ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(13. II 1933 г.)

Соотношение неопределенностей в квантовой механике. Прохождение электронов через щель. Соотношение между степенью монохроматичности колебания и его продолжительностью и его роль в радиотелефонии

Разберем теперь парадокс, связанный с «соотношением неопределенностей» квантовой механики.

Пусть мы имеем волновую функцию частицы

$$\psi = Ae^{i(ux-nt)}, \tag{28}$$

удовлетворяющую уравнению Шрёдингера при свободном движении частицы. При этом n и u связаны с энергией E и импульсом частицы p соотношениями

$$n = \frac{E}{\hbar}, \qquad u = \frac{p}{\hbar}, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}. \tag{28'}$$

Величина $|\psi|^2\,dx$ дает относительную вероятность найти частицу в интервале x, $x + dx$. В нашем случае эта вероятность не зависит от x, координата частицы совершенно неопределенна. Наоборот, импульс имеет вполне определенное знечение $p = \hbar u$.

Это частный случай соотношения неопределенностей. Вообще говоря, вероятность положения частицы дается выражением $|\psi|^2\,dx$, вероятность же того, что частица имеет импульс, лежащий между p и $p + dp$, дается выражением

$$\frac{1}{\hbar}\left|\,g\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right|^2 dp, \tag{29}$$

где $g\,(u)$ — функция, входящая в разложение Фурье функции $\psi\,(x)$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,e^{iux}du. \tag{30}$$

«Принцип неопределенности» вытекает тогда из того, что чем «острее» функция $\psi\,(x)$, тем «расплывчатее» $g\,(u)$, и наоборот. Количественно этот принцип выражается «соотношением неопределенностей»

$$\Delta p \cdot \Delta x \geqslant \frac{\hbar}{2}, \tag{31}$$

где Δp — неопределенность в импульсе, а Δx — неопределенность в положении. Существование соотношения (31) можно показать на ряде примеров. Один из этих примеров, который часто приводят, следующий. Поставим на пути электронов диафрагму, т. е. экран с отверстием (рис. 13).

В отсутствие диафрагмы компонента импульса по оси x вполне определенна: $p_x = 0$, но координата x совершенно неопределенна. При наличии диафрагмы координата x определяется с точностью до ширины отверстия $\Delta x = 2a$, но теперь будет неопределенность и в p_x, так как благодаря дифракции электроны отклоняются в стороны. При этом говорят, что будет выполняться соотношение

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

Но мы уже видели (лекция 1), что это как будто не так. Действительно, максимальная неопределенность в компоненте импульса Δp_x которая может получиться благодаря вызванному дифракцией отклонению электронов, будет меньше p_x и, значит, меньше величины полного импульса p_0

$$\Delta p_x \leqslant p_0.$$

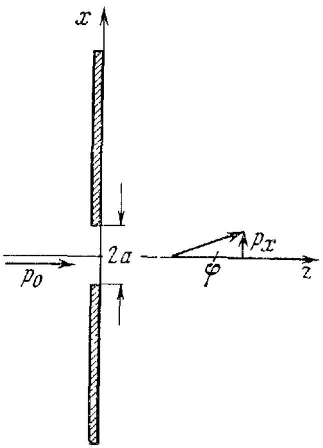

Рис. 13

Следовательно,

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \leqslant 2ap_0,$$

а эту величину можно сделать сколь угодно малой, уменьшая ширину отверстия $2a$.

В чем здесь дело? Ответ в том, что при малом a за отверстием будут не только распространяющиеся, но и экспоненциально убывающие волны. Если при рассмотрении дифракции принять их во внимание, то противоречие исчезает.

Разберем вопросы, связанные с «соотношением неопределенностей» в волновой механике, более подробно. Уравнение Шрёдингера для одной степени свободы имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(x)\psi = \frac{2im}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{32}$$

Как и во всякой физической теории, в квантовой механике прежде всего возникает вопрос о том, как переходить от математических символов к физическим величинам. Мы должны указать, что означают в уравнении (32) входящие в него буквы x, t,

ψ и т. д. Физический смысл ψ был выяснен не сразу, но окончательное ее толкование — статистическое.

Каждой опытной установке соответствует определенное уравнение Шрёдингера (например, для свободно движущейся точки $V = 0$) и определенное его решение. Волновая механика не дает, вообще говоря, ответов, относящихся к единичному опыту. Функция $\psi(t, x)$ (известная для какого-то момента t) относится не к данному опыту, а к данному опытному устройству, к серии опытов с данным устройством, которое характеризуется видом $V(x)$.

Выражение $\psi\psi^* dx$ дает вероятность найти частицу в момент t в точке с координатой между x и $x + dx$. При этом, чтобы иметь дело с обычными вероятностями, нужно нормировать так, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi\psi^* dx = 1$. Последнее возможно, если этот интеграл сходится (это бывает не всегда; в частности, в случае свободной частицы это не так).

Но задания положения электрона еще недостаточно для характеристики его состояния, надо знать еще его импульс. Величину импульса волновая механика характеризует тоже только статистически. Для этого она дает следующий рецепт [который мы уже указывали — формула (30)]. Нужно разложить $\psi(x)$ (при заданном t) в интеграл Фурье

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{iux}\, dx.$$

Тогда

$$\frac{1}{\hbar} \left| g\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 dp$$

дает вероятность того, что импульс (в этот момент t) лежит между p и $p + dp$.

Заметим, что с точки зрения теории относительности этот рецепт очень естествен. Для свободной частицы $V = 0$, и решение уравнения Шрёдингера имеет вид (28), где n играет роль циклической частоты, а u — волнового числа. Соотношение $E = \hbar n$ было еще у Планка. Де Бройль перенял его и ввел в волновую механику. С точки зрения теории относительности энергия и три компоненты импульса (умноженные на c) образуют четырехмерный вектор, совершенно так же, как и частота и три компоненты волнового вектора. Поскольку между t-компонентами обоих четырехмерных векторов принята связь $E = \hbar n$, то такая же связь должна иметь место и для компонент по пространственным осям.

Это и записано для одного пространственного измерения в соотношении $p = \hbar u$ (28'). Если $\psi(t, x)$ не является синусоидальной волной вида (28), то, применяя теорему Фурье, мы представляем ψ как суперпозицию таких волн и амплитуду, с которой представлена каждая такая волна, т. е. $g(u)$ естественно считать мерой вероятности того, что импульс имеет значение $p = \hbar u$.

Эти основные положения о вероятности координаты и вероятности импульса влекут за собой чрезвычайно важные следствия. Именно, исходя из свойств интеграла Фурье, можно показать, что если кривая, изображающая $|\psi|^2$ в зависимости от x, имеет очень острый максимум, то кривая, изображающая $|g|^2$ в зависимости от u, очень широкая, расплывчатая. Это значит, что очень точное определение координаты несовместимо с точным определением импульса, и наоборот. Невозможен такой опыт, с помощью которого измеряются абсолютно точно и координата и импульс.

Чтобы это качественное утверждение формулировать в количественной форме, нужно ввести меры разброса значений координат и импульса. Для этого поступают так.

Определяют средние значения величин x и u

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\psi|^2\,dx, \qquad \bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,|g(u)|^2\,du$$

и величины Δx и Δu, определяемые равенствами

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2\,|\psi|^2\,dx, \qquad (\Delta u)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u-\bar{u})^2\,|g|^2\,du, \tag{33}$$

рассматривают как меры неточности (меры разброса) величин x и u. Конечно, в этом определении меры разбросов есть известный произвол.

Для определенных указанным образом величин Δx и Δu имеет место чисто математическая теорема, заключающаяся в следующем. Если ψ и g — любые функции, связанные между собой по Фурье [согласно (30)], то Δx и Δu, связанные с ψ и g согласно (33), удовлетворяют неравенству

$$\Delta x \cdot \Delta u \geqslant \frac{1}{2}.$$

Для Δx и $\Delta p = \hbar \Delta u$ отсюда вытекает соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

Это и есть количественная формулировка «соотношения неопределенностей». Знак равенства имеет в нем место только в том случае, если $|\psi|^2$ изображается гауссовой кривой. Из этого соотношения сразу же видно, что если, например, $\Delta x = 0$, т. е. частица фиксирована в определенном месте, то $\Delta p = \infty$. Это значит, что при этом мы так воздействуем на частицу, что разброс величины ее импульса оказывается бесконечно большим.

Обычно, рассматривая примеры соотношения неопределенностей, оперируя с «разбросами» координаты δx и импульса δp, не дают точного их определения, а оценивают их «на глаз» и показывают, что для них

$$\delta x \cdot \delta p > \hbar.$$

Для двух степеней свободы дело обстоит совершенно так же. Здесь волновая функция есть $\psi(x, z)$. Вероятность найти координаты частицы лежащими в пределах x, $x + dx$ и z, $z + dz$ равна

$$|\psi|^2 \, dx \, dz.$$

Для определения вероятности компонент импульса надо разложить $\psi(x, z)$ в интеграл Фурье

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u, v)\, e^{i(ux + vz)} \, du \, dv,$$

и тогда

$$|g(u, v)|^2 \, du \, dv = \frac{1}{\hbar^2} \left| g\left(\frac{px}{\hbar}, \frac{pz}{\hbar}\right)\right|^2 dp_x dp_z$$

дает вероятность того, что компоненты импульса лежат в пределах p_x, $p_x + dp_x$; p_z, $p_z + dp_z$. Аналогично обстоит дело при большем числе измерений.

Обратимся теперь к опыту с дифракцией электронов, проходящих через диафрагму, о котором мы уже говорили раньше. На щель в экране падает пучок электронов с вполне определенным импульсом (см. рис. 13)

$$p_x = p_y = 0, \qquad p_z = k\hbar = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = p_0.$$

Волновая функция, соответствующая этим электронам, имеет вид

$$\psi = e^{ikz}.$$

До диафрагмы координата x неопределенна, разброс ее бесконечно большой, как это и дожно быть, поскольку p_x точно задана. После прохождения электронов через диафрагму (имеющую вид щели ширины $2a$, параллельной оси x) координата x определена с точностью $\delta x \sim a$, разброс p_x не может быть больше p_z, и, таким образом, $\delta x \cdot \delta p_x \leqslant a p_z$ в противоречие с соотношением неопределенностей.

Рассмотрим, однако, вопрос более точно. Какие будут волны за щелью?

Ответ нам дает решение задачи о дифракции на щели. Применяя метод Релея (лекция 5), получим решение, дающее распределение ψ за экраном, в виде

$$\psi(x, z) = \text{const} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin au}{au} e^{i(ux + z\sqrt{k^2-u^2})} du. \tag{34}$$

Здесь ψ представлена в виде суперпозиции волн вида $e^{i(ux+z\sqrt{k^2-u^2})}$. Для той части интеграла, для которой $|u| < k$, это — плоские волны постоянной амплитуды, распространяющиеся под углом φ к оси z, причем

$$u = k \sin\varphi = \frac{p_x}{\hbar}, \qquad \sqrt{k^2 - u^2} = k\cos\varphi = \frac{p_z}{\hbar}.$$

Амплитуда волн зависит от u по закону $\frac{\sin au}{au}$, и, следовательно, вероятность значения импульса, близкого к $p_x = \hbar u$, пропорциональная квадрату этого выражения, будет иметь заметную величину только при условии, что по порядку величины $au \sim 1$, или $ka \sin\varphi \sim 1$, т. е.

$$\frac{p_x a}{\hbar} \sim 1.$$

Значения p_x такого порядка и меньшие по абсолютной величине будут иметь еще заметную вероятность. Разброс импульса δp_x будет равен этому значению p_x ($\delta p_x \sim p_x$), так как среднее значение $\bar{p}_x = 0$. Разброс x-координаты можно считать равным a, $\delta x \sim a$.

Таким образом,

$$\delta x \cdot \delta p_x \sim \hbar.$$

Это мы и хотели показать. Однако при выводе мы ограничились волнами, для которых $|u| < k$, т. е. волнами, для которых $p_x = \hbar u < \hbar k = p_0$. Поэтому наш вывод верен, только если $\delta p_x < p_0$. Это ограничение для разброса δp_x и было принято при качественном выводе, указанном в начале лекции и приводящем, как мы видели, при достаточно узкой щели к противоречию с соотношением неопределенностей.

Противоречие разрешается, если принять во внимание, что мы не учли волн, для которых $|u| > k$.

Если ширина щели a мала (невелика по сравнению с дебройлевской длиной волны $\lambda = \hbar/k$), то величина $\left|\frac{\sin au}{au}\right|$ еще велика при больших u (для которых $|u| > k$) и членами интеграла с этими u пренебрегать нельзя. В этом случае вероятность того, что компонента импульса p_x больше $\hbar/a$, значительна и $\delta p_x > \hbar/a$.

Для этих u ($|u| > k$) элементы интеграла представляют собой «затухающие» волны, т. е. волны с амплитудой, убывающей в направлении оси z. Для таких волн уже нельзя говорить об определенном полном импульсе (только плоская волна постоянной амплитуды изображает состояние с точно определенным полным импульсом). Поэтому вероятность того, что p_x больше полного импульса p_0, отлична от нуля и может быть значительна; неравенство $\delta p_x < p_0$ не имеет места.

Неравенство $\delta p_x \cdot \delta x > \hbar$ сохраняется, таким образом, и при малой ширине щели.

Парадокс получился потому, что за экраном предполагалось наличие только синусоидальных плоских волн *постоянной* амплитуды, имеющих разные направления, но одинаковое волновое число k, в то время как при малом a там существенно представлены и затухающие плоские волны. Это значит, что за экраном полный импульс может быть больше, чем его значение p_0 до экрана.

Представление волновой механики об импульсе не укладывается в представления обычной классической механики о скорости и импульсе. В качестве примера возьмем электрон, движущийся в ящике (в одном измерении), отражаясь от его стенок. По классической механике его скорость (а значит, и импульс) может иметь только два значения: $\pm v$. По волновой механике у электрона при данной энергии бесконечно много возможных импульсов (и скоростей), вплоть до бесконечно больших значений импульса.

Еще одно замечание. Наши выводы сделаны на основании дифракционной формулы (34), выведенной в предположении, что поле на экране задано. В волновой механике, как и в волновой оптике, при узкой щели задавать поле на экране нельзя. К счастью, для очень узких щелей нужную здесь задачу волновой механики можно решить строго (см. добавление к лекции 5). При этом оказывается, что получается формула, отличающаяся от (34) только заменой $\frac{\sin au}{au}$ на $\frac{J_1(au)}{au}$, где J_1 — бесселева функция первого порядка. Это значит, что все сделанные нами выводы сохраняются, так как в нужном для нас отношении эти две функции ведут себя аналогично.

Перейдем теперь к более прозаическим вопросам. Графическая сторона соотношения неопределенностей состоит, как уже указывалось, в том, что чем у́же кривая, тем больше нужно синусоид, чтоб ее представить. Чем резче локализована волна в пространстве, тем менее она монохроматична, тем больший участок захватывает ее спектр. Это относится к распределению волны в пространстве. Аналогичное положение справедливо и для зависимости от времени. Короткий импульс — острая локализация во времени — несовместим с узким спектром частот, и обратно. Это обстоятельство имеет первостепенное практическое значение в радиотелеграфии. Путем настройки, применяя острый резонанс, мы защищаемся от посторонних станций и помех. Чем острее настройка приемника, тем меньше будут мешать посторонние станции, Но такой остроселективный приемник не может принимать коротких сигналов, так как короткий сигнал имеет широкий спектр. Между тем применение коротких сигналов нужно для того, чтобы можно было быстро телеграфировать. Значит, при быстром телеграфировании приходится брать приемник с широкой полосой пропускания, а тогда ему будут мешать посторонние станции. Здесь, по существу, играет роль то же соотношение, что и в принципе неопределенности. Поэтому людям, знающим радиотелеграфию, принцип неопределенности бывает легко объяснить.

В формулировке этого принципа для бегущих волн в пространстве, с одной стороны, и для колебаний во времени — с другой, есть интересное различие. Мы называем пространственную волну (в одном измерении) монохроматической, если ее зависимость от координаты дается функцией Ce^{iux}, где C — комплексная постоянная. Волны, изображаемые функциями e^{iux} и e^{-iux}, — разные волны; это волны, идущие в противоположных направлениях. В этом смысле

$$\cos ux = \frac{1}{2}e^{iux} + \frac{1}{2}e^{-iux}$$

— волна не монохроматическая, а суперпозиция двух разных монохроматических волн.

При рассмотрении колебаний во времени монохроматическим мы называем колебание вида $A\cos\omega t + B\sin\omega t$, где A и B — произвольные постоянные. В частности, колебание, изображаемое функцией $\cos\omega t$,— монохроматическое колебание. Это различие в том, что́ мы понимаем в этих случаях под «монохроматичностью», ведет к некоторым различиям в точной математической формулировке рассматриваемого общего положения [1].

[1] См. А. *Майер*, *Е. Леонтович*. ДАН СССР, 4, 353, 1934.