

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(25.III 1933 г.)

Явление Доплера при движении дифракционной решетки. Поле при дифракции на ограниченной решетке на больших расстояниях от нее. Аберрация при наличии дисперсии в эфире

Разберем теперь один парадокс, связанный с принципом Доплера. Рассмотрим дифракцию световой волны на дифракционной решетке. Предположим, что источник света, падающего на решетку, движется по направлению к ней.

Будем сначала рассуждать с точки зрения представления о неподвижном эфире и допустим, что решетка и наблюдатель покоятся по отношению к эфиру, а источник движется относительно него. Тогда частота падающего на решетку света равна

$$\nu = \nu_0 (1 + \beta),$$

а длина волны получится соответственно уменьшенной

$$\lambda = \frac{c_0}{\nu} = \frac{\lambda_0}{1 + \beta}, \quad (35)$$

где λ_0 — длина волны покоящегося источника, c_0 — скорость света относительно эфира, а β — отношение скорости источника к скорости света c_0 .

Пользуясь дифракционной решеткой, мы измеряем длину волны.

Измеряя угол отклонения φ для первого дифракционного максимума, мы определим длину волны падающего света λ , пользуясь формулой $\lambda = d \sin \varphi$, и сможем заметить доплеровское смещение по отношению к опыту с неподвижным источником. Обратный случай, когда движется наблюдатель с решеткой, а источник покоится, с точки зрения принципа относительности, конечно, совершенно эквивалентен рассмотренному. С точки зрения же старой лоренцовой теории неподвижного эфира эти случаи различны. Как показал Лоренц, удерживая только члены первого порядка относительно β , электронная теория приводит к тем же выводам, что и теория относительности¹. Между тем непосредственный расчет второго случая, который я сейчас приведу, как будто бы говорит о том, что это не так, и мы получаем здесь, таким образом, противоречие — парадокс.

¹ См., например, Г. А. Лоренц. Теория электронов, гл. V (примечание 72)

Действительно, посмотрим, как с точки зрения неподвижного эфира обстоит дело во втором случае. Частота света, падающего на движущуюся решетку от неподвижного источника, с точностью до членов первого порядка по-прежнему удастся выразением $\nu = \nu_0 (1 + \beta)$. Но для дифракции существенна длина волны, а чтобы ее найти, нужно знать скорость света относительно движущейся решетки. Согласно представлениям теории неподвижного эфира, эта скорость получится применением теоремы о сложении скоростей и, очевидно, с точностью до первого порядка относительно β будет равна

$$c = c_0(1 + \beta \cos \psi). \quad (36)$$

Здесь ψ — угол между направлением движения и направлением распространения света (рис. 14). Поскольку мы считаем, что решетка движется к источнику и плоскость решетки перпендикулярна к направлению движения, постольку для дифрагированного луча ψ , очевидно, и есть угол дифракции. Длина волны дифрагированного света равна теперь, согласно (35) и (36),

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{\nu} = \lambda_0 \frac{1 + \beta \cos \psi}{1 + \beta} \approx \\ &\approx \lambda_0 [1 + \beta (\cos \psi - 1)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Это выражение существенно отличается от (35). Из него вытекает, в частности, что в противоположность первому случаю для малых углов дифракции доплеровское смещение исчезает, $\lambda \approx \lambda_0$, и движения в этом случае нельзя будет обнаружить.

В чем ошибка? Ошибка последнего рассуждения заключается в следующем. В нем предполагается, что длина волны одинакова для всех лучей, в результа-

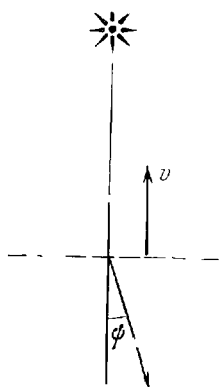


Рис. 14

те интерференции которых получается дифракционный максимум. Чтобы выяснить вопрос, рассмотрим подробнее образование дифракционной картины.

Практически дифракционную картину получают в фокальной плоскости линзы. Для теоретического разбора, однако, удобнее рассмотреть картину, получающуюся без линзы, но на очень большом расстоянии от решетки, что мы и сделаем. Расчет дифракции с линзой в нашем случае очень сложен: нужно было бы учесть все изменения хода лучей, вносимые линзой, и различие длин волн в лучах разного наклона. Этого не стоит делать, так как

мы знаем, что картина на очень далекой плоскости должна быть такая же, как в фокальной плоскости линзы.

Предположим сначала, что решетка имеет только две щели (рис. 15). Расстояния точки наблюдения от щелей равны r и r' . При увеличении расстояния разность углов ψ и ψ' , а значит, и разность длин волн λ и λ' , идущих от первой и второй щели, будет уменьшаться. Однако число волн, укладывающихся на расстояниях r и r' , будет становиться все больше.

Поэтому маленькая разница в длинах волн в результате приводит к такой разности хода между волнами от первой и второй щели, с которой необходимо считаться. Действительно, эта разность хода равна

$$\Delta = \frac{r}{\lambda} - \frac{r'}{\lambda'} = \frac{1+\beta}{\lambda_0} \left[\frac{r}{1+\beta \cos \psi} - \frac{r'}{1+\beta \cos \psi'} \right] \approx \approx \frac{1+\beta}{\lambda_0} [r - r' - \beta(r \cos \psi - r' \cos \psi')].$$

В дифракционном максимуме разность Δ должна равняться целому числу n . В первом приближении (пренебрегая, как всюду, квадратами β) это условие дает

$$r - r' - \beta(r \cos \psi - r' \cos \psi') = \frac{n\lambda_0}{1+\beta}.$$

При прежнем выводе мы считали, что $\psi = \psi'$. Это и привело нас к парадоксу, так как тогда (учитывая, что $r - r'$ нужно положить равным $d \sin \psi$), мы получаем прежний результат (37)

$$r - r' = d \sin \psi = \frac{n\lambda_0}{1+\beta} \frac{1}{1-\beta \cos \psi} \approx \approx n\lambda_0 [1 + \beta(\cos \psi - 1)].$$

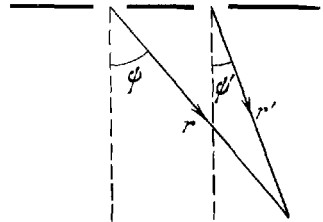


Рис. 15

В действительности же $\psi \neq \psi'$, а, как ясно из чертежа, $r \cos \psi = r' \cos \psi'$, так что

$$r - r' = d \sin \psi = \frac{n\lambda_0}{1+\beta}.$$

Мы измерим, следовательно, ту же длину волны, что и в случае движения источника.

Рассмотрим теперь *периодическую* и, следовательно, бесконечную решетку. Если на такую решетку нормально падает волна, то поле за решеткой, пользуясь методом Релея (лекция 5),

можно представить так:

$$E = \sum_n C_n e^{-i \left(\frac{2\pi n}{d} x + \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{d} \right)^2} z \right)}, \quad (38)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а d — период решетки. Это суперпозиция плоских волн, распространяющихся в направлениях, определенных углами ψ_n ($\sin \psi_n = \frac{n\lambda}{d}$), и затухающих волн. Если решетка движется, то длина волны λ выражается, согласно (37), как $\lambda \approx \lambda_0 [1 + \beta (\cos \psi - 1)]$, и, следовательно, для тех из совокупности входящих в (38) волн, которые распространяются под малыми углами, мы имеем опять (пренебрегая ψ^2) $\lambda = \lambda_0$. Таким образом, получается прежний парадокс.

Заметим, что тот же метод рассуждения можно применить к случаю, когда никакого движения нет, но среда за решеткой — кристаллическая (оптически анизотропная). Общее со случаем движущейся решетки заключается здесь в том, что в обоих случаях скорость света зависит от направления распространения. При этом в результате рассуждений, подобных только что приведенным, мы получим неверный результат.

Почему же рассуждение, приводящее к правильному результату в случае покоящейся решетки, в случае движущейся (а также в случае анизотропной среды) приводит к неправильным результатам? Ответ в том, что интерпретация решения (38), полученного для бесконечной решетки, здесь не соответствует интересующему нас опыту с конечной решеткой.

Если решетка бесконечная, то всюду, в каждой точке пространства позади нее, действует вся совокупность волн, входящих в правую часть выражения (38). Реальное значение имеет только эта их суперпозиция, их сумма, только ее можно наблюдать. Никаких максимумов и минимумов, соответствующих обычной картине спектров разных порядков, за бесконечной решеткой мы не получим. Интересующий же нас опыт состоит именно в том, что наблюдаются дифракционные максимумы, соответствующие отдельным членам суммы (38). Поэтому для выяснения вопроса нужно разобратить опыт, в котором можно отделить друг от друга члены суммы, входящей в (38).

С бесконечной решеткой без применения линз такой опыт осуществить нельзя. Решение же задачи с бесконечной решеткой, хотя для нее и учитывается правильная зависимость волнового числа от направления, т. е.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} [1 - \beta (\cos \psi - 1)], \quad (39)$$

не дает никакого ответа относительно результата такого опыта, так как постановка вопроса не соответствует условиям этого опыта. В частном случае покоящейся решетки можно было из решения задачи о бесконечной решетке получить ответ о результате интересующего нас опыта только потому, что в этом случае можно было дать отдельным членам суммы правильную интерпретацию. Обоснование же этой интерпретации (которая в таком виде, как для покоящейся решетки, для движущейся непригодна) дается, по существу, только решением задачи о дифракции на конечной решетке. Таким образом, необходимо решить задачу о дифракции на конечной решетке.

Решение задачи о дифракции плоской волны на ограниченной решетке получается по методу Релея в виде интеграла Фурье

$$E = \int g(u) e^{-i(ux + \sqrt{k^2 - u^2}z)} du. \quad (40)$$

При этом для решетки, состоящей из m щелей, при нормальном падении волны на нее

$$g(u) = \text{const} \frac{\sin au}{au} \frac{\sin mDu}{\sin Du}, \quad (40')$$

где $2D = d$ — постоянная решетки, $2a$ — ширина каждой щели. Найдем дифракционную картину на очень большом расстоянии от решетки (при $z \rightarrow \infty$); как можно показать, она подобна той дифракционной картине, которая получится при употреблении линзы в фокальной плоскости последней. Нужно продискутировать и вычислить интеграл (40) для больших значений расстояния $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, предполагая при этом, что k зависит от угла ψ согласно (39): $k = k_0 [1 + \beta (1 - \cos \psi)]$, причем ψ связано с переменной u соотношением $k \sin \psi = u$. Это вычисление, по существу, необходимо при всякой дифракционной задаче (и в случае неподвижной решетки тоже), но в нашем случае необходимость этого расчета выявляется особенно резко. Нужно, таким образом, найти асимптотическое значение интеграла (40) для $r \rightarrow \infty$.

Для этого мы воспользуемся чисто математической теоремой, касающейся асимптотического выражения интеграла вида

$$J = \int_a^b g(u) e^{-ir\Phi(u)} du \quad (41)$$

при $r \rightarrow \infty$. Теорема эта состоит в том, что если в промежутке интегрирования производная $\Phi'(u)$ обращается в нуль, то при

$r \rightarrow \infty$ величина J убывает, как $\frac{1}{\sqrt{r}}$, и для J имеет место приближенное выражение

$$J \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\pm \Phi''(u_0) r}} g(u_0) e^{-i \left[r\Phi(u_0) \mp \frac{\pi}{4} \right]}. \quad (42)$$

Здесь u_0 — значение, для которого $\Phi'(u_0) = 0$. Предполагается при этом, что в промежутке интегрирования лежит только один корень этого уравнения. В формуле (42) нужно брать те или иные знаки в зависимости от знака $\Phi''(u_0)$: если $\Phi''(u_0) > 0$, то верхний знак, если же $\Phi''(u_0) < 0$ — нижний.

Для пояснения этой теоремы заметим, что если $g(u)$ имеет в интервале интегрирования конечное число максимумов и минимумов и непрерывна, то

$$\int g(u) \cos ru \cdot du$$

убывает при $r \rightarrow \infty$, как $1/r$, в чем можно убедиться путем интегрирования по частям. Причину этого легко понять, если учесть, что $\cos ru$ тем чаще меняет знак, чем больше r . Поэтому, чем больше r , тем полнее компенсируют друг друга положительные и отрицательные части интеграла. В результате величина интеграла оказывается порядка этого интеграла, взятого за один период $\cos ru$ (равный $1/r$), и имеет поэтому порядок величины $1/r$.

Для интеграла

$$\int g(u) \cos [r\Phi(u)] du$$

имеет место то же самое, за исключением тех точек, где $\Phi(u)$ меняется очень медленно, т. е. за исключением окрестности точки u_0 , для которой $\Phi'(u_0) = 0$. Дальнейшее исследование интеграла по этой части промежутка интегрирования и приводит к формуле (42).

Применим теперь эту формулу к интегралу, входящему в (40). Мы получим решение, которое даст нам распределение дифракционного поля на очень больших расстояниях от ограниченной решетки. Это решение даст нам ответ на поставленную выше физическую задачу.

Заметим, что асимптотическая формула (42) применима к (40) при условии $r\lambda \gg m^2 D^2$. Применяя (42) к (40), мы полагаем $x = r \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$, где φ — полярный угол точки наблюдения.

Тогда выражение (40) можно написать так:

$$E = \int g(u) e^{-ir\Phi} du, \quad (43)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= k(\psi) \cos(\psi - \varphi), \\ k &\equiv k(\psi) = k_0 [1 + \beta(1 - \cos \psi)], \\ u &= k(\psi) \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Чтобы воспользоваться формулой (42), находим $\Phi'(u)$:

$$\Phi'(u) = \{-k(\psi) \sin(\psi - \varphi) + k'(\psi) \cos(\psi - \varphi)\} \frac{d\psi}{du},$$

где $k'(\psi) = \frac{dk}{d\psi} = k_0 \beta \sin \psi$. Условие $\Phi'(u_0) = 0$ дает уравнение для нахождения соответствующего значения ψ_0

$$k(\psi_0) \sin(\psi_0 - \varphi) - k'(\psi_0) \cos(\psi_0 - \varphi) = 0. \quad (44')$$

Удерживая при вычислении только члены первого порядка относительно β и учитывая, что $k'(\psi_0)$ пропорционально β , получим отсюда

$$\begin{aligned} \psi_0 - \varphi &= \frac{k'(\varphi)}{k_0} = \beta \sin \varphi, \\ u_0 &= k(\varphi) \sin \varphi + k'(\varphi) \cos \varphi = k_0 (1 + \beta) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (45)$$

Далее, с той же точностью

$$\Phi(u_0) = k(\varphi).$$

Значение $\Phi''(u_0)$, входящее в амплитуду, достаточно вычислить, пренебрегая и первыми степенями β ; оно равно тогда

$$\Phi''(u_0) = \frac{1}{k^2 \cos \varphi^2} > 0.$$

Подставляя найденные значения в формулу (42), найдем

$$E = \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{1/2} k \cos \varphi \cdot g(u_0) e^{-i \left[k(\varphi)r - \frac{\pi}{4} \right]},$$

причем u_0 определяется выражением (45).

Для решетки, согласно (40'),

$$g(u_0) = \text{const} \frac{\sin au_0}{au_0} \frac{\sin \frac{mdu_0}{2}}{\sin \frac{du_0}{2}}$$

имеет максимум при значении аргумента

$$u_0 = \frac{2\pi}{d} n,$$

где n — целое. Таким образом, максимумы поля получаются в направлениях, удовлетворяющих условиям

$$u_0 = k(1 + \beta) \sin \varphi_{\max} = \frac{2\pi n}{d},$$

т. е.

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{\lambda_0 n}{d(1 + \beta)} = \frac{\lambda n}{d}.$$

Смещение Допплера будет, следовательно, обнаружено в полном согласии с принципом относительности¹.

При помощи только что изложенных соображений можно решить также один вопрос, касающийся аберрации. Пусть относи-

¹ [Полученный результат связан с тем, что при движении наблюдателя среда является оптически анизотропной, скорость света в ней зависит от направления. В оптически же анизотропной среде, как известно из кристаллооптики, направление луча не совпадает с направлением нормали к волне. Направление от решетки на дифракционный максимум, определяемое углом φ_{\max} , есть направление луча, соответствующего волне, направление нормали к которой, определяемое углом ψ_{\max} , удовлетворяет условию дифракции.

$$k(\psi_{\max}) \cdot \sin \psi_{\max} = \frac{2\pi n}{d}.$$

Легко убедиться в том, что вычисления, которые были проделаны для нахождения угла φ_{\max} при применении асимптотической формулы, совпадают с теми, которые нужно проделать для нахождения луча, соответствующего данной волне, по правилам, обычно приводимым в кристаллооптике.

Действительно, для нахождения направления луча, соответствующего волне направления ψ , нужно, как известно, построить огибающую семейства плоских волн разных направлений и одинаковой фазы (считая, что в начале координат их фазы одинаковы). Направление на точку пересечения двух соседних волн с направлениями ψ и $\psi + d\psi$ и даст направление луча.

Уравнение этого семейства плоских волн в полярных координатах r, φ , очевидно, можно написать так:

$$r\Phi = \text{const},$$

где $\Phi = \Phi(\varphi, \psi)$ имеет то же значение, что и в тексте. Угол ψ — параметр семейства. Направление φ на точку пересечения двух соседних волн с направлениями ψ и $\psi + d\psi$ найдется из уравнения

$$\frac{\partial \Phi(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = 0,$$

совпадающего с (44').]

тельно эфира движется наблюдатель, измеряющий направление света, падающего от звезды. Для простоты заменим трубу, с помощью которой наблюдается звезда, щелью. Скорость света по отношению к наблюдателю равна $c = c_0 (1 + \beta \cos \psi)$. Предполагая, что наблюдатель движется перпендикулярно к лучу света, и проводя наши вычисления для угла наблюдения (угла абберрации) ψ , можно получить хорошо известное значение

$$\psi \approx \sin \psi = \beta = \frac{v}{c_0}.$$

Вопрос возникает в том случае, если допустить в эфире наличие дисперсии. Известно, что все обычные методы измерения скорости света в среде с дисперсией дают *групповую* скорость. Какая скорость c_0 входит в формулу для угла абберрации при наличии дисперсии в эфире? Релей думал, что путем измерения угла абберрации мы, в отличие от других методов, определяем *фазовую* скорость. Однако Эренфест показал, что и в выражении для угла абберрации в диспергирующей среде c_0 — групповая скорость. Этот результат Эренфеста легко получить нашим методом, если учесть, что при наличии дисперсии волны разных направлений будут иметь не только разную длину волны, но и разные частоты¹.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(7. IV 1933 г.)

Опыт, предложенный Эйнштейном, для решения вопроса о волновой или квантовой природе света. О реальности разложения колебаний на синусоидальные. Действие импульса на резонатор. Связь между временем затягивания спектрального аппарата и его разрешающей способностью

Для решения вопроса о том, что представляет собой свет — волны или кванты¹ — Эйнштейн предложил сделать следующий опыт². Мимо щели в экране пролетает частица («каналовая»), излучающая монохроматический свет. Излученный ею и прошед-

¹ П. Эренфест. Ann. Physik, 33, 1571, 1910; Релей. Phil. Mag., 22, 130, 1919 (Sci. Pap., т. VI, стр. 42); М. П. Свешникова. ЖРФХО, 59, 377, 1927.

² А. Эйнштейн. Naturwiss., № 14, 300, 1926; Berl. Ber., 334, 1926.