углы которых φ_m с осью z определяются условием

$$m\mu = k \sin \varphi_m \quad \text{или} \quad \sin \varphi_m = m \frac{\lambda}{a}. \quad (19')$$

Это известная формула для угла дифракции на решетке. C_m дает поэтому амплитуду спектра m -го порядка.

«Синусоидальная решетка», для которой

$$f(x) = \cos \mu x$$

[или вообще $f(x) = \cos(\mu x + \gamma)$], дает только спектры первого порядка и не дает даже прямо прошедшей волны (спектра нулевого порядка). Такая решетка может быть осуществлена, только если свет при прохождении через решетку в определенных местах меняет свою фазу на λ . Для решеток, состоящих из щелей и непрозрачных частей, прямо прошедшая волна всегда будет присутствовать, так как в соответствующем разложении Фурье будет постоянный член. Обычную штриховую решетку мы можем представлять себе как суперпозицию синусоидальных решеток с периодами, находящимися в целом отношении к основному, причем каждая из этих решеток дает лишь два дифракционных максимума, соответствующих $\pm m$ -му члену ряда (19).

¹ Строго говоря, нужно показать, что убывает не только каждый такой член ряда, но и бесконечная их сумма. Это вытекает из следующей теоремы Абеля о рядах (см., например, Г у р с а. Курс анализа, § 166. Русск. изд. 1911, или В а л л е П у с с е н. Курс анализа, I. М.—Л., ГТТИ,

1933, § 387, стр. 429): если $S = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m V_m$, суммы $S_m = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m V_m$ ограничены, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$ и $\varepsilon_{m+1} < \varepsilon_m$, то $|S| < A \varepsilon_0$, где A — постоянная. В нашем случае нужно положить $V_m = C_m e^{im\mu x}$, $\varepsilon_m = e^{-z\sqrt{k^2 - m^2\mu^2}}$.

Тогда получим, что $|S| < A e^{-z\sqrt{m_1^2\mu^2 - k^2}}$, причем m_1 есть наименьшее m , для которого $|m\mu| > k$.

Если $\mu > k$, т. е. $d < \lambda$, то все члены ряда (19), кроме соответствующего $m = 0$, будут экспоненциально убывать в зависимости от z . На дальних расстояниях от решетки останется поэтому только прямо прошедший свет, изображаемый членом ряда, соответствующим значению $m = 0$. Это влечет за собой невозможность получить изображение решетки с периодом, меньшим длины волны, с помощью какого бы то ни было оптического прибора, например микроскопа. Мы получаем, таким образом, предел разрешения микроскопа, указанный Аббе и Гельмгольцем.

При образовании изображения решетки в оптическом приборе отпадают, с одной стороны, в силу только что сказанного все члены разложения поля на решетке, для которых $|m\mu| > k$: для них получается затухающее поле. С другой стороны, во всяком оптическом приборе, например в микроскопе, отрезаются благодаря конечной его апертуре высшие члены разложения Фурье поля решетки (вообще говоря, начиная с члена меньшего номера, чем благодаря первой причине). Если структура решетки грубая, такая, что уже первые члены разложения дают хорошее ее приближение, то аппарат хорошо ее изображает. Однако тонкие детали в изображении пропадают. Аппараты с «темным полем», например ультрамикроскоп, отрезают первые члены разложения, и в этом случае в изображении структура может совершенно исказиться, могут получиться мнимые детали.

Изложенные свойства дифракции на решетках можно применить к некоторым акустическим задачам. Заставим плоскую мембрану колебаться с определенной частотой. На ней образуются стоячие волны. Мы можем рассматривать такую мембрану как дифракционную решетку, считая, что акустическое поле в воздухе у поверхности мембраны задается ее колебаниями. Длина стоячей волны на мембране определяет период решетки. Если этот период очень мал — меньше длины акустической волны в воздухе, соответствующей данной частоте, — то распространения волн в воздухе не будет, а получится экспоненциально убывающее поле.

Этим объясняется опыт Лесли с колокольчиком (заменяющим мембрану), помещенным под колокол воздушного насоса. Если под колоколом воздух, то звон колокольчика слышен снаружи колокола. Если же воздух из-под колокола выкачать и напустить туда водород, то звон колокольчика слышен еще слабее, чем при разреженном воздухе. Здесь дело в том, что при той же частоте звука длина волны звука в водороде (из-за его малого молекулярного веса) гораздо больше, чем в воздухе, и больше, чем постоянная той «решетки», которая образуется на колокольчике при его колебаниях. В акустическом случае ясно видно, почему при этих условиях излучение падает. Если расстояние от узлов

до пучностей мембраны мало по сравнению с длиной волны звука в окружающей среде, то среда просто будет перетекать от пучностей к узлам (скорость этого течения при этих условиях меньше скорости звука). Это объяснение опыта Лесли принадлежит Стоксу¹; до него этому опыту давали самые фантастические объяснения.

Применим теперь общие принципы релейской теории дифракции к некоторым вопросам, намеченным еще вначале. Поставим следующий вопрос. Можно ли создать такую решетку, чтобы поле на ней равнялось

$$f(x) = e^{-iux}, \quad u = \frac{2\pi}{d} \quad (20)$$

и, следовательно, чтобы эта решетка давала только одну дифрагированную волну? Такая решетка образуется при преломлении света на границе двух сред. Действительно, в первой среде поле равно сумме полей падающей и отраженной волн

$$E_1 = e^{-ik_1(x \sin \psi_1 + z \cos \psi_1)} + Ae^{-ik_1(x \sin \psi_1 + z \cos \psi_1)}$$

и, следовательно, на границе сред при $z = 0$

$$E_1 = (1 + A) e^{-ik_1 x \sin \psi_1}. \quad (21)$$

Мы рассматриваем случай, когда электрический вектор перпендикулярен плоскости падения: $E_1 = E_y$ (см. рис. 12). В силу непрерывности тангенциальных компонент электрического вектора поле во второй среде у границы ($z = 0$) будет поэтому то же самое (21), но это как раз поле типа (20), причем $u = k_1 \sin \psi_1$. Поэтому во второй среде получается одна «дифрагированная волна» — это преломленная волна. Угол

нормали ее с осью z определяется из уравнения

$$k_2 \sin \psi_2 = u = k_1 \sin \psi_1,$$

т. е. $\frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Мы получили закон преломления. Если $\sin \psi_1 > \lambda_1/\lambda_2$, то $u > k_2$ и во второй среде будет поле с амплитудой, убывающей в зависимости от z . Это случай полного внутреннего отражения. Поле во второй среде при этом получается того же

¹ Релей. Теория звука, т. II, § 324.

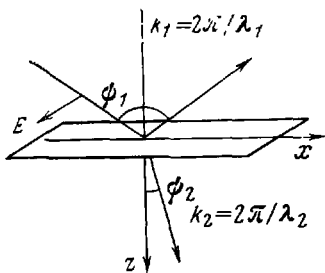


Рис. 12

типа, что и от дифракционной решетки с очень мелкой структурой.

До сих пор мы делали выводы общего характера, исходя из того, что решение написано в виде суммы плоских волн. Нужно, однако, иметь в виду, что физический смысл имеет лишь их суперпозиция. Выделить отдельные плоские волны можно при помощи установленной на бесконечность трубы.

Рассматривая сумму плоских волн, дающую решение задачи для бесконечной решетки, мы ни на каких расстояниях от нее не получим картины с дифракционными максимумами в определенных местах.

Чтобы получить результаты, сравнимые с опытом, можно идти двумя путями. Во-первых, можно рассчитать, что получится, если за решеткой поставить определенным образом фокусированную трубу или просто линзу. Однако расчет этого случая не очень прост. Во-вторых, можно перейти от бесконечной решетки к рассмотрению ограниченных решеток. Применяя к этому случаю метод Релея, мы получим решение уже не в виде ряда Фурье (19), а в виде интеграла Фурье

$$E(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{i(ux+z\sqrt{k^2-u^2})} du. \quad (22)$$

При этом функцию $g(u)$ нужно определить из заданного распределения поля $E(x, 0) = f(x)$ в плоскости решетки (или экрана с отверстием) $z = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iux} du$$

так, что

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iux} dx.$$

В этом случае для очень больших z можно приближенно найти значение интеграла (22) и получить распределение поля на очень больших расстояниях от решетки. Распределение поля там будет такое же, как и в фокальной плоскости линзы, поставленной за решеткой.

При дифракции на щели ширины $2a$ в экране и при нормальном падении волны

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & |x| < a, \\ f(x) &= 0, & |x| > a. \end{aligned}$$

Поэтому

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-iux} dx = -\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin ua}{ua}.$$

При дифракции на решетке периода $d = 2D$, состоящей из M щелей,

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-M/2}^{+M/2} e^{-im\pi} \int_{-a}^{+a} e^{-iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin au}{au} \frac{\sin MDu}{\sin Du},$$

где a — ширина каждой щели.

ДОБАВЛЕНИЕ К ПЯТОЙ ЛЕКЦИИ

[Строгое решение задачи о дифракции на очень узкой щели]

Как мы знаем (лекции 3 и 4), если щель невелика по сравнению с длиной волны, то решение дифракционной задачи по методу Кирхгофа дает неправильный результат. В предельном случае, когда ширина щели очень мала по сравнению с длиной волны, удается, однако, дать *строгое* решение задачи.

Мы рассматривали плоский, бесконечно тонкий (находящийся в плоскости $z = 0$) экран из идеально проводящего материала. Щель в нем бесконечной длины, параллельна оси y и ширина ее $2a$. Со стороны отрицательных z на экран нормально падает волна, электрический вектор которой $E = E_y$ параллелен щели.

В этом случае задача строгой теории состоит в том, чтобы найти решение $E(x, z)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) E и $\frac{\partial E}{\partial z} = ikH$ всюду вне экрана, включая и место щели, непрерывны;

2) на экране при $z = 0$ и $|x| > a$ $E = 0$ (граничное условие на идеальном проводнике);

3) при $z \rightarrow -\infty$ (со стороны падающей волны) поле складывается из падающей волны e^{ikz} и волн, идущих от экрана. Для построения этого решения положим

$$E = e^{ikz} - e^{-ikz} + \varphi(x, z).$$

Тогда, как легко убедиться, из условий для E вытекает, что $\varphi(x, z)$ будет решением волнового уравнения, удовлетворяющим следующим условиям:

1) всюду вне плоскости $z = 0$, φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ непрерывны, но на щели при $z = 0$, $|x| < a$, φ остается непрерывным, а $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ испытывает скачок: $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=+0}^{z=-0} = 2ik$;

2) всюду на экране, т. е. при $z = 0$, $|x| > a$, φ равно нулю, так что если положить $\varphi(x, 0) = f(x)$, то $f(x) = 0$ при $|x| > a$;

3) φ стремится к нулю при $z \rightarrow \pm \infty$ и изображает волны, идущие в обе стороны от щели.

Решение задачи будем искать в виде, аналогичном (22), т. е.

$$\varphi(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{i(ux \pm z \sqrt{k^2 - u^2})} du. \quad (23)$$

Это решение волнового уравнения. Взяв перед корнем знак плюс для $z > 0$ и знак минус для $z < 0$, мы удовлетворим условию 3).

Полагая $z = 0$, находим

$$\varphi(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iux} du,$$

так что

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iux} dx.$$

Принимая во внимание условие 2), получим

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-iux} dx. \quad (24)$$

Остается удовлетворить условию 1). Для этого нужно взять подходящую функцию $f(x)$ ($|x| < a$), и в этом заключается вся трудность задачи.

Заметим, что φ , выражающееся равенством (23), очевидно, непрерывно при $z = 0$ при любой $g(u)$, любой $f(x)$. Нужно, следовательно, удовлетворить еще только условию для скачка производной $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ при $z = 0$. Дифференцируя (23), получим

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=+0} = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \sqrt{k^2 - u^2} e^{iux} du.$$

Следовательно, условие скачка для $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ дает уравнение

$$\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \sqrt{k^2 - u^2} e^{iux} du = 1, \quad |x| < a, \quad (25)$$

причем $g(u)$ выражается через $f(x)$ согласно (24).

До сих пор рассуждения были общими, предположения о том, что щель узкая, сделано не было. Покажем теперь, что для узкой щели, для которой $a \ll \lambda$, $ka \ll 1$, мы удовлетворим уравнению (25), если возьмем ¹

$$f(x) = \frac{k}{i} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

При такой функции $f(x)$, $g(u)$ равна

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{k}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} e^{-iux} dx - \frac{ka^3}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \mu^2} e^{-iua\mu} d\mu = \\ &= \frac{ka^2}{\pi i} \int_0^1 \sqrt{1 - \mu^2} \cos(u\alpha\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Учитывая, что ²

$$\int_0^1 \sqrt{1 - \mu^2} \cos \alpha\mu d\mu = \frac{\pi}{2} \frac{J_1(\alpha)}{\alpha},$$

где $J_1(\alpha)$ — бесселева функция первого порядка, получим

$$g(u) = \frac{ka^2}{2i} \frac{J_1(au)}{au}. \quad (26)$$

¹ Это распределение поля на узкой щели получено в работе Релея (Sci. Pap., т. IV, стр. 282 и 305) из других соображений.

² См., например, Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. М. — Л., ГИИ, 1933, т. I, гл. VII, § 2, формула (19) или Кузьмин. Бесселевы функции. ОНТИ, 1935, § 6, стр. 89.

Покажем теперь, что это выражение для $g(u)$ удовлетворяет уравнению (25) с точностью до членов порядка ka . Подставляя (26) в (25), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \sqrt{k^2 - u^2} e^{iux} du &= \frac{a}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1(au)}{u} \sqrt{k^2 - u^2} e^{iux} du = \\ &= \frac{a}{i} \int_0^{\infty} \frac{J_1(au)}{u} \sqrt{k^2 - u^2} \cos ux du = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= a \int_0^{\infty} J_1(au) \cos ux du, \\ I_2 &= a \int_0^k J_1(au) \cos ux \cdot \left[\frac{\sqrt{k^2 - u^2}}{iu} - 1 \right] du, \\ I_3 &= a \int_0^{\infty} J_1(au) \cos ux \cdot \left[\frac{\sqrt{u^2 - k^2}}{u} - 1 \right] du. \end{aligned}$$

Первый интеграл можно взять точно, если воспользоваться известными формулами¹ для интегралов, содержащих функции Бесселя,

$$\int_0^{\infty} J_1(\xi) \cos \xi y d\xi = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| < 1, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} & \text{при } |y| > 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$I_1 = 1.$$

Второй и третий интегралы мы оценим приближенно. Так как для $|u| < k$

$$\left| \frac{\sqrt{k^2 - u^2}}{iu} - 1 \right| = \left| \frac{\sqrt{k^2 - u^2} - iu}{u} \right| = \frac{k}{u} \quad \text{и} \quad |J_1(au)| < \text{const} \cdot au,$$

то

$$\begin{aligned} |I_2| &< a \int_0^k |J_1(au)| |\cos ux| \left| \frac{\sqrt{k^2 - u^2}}{iu} - 1 \right| du < \\ &< ka^2 \cdot \text{const} \int_0^k du = \text{const} \cdot k^2 u^2, \end{aligned}$$

¹ См. Кузьмин. Бесселевы функции, гл. IV, § 4.

Для оценки I_3 учтем, что при $|u| > k$

$$\left| \frac{\sqrt{u^2 - k^2}}{u} - 1 \right| = \frac{k^2}{u(\sqrt{u^2 - k^2} + u)} \ll \frac{k^2}{u^2} \text{ и } |J_1(au)| < 1,$$

так что

$$|I_3| < k^2 a \int_k^\infty \frac{du}{u^2} = ka.$$

Таким образом,

$$\frac{a}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1(au)}{u} \sqrt{k^2 - u^2} e^{iux} du = 1 + O(ka),$$

и выражение (26) удовлетворяет уравнению (25) с точностью до членов порядка не ниже ka . Мы видим, таким образом, что в то время как для очень широкой щели

$$g(u) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin au}{u}, \quad (27)$$

для щели очень узкой по сравнению с длиной волны это выражение нужно заменить на

$$g(u) = \frac{ka}{2i} \frac{J_1(ku)}{u}. \quad (26')$$

Это выражение отличается в максимуме в $\frac{\pi}{4}ka$ раз от значения, которое имеет в максимуме выражение (27) для широкой щели. Фазы их отличаются на $\frac{\pi}{2}$, и, кроме того, (26) несколько быстрее убывает при возрастании u , чем (27).