тельно эфира движется наблюдатель, измеряющий направление света, падающего от звезды. Для простоты заменим трубу, с помощью которой наблюдается звезда, щелью. Скорость света по отношению к наблюдателю равна $c = c_0 (1 + \beta \cos\psi)$. Предполагая, что наблюдатель движется перпендикулярно к лучу света, и проводя наши вычисления для угла наблюдения (угла аберрации) ψ, можно получить хорошо известное значение

$$\psi \approx \sin\psi = \beta = \frac{v}{c_0}.$$

Вопрос возникает в том случае, если допустить в эфире наличие дисперсии. Известно, что все обычные методы измерения скорости света в среде с дисперсией дают *групповую* скорость. Какая скорость c_0 входит в формулу для угла аберрации при наличии дисперсии в эфире? Релей думал, что путем измерения угла аберрации мы, в отличие от других методов, определяем *фазовую* скорость. Однако Эренфест показал, что и в выражении для угла аберрации в диспергирующей среде c_0 — групповая скорость. Этот результат Эренфеста легко получить нашим методом, если учесть, что при наличии дисперсии волны разных направлений будут иметь не только разную длину волны, но и разные частоты[1].

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(7. IV 1933 г.)

Опыт, предложенный Эйнштейном, для решения вопроса о волновой или квантовой природе света. О реальности разложения колебаний на синусоидальные. Действие импульса на резонатор. Связь между временем затягивания спектрального аппарата и его разрешающей способностью

Для решения вопроса о том, что представляет собой свет — волны или кванты[1] — Эйнштейн предложил сделать следующий опыт[2]. Мимо щели в экране пролетает частица («каналовая»), излучающая монохроматический свет. Излученный ею и прошед-

---

[1] *П. Эренфест.* Ann. Physik, 33, 1571, 1910; *Релей.* Phil. Mag., 22, 130, 1919 (Sci. Pap., т. VI, стр. 42); *М. П. Свешникова.* ЖРФХО, 59, 377, 1927.

[2] *А. Эйнштейн.* Naturwiss., № 14, 300, 1926; Berl. Ber., 334, 1926.

ший через щель свет наблюдается спектральным аппаратом (см. рис. 3).

С волновой точки зрения за щелью свет от такой частицы представляет собой оборванный волновой цуг, отрезок синусоиды, т. е. он не будет монохроматичным и будет тем менее монохроматичным, чем меньше время пролета частицы мимо щели. Спектральная линия, излученная частицей, должна оказаться уширенной при наблюдении за щелью.

С точки зрения представления о световых квантах (фотонах) расширения линии не должно быть, так как каждый квант монохроматичен, он может изменить частоту, только изменив свою энергию. При прохождении через щель квант не теряет энергии, значит, за щелью будет монохроматический свет.

Бор указал на то, что и с квантовой точки зрения уширение должно иметь место [1]. Однако мне кажется, что вся постановка вопроса лишена смысла.

Нужно выяснить прежде всего, что значит «монохроматический квант», действие которого ограничено во времени. В волновой теории под монохроматическим светом понимают световые колебания, имеющие вид неограниченной во времени синусоиды. Таким образом, ограниченность во времени и монохроматичность исключают друг друга. В теории световых квант нельзя связать монохроматичность с синусообразностью, поэтому нужно дать какое-то другое определение монохроматичности. Определение монохроматичности, даваемое в волновой теории, содержит в себе возможность экспериментального контроля монохроматичности колебаний, ибо синусоидальная волна дает в спектральном

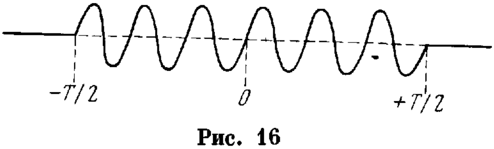

Рис. 16

приборе, например приборе с дифракционной решеткой, резкую линию. Это показывает теория спектральных приборов, основанная на волновых представлениях.

Давая определение монохроматичности в теории световых квант, также необходимо связать это определение с теорией действия спектральных приборов, но основанной на квантовых пред-

[1] [В своих лекциях Л. И. Мандельштам ссылался на опыт, опубликованный Руппом, результаты которого подтверждали наличие уширения. Однако потом работы Руппа оказались дискредитированными, так что теперь ссылка на них не имеет значения.]

ставлениях. Только указание на характер действия аппаратов в рамках данной теории придает физический смысл всем ее утверждениям.

Утверждение Эйнштейна о том, что квант после прохождения через щель даст резкую линию, неизбежно уже содержит молчаливое допущение в отношении механизма действия воспринимающего аппарата.

Рассмотрим вопрос о монохроматичности более подробно, прежде всего с волновой точки зрения. Выясним, как реагирует спектральный аппарат на ограниченный волновой цуг. Колебания для такого ограниченного импульса продолжительности T изображаются функцией (рис. 16).

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \sin nt, && -\frac{T}{2} < t < +\frac{T}{2}, \\ f(t) &= 0, && |t| > \frac{T}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

При этом мы будем считать, что $nT = 2\pi N$, где N — целое число, чем мы обеспечим непрерывность функции $f(t)$ при $t = \pm\frac{T}{2}$; $f(t)$ — нечетная функция. Ее разложение в интеграл Фурье таково:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \sin ut \, du, \\ G(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Разложение $f(t)$ в интеграл Фурье можно написать и в комплексной форме

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iut} \, du, \\ g(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt = \begin{cases} \frac{1}{2i} G(u) & \text{при } u > 0, \\ -\frac{1}{2i} G(-u) & \text{при } u < 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Раньше мы всегда пользовались комплексной формой (48), здесь же естественной является действительная форма (47). Это связано с различием в понятии монохроматичности в отношении пространственной зависимости для волн, с одной стороны, и монохроматичности в отношении зависимости колебаний от времени — с другой, на которое уже указывалось (лекция 6, стр. 50). Для всех задач, касающихся распространения в пространстве волн определенной частоты, естественной является форма, дающая в зависимости от пространственной координаты x (мы говорим о волнах в пространстве одного измерения) разложение на волны типа e^{iux}. Для всех же вопросов, касающихся изменения во времени, естественным является разложение Фурье на действительные синусоиды.

В обоих случаях наблюдаемые величины действительны, и физический смысл имеют действительные числа, а при применении комплексных величин — их действительные (или мнимые) части. Однако в первом случае мы имеем уравнение в частных производных и рассматриваем его решения вида $e^{int}\varphi(x)$. При этом решения, соответствующие $\varphi = e^{iux}$ и $\varphi = e^{-iux}$, имеют разный смысл — это волны, идущие в противоположных направлениях [их действительные части $\cos(nt + ux)$ и $\cos(nt - ux)$, а мнимые $\sin(nt + ux)$ и $\sin(nt - ux)$]. В случае же зависимости колебания от времени e^{int} и e^{-int} изображают колебания, совпадающие или отличающиеся только фазами (их действительные части совпадают, мнимые отличаются только знаком). Таким образом, для первого случая естественным элементом разложения является e^{iux} $(u \lessgtr 0)$ и соответственно комплексная форма интеграла Фурье, для второго же случая элементом является совокупность $\sin nt$ и $\cos nt$ и соответственно действительная форма интеграла. Конечно, и при разложении в зависимости от времени можно пользоваться комплексной формой разложения — математически это иногда удобно, и мы будем это делать,— но здесь эта форма разложения не имеет того значения, как в случае пространственной зависимости.

Простейший спектральный аппарат — это резонатор, у которого можно менять собственную частоту. Примером такого резонатора в радиотехнике является обычный волномер. В оптике в качестве такого аппарата можно применять пары металла, поглощающие свет в области резонансной линии, например пары натрия; частоту поглощающей линии можно при этом изменять, помещая пар в магнитное поле (используя явление Зеемана). Кроме резонатора, спектральным аппаратом является и дифракционная решетка. Действие всех этих аппаратов подчиняется линейным уравнениям, поэтому действие на них любого импульса можно представить как действие составляющих его синусоид. Часто ставят вопрос о «реальности» разложения колебания на синусоидальные составляющие. Что реально в равенстве (47), левая часть или же правая — совокупность синусоид? В такой форме вопрос лишен смысла, так как равенство (47) — это чисто математическое утверждение, т. е. справа и слева стоит одно и то же.

Вопрос приобретает смысл, если его ставят в связи с аппаратами, воспринимающими колебания. В зависимости от свойств рассматриваемого аппарата бывает целесообразным пользоваться либо левой, либо правой частью равенства (47) (или заменяющего его разложения на синусоиды, например ряда Фурье). Поясним это простым примером. Пусть

$$f(t) = (1 + k \cos \omega t) \cos nt. \tag{49}$$

С помощью тригонометрического преобразования $f(t)$ можно представить в виде суперпозиции синусоид

$$f(t) = \cos nt + \frac{1}{2} \cos (n + \omega) t + \frac{1}{2} \cos (n - \omega) t. \tag{50}$$

Будем считать, что $\omega \ll n$. Можно сказать, во-первых, что [согласно (49)] $f(t)$ представляет собой синусообразное колебание с медленно изменяющейся амплитудой и, во-вторых, что [согласно (50)] это суперпозиция синусоидальных колебаний с тремя разными частотами. Очевидно, что и то и другое тождественно. Однако как только мы принимаем во внимание воспринимающий аппарат, то два представления уже не эквивалентны. Опыт с камертоном, звук которого во время распространения по воздуху периодически (с периодом $2\pi/\omega$) прерывается рукой, опускаемой между камертоном и воспринимающим аппаратом, иллюстрирует это. Звуковые колебания, приходящие к аппарату, можно при этом приближенно считать имеющими вид только что рассмотренной функции $f(t)$. Если воспринимающим аппаратом является ухо, то правильно первое представление, так как ухо не разделяет трех тонов (50) и слышит один тон переменной громкости. Если же воспринимающим аппаратом является другой камертон, то правильно второе представление, так как этот второй камертон откликается только в том случае, когда он настроен на одну из трех частот: n, $n + \omega$, $n - \omega$.

Вернемся теперь к вопросу о действии ограниченного волнового цуга (46) на резонатор. Разлагая эту функцию $f(t)$ в интеграл Фурье в форме (48), получим для нее

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n \frac{\sin \frac{(u-n)T}{2}}{u^2 - n^2},$$

так что

$$f(t) = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{(u-n)T}{2}}{u^2 - n^2} e^{iut}\, du. \tag{51}$$

Это наложение бесконечных синусоид, тянущихся от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Но до момента $t = -T/2$ функция $f(t)$ равна нулю. Поэтому до момента $t = -T/2$ колебание не будет действовать ни на какой аппарат. Из этого делают иногда вывод, что синусоиды «нереальны». Однако, учитывая эквивалентность левой и правой частей выражения (51), можно заключить лишь то, что действия всех бесконечных синусоид, на которые разлагается $f(t)$, складываются так, что результатом действия всей их совокупности является нуль для всех моментов $t < -T/2$. Мы докажем сейчас, что для резонатора со сколь угодно малым затуханием это действительно выполняется.

Уравнение колебаний резонатора под действием импульса $f(t)$ имеет вид

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t), \tag{52}$$

где δ — постоянная затухания. Если на резонатор действует сила e^{iut}, то решение будет

$$y_1 = \frac{e^{iut}}{\omega_0^2 - u^2 + 2iu\delta}. \tag{53}$$

Если же на резонатор действует сила

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{iut}\, du,$$

то решение уравнения (52) получится из (53) путем умножения последнего выражения на $\frac{g(u)\,du}{\sqrt{2\pi}}$ и интегрирования

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)\, e^{iut}\, du}{\omega_0^2 - u^2 + 2iu\delta}.$$

Подставим сюда значение (48) для $g(u)$ и, заменяя порядок интегрирования, получим

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(t-\xi)u}\, du}{\omega^2 - u^2 + 2iu\delta}.$$

Это выражение должно быть нулем для $t < -T/2$. Однако для $t > T/2$, т. е. для моментов времени после окончания действия силы, y может и не быть нулем, резонатор будет продолжать колебаться. При доказательстве должен, таким образом, играть существенную роль знак t. Доказательство должно быть «однобоким» — оно должно давать нуль для $t < -T/2$ и может его не давать для $t > T/2$. Для вычисления воспользуемся методом интегрирования по комплексной плоскости и рассмотрим интегрирование по u:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(t-\xi)u}\,du}{\omega_0^2 - u^2 + 2iu\delta}.$$

Будем считать, что $t < -T/2$. Достаточно рассмотреть значения интеграла для значений $\xi > -T/2$, так как при $\xi < -T/2$ $f(\xi) = 0$. Значит, для этих моментов времени $t, t-\xi < 0$. Рассматривая u как комплексную переменную, мы имеем сначала путь интегрирования по действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$. Путь интегрирования можно деформировать и, если в нижней полуплоскости нет полюсов подынтегрального выражения, замкнуть его по бесконечно большому полукругу в нижней полуплоскости (рис. 17). Полюсами подынтегрального выражения будут корни уравнения

$$u^2 - 2i\delta u - \omega_0^2 = 0,$$

которые лежат в верхней, а не в нижней полуплоскости. Таким образом, интересующий нас интеграл равен интегралу по пути, охватывающему нижнюю полуплоскость и, следовательно, равен нулю, так как $t - \xi < 0$ и в этой полуплоскости $\operatorname{Im} u < 0$. Таким образом, $y = 0$ при $t < -T/2$.

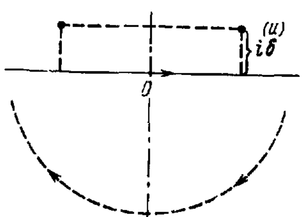

Рис. 17

При этом доказательстве мы нигде не пользовались специальным видом функции $f(t)$, а учитывали лишь то, что она равна нулю для $t < -T/2$. Тот же результат легко получить тем же способом и для любой сколь угодно сложной линейной колебательной системы, используемой в качестве резонатора, если только она работает с потреблением энергии (ее свободные колебания — затухающие). В этом случае полюсы соответствующего выражения будут лежать в верхней полуплоскости и доказательство останется в силе.

Вернемся к решению уравнения для резонатора, на который действует оборванная с обеих сторон синусоида. Пользуясь (51) и (53), получим

$$y = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{(u-n)T}{2}\, e^{iut}\,du}{(u^2-n^2)(\omega_0^2 - u^2 + 2i\delta u)}. \tag{54}$$

Заметим, что этот способ решения задачи в известном смысле специален. Здесь как будто бы не вошли начальные условия, без задания которых решение дифференциального уравнения неопределенно. Мы рассматривали задачу для t от $-\infty$ до $+\infty$ и тем самым учли при решении все воздействия за этот промежуток времени. Легко убедиться, однако, что это решение соответствует начальным условиям $y\left(-\frac{T}{2}\right)=0$, $\dot{y}\left(-\frac{T}{2}\right)=0$. Можно также сказать, что это решение соответствует любым начальным условиям для $t=-\infty$.

Большинство приборов в оптике определяет величину $J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|^2\,dt$. Эта величина грубо приближенно определяет, например, почернение фотопластинки. Если, скажем, я фотографирую резонансное свечение ртутного или натриевого пара под действием монохроматического излучения, действующего на него в течение некоторого времени, то почернение будет определяться именно этим интегралом, распространенным до $+\infty$, так как нужно учесть и затухающее излучение резонаторов — атомов пара — после прекращения освещения. Для вычисления величины J воспользуемся теоремой Релея, согласно которой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f|^2\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g|^2\,du,$$

где g и f — функции, сопряженные по Фурье [согласно (48)]. Тогда, учитывая (54), в нашем случае действия ограниченной синусоиды на резонатор, для величины J получим

$$J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|^2\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g|^2\,du=\frac{2n^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{(u-n)T}{2}\,du}{(u^2-n^2)^2\left[(\omega_0^2-u^2)^2+4\delta^2u^2\right]}.$$

Это выражение позволяет убедиться в том, что значение J существенно зависит от длительности сигнала T по сравнению с временем затухания резонатора $1/\delta$.

Рассмотрим два крайних случая: 1) когда $nT\gg\omega_0/\delta$ и 2) когда $nT\ll\omega_0/\delta$.

В первом из них длительность импульса T очень велика по сравнению с временем затухания $1/\delta$ (n и ω_0 можно считать величинами одного порядка), во втором имеет место обратное соотношение.

В первом случае, когда $nT\gg\omega_0/\delta$ или (что практически то же самое) когда $T\gg1/\delta$, фактор $[(\omega_0^2-u^2)^2+4\delta^2u^2]^{-1}$ мало меняется в интервале значений u ширины порядка $1/T$ вокруг значения $u = n$, в котором $\dfrac{\sin^2\dfrac{(u-n)T}{2}}{(u^2-n^2)^2}$ имеет заметную величину. Поэтому этот фактор можно вынести за знак интеграла, положив в нем $u = n$, так что

$$J = \frac{2n^2}{\pi}\frac{1}{(\omega_0^2-n^2)^2+4\delta^2n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{(u-n)T}{2}}{(u^2-n^2)^2}\,du = \text{const}\,\frac{T}{(\omega_0^2-n^2)^2+4\delta^2n^2}\,.$$

Таким образом, на *распределение* величины J в спектре, т. е. на зависимость J от ω_0, не влияет длительность импульса, и она определяется только свойствами спектрального прибора — затуханием δ нашего резонатора. Распределение J по спектру такое же, как и в случае действия на наш спектральный аппарат бесконечной синусоиды.

В этом случае мы не можем поэтому сделать из спектрального распределения никакого заключения о длительности импульса.

Во втором случае продолжительность импульса мала по сравнению со временем затухания резонатора: $nT \ll \omega_0/\delta$ $(T \ll 1/\delta)$.

Здесь, наоборот, медленно меняется множитель $\dfrac{\sin\dfrac{(u-n)T}{2}}{(u^2-n^2)^2}$.

Поэтому мы можем вынести его из-под знака интеграла, положив в нем значение u равным ω_0, для которого второй множитель $[(\omega_0^2-u^2)^2+4\delta^2u^2]^{-1}$ имеет максимум.

Тогда

$$J = \frac{2n^2}{\pi}\frac{\sin^2\dfrac{(\omega_0-n)T}{2}}{(\omega_0^2-n^2)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\omega_0^2-u^2+4\delta^2u^2} = \text{const}\,\frac{\sin^2\dfrac{(\omega_0-n)T}{2}}{(\omega_0^2-n^2)^2}\,.$$

Итак, в этом случае J оказывается пропорциональным квадрату коэффициента Фурье функции $f(t)$, действующей на резонатор. Распределение J в спектре определяется теперь не свойствами спектрального аппарата, а длительностью действующего на аппарат импульса и его формой. Таким аппаратом можно изучить свойства импульса, так как он дает распределение спектра импульса. Чем меньше будет длительность импульса T, тем расплывчатей получится спектральное распределение в аппарате; ширина этого распределения Δn порядка $1/T$.

В промежуточном случае распределение в спектре аппарата будет определяться и свойствами импульса, и свойствами аппарата.

Таким образом, разрешающая способность резонатора как спектрального аппарата определяется временем его затухания $T_1 = 1/\delta$. Это его «временная постоянная». Условие разрешения для данного прибора можно записать в виде $T_1 \gtrsim T$, где T — по-прежнему длительность исследуемого импульса, или же вводя разность частот в спектре, которую надо разрешить,—в виде $\Delta n \cdot T_1 \gtrsim 1$. Но чем больше время затухания резонатора T_1, тем больше нужно времени, чтобы установилась амплитуда вызванных исследуемым импульсом колебаний, тем больше время, требуемое для измерения с таким аппаратом.

Итак, мы приходим к выводу, что *время, нужное для того, чтобы спектральным аппаратом — резонатором — произвести измерение, тем больше, чем больше его разрешающая сила — острота настройки*. Другими словами, чем точнее нужно определить спектр импульса, тем более длительным должен быть процесс измерения.

Это положение, показанное нами для резонатора, справедливо для *любого* спектрального прибора. Мы докажем его еще для дифракционной решетки.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25.IV 1933 г.)

Разрешающая способность и время затягивания дифракционной решетки. Спектральные приборы создают периодичность. Доказательство того, что предложенный Эйнштейном опыт не есть experimentum crucis. Объяснение дифракции в рамках теории световых квантов

Мы рассмотрели действие резонатора как спектрального аппарата. Рассмотрим теперь другой спектральный аппарат — дифракционную решетку. Как известно, разрешающая способность решетки определяется числом периодов в ней. Если a — длина решетки, d — ее период, то $m = \frac{a}{d}$. Разрешение двух частот, n и $n + \Delta n$, в спектре первого порядка возможно, если $\frac{n}{\Delta n} < m$. В применении к анализу спектра оборванной синусоиды длины T это приводит к следующему условию, при котором можно по уши-