

Таким образом, разрешающая способность резонатора как спектрального аппарата определяется временем его затухания  $T_1 = 1/\delta$ . Это его «временная постоянная». Условие разрешения для данного прибора можно записать в виде  $T_1 \geq T$ , где  $T$  — по-прежнему длительность исследуемого импульса, или же вводя разность частот в спектре, которую надо разрешить, — в виде  $\Delta\nu \cdot T_1 \geq 1$ . Но чем больше время затухания резонатора  $T_1$ , тем больше нужно времени, чтобы установилась амплитуда вызванных исследуемым импульсом колебаний, тем больше время, требуемое для измерения с таким аппаратом.

Итак, мы приходим к выводу, что *время, нужное для того, чтобы спектральным аппаратом — резонатором — произвести измерение, тем больше, чем больше его разрешающая сила — острота настройки*. Другими словами, чем точнее нужно определить спектр импульса, тем более длительным должен быть процесс измерения.

Это положение, показанное нами для резонатора, справедливо для *любого* спектрального прибора. Мы докажем его еще для дифракционной решетки.

## ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25.IV 1933 г.)

*Разрешающая способность и время затягивания дифракционной решетки. Спектральные приборы создают периодичность. Доказательство того, что предложенный Эйнштейном опыт не есть experimentum crucis. Объяснение дифракции в рамках теории световых квантов*

Мы рассмотрели действие резонатора как спектрального аппарата. Рассмотрим теперь другой спектральный аппарат — дифракционную решетку. Как известно, разрешающая способность решетки определяется числом периодов в ней. Если  $a$  — длина решетки,  $d$  — ее период, то  $m = \frac{a}{d}$ . Разрешение двух частот,

$\nu$  и  $\nu + \Delta\nu$ , в спектре первого порядка возможно, если  $\frac{\nu}{\Delta\nu} < m$ . В применении к анализу спектра оборванной синусоиды длины  $T$  это приводит к следующему условию, при котором можно по уши-

рению в спектре обнаружить обрыв синусоиды:

$$nT < m.$$

Понятие о времени затухания спектрального прибора  $T_1$  может быть перенесено и на решетку, у которой, так же как и у резонатора, есть определенная «временная постоянная». Действительно, за решеткой импульс длится то же самое время, что и до нее, только в том случае, если мы наблюдаем в направлении, перпендикулярном к решетке. При наблюдении же под углом длительность сигнала, измененного действием решетки, будет больше, чем до нее, так как волны, приходящие от разных точек решетки, имеют разность хода. Время затягивания равно  $T_1 = \frac{r}{c}$ , где (рис. 18)  $r$  — разность хода для волн, идущих от краев решетки. Это и есть временная постоянная решетки. Учитывая, что для спектра первого порядка  $\frac{r}{\lambda} = \frac{a}{d} = m$ , а значит,

$$T_1 = \frac{\lambda m}{c} = 2\pi \frac{m}{n},$$

условие разрешения двух частот,  $n$  и  $n + \Delta n$ , можно записать так:

$$\Delta n \cdot T_1 \geq 1,$$

а условие для возможности обнаружить влияние продолжительности сигнала на его спектр так:

$$T_1 \geq 2\pi T.$$

Оба эти условия (отвлекаясь от численного множителя  $2\pi$ , связанного с некоторым произволом в определении  $T_1$ ) совпадают с таковыми для резонатора. Это общие условия, годные в таком виде для любого спектрального аппарата. Таким образом, связь между временем, нужным для измерения спектральным аппаратом и определяемым его временной постоянной, и его разрешающей способностью носит общий характер и относится к любому спектральному аппарату. Нельзя построить спектральный аппарат с малым временем затягивания и большой разрешающей способностью.

Эти общие соображения позволяют разрешить следующий вопрос. Пусть на дифракционную решетку падает сигнал, имеющий вид, изображенный на рис. 19: периодически (с периодом  $T$ ) следующие друг за другом отрезки синусоиды частоты  $n$ , чередующиеся с перерывами в сигнале. Разлагая такую функцию в ряд Фурье, получим совокупность частот  $n \pm m\omega$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

При достаточной разрешающей способности решетки в спектральном приборе мы получим равноотстоящие линии. Это значит, что в тех местах, где получаются эти линии, колебания будут незатухающими синусоидами. Но ведь в промежутках времени между отрезками синусоид на прибор не попадало никакого излучения! Теперь этот парадокс разрешается легко: дело в том, что решетка реагирует на сигнал не синхронно, она затягивает сигналы, перекрывая благодаря этому «зоны молчания» падающего излучения.

Вообще периодичность, имеющаяся в отдельных монохроматических линиях спектра импульса, разрешенного решеткой или другим спектральным аппаратом, создана самим этим аппаратом. Пусть, например, на решетку падает импульс, имеющий вид отдельного короткого толчка. При действии решетки получаются цвета, т. е. периодические колебания. Решетка! повторит! сигнал  $m$  раз — по числу ее штрихов, и, например, красный цвет мы увидим в том месте, где период между каждым повторением импульса равен периоду красного света.

Остановимся теперь еще на одном общем вопросе, связанном с распространением несинусоидальных импульсов на плоскости (в двух измерениях) и в пространстве трех измерений. Мы рассматривали до сих пор дифракционные задачи в основном для двух измерений. Такое упрощение было вполне допустимо, потому что для синусообразных колебаний разница между плоским и пространственным случаем незначительна. Теперь мы перешли к распространению импульсов. Для распространения немонахроматических импульсов различия, которые получаются при двух и при

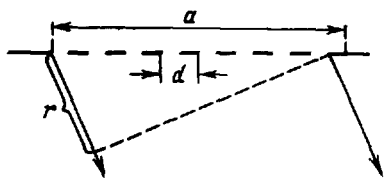


Рис. 18

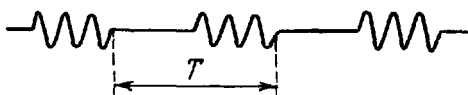


Рис. 19

трех измерениях, оказываются более существенными. Вообще распространение импульса в пространстве нечетного числа измерений (1, 3...) имеет несколько иной характер, чем в пространстве четного числа измерений (2, 4, ...). Для нечетного числа измерений у распространяющегося импульса есть не только резкое начало, но и резкий конец. Для четного же числа измерений есть резкое начало импульса, но нет резкого конца.

Чтобы выяснить этот вопрос, поставим его несколько иначе. Пусть мы имеем волновое уравнение в трех измерениях

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (55)$$

Если  $\varphi$  не зависит от  $y$ , то получаем волновое уравнение в двух измерениях

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (56)$$

к которому мы пришли бы сразу, если бы рассматривали, например, колебания мембраны.

В трехмерном случае дело обстоит так: пусть в начальный момент в безграничной трехмерной среде задано возмущение

$$\varphi(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad \dot{\varphi}(x, y, z, 0) = F(x, y, z).$$

Мы можем тогда найти возмущение  $\varphi(x, y, z, t)$  для любого момента времени  $t$ . Решение этой задачи — интегрирование волнового уравнения (55) в трех измерениях при заданных начальных условиях — было дано Пуассоном<sup>1</sup>. Оно дает определенную картину распространения возмущения и сводится к следующему. Пусть первоначально возмущение ограничено определенной конечной областью пространства  $G$ . Вокруг точки  $P$  (с координатами  $x, y, z$ ), для которой мы хотим определить  $\varphi(x, y, z, t)$ , надо описать сферу  $S_t$ , радиус которой  $r$  равен  $ct$ ; он растет со временем со скоростью  $c$ . До момента  $t_1 = \frac{r_1}{c}$  (см. рис. 20), в который эта сфера  $S_t$  коснется области  $G$ , поле  $\varphi$  в точке  $P$  будет нулем. Оно отлично от нуля только в те моменты времени  $t$ , когда сфера  $S_t$  пересекает область  $G$  (конечно, в отдельные моменты оно может при этом обращаться в нуль). После же момента  $t_2 = \frac{r_2}{c}$ , когда вся область первоначального возмущения  $G$  окажется внутри сферы  $S_t$ , поле в точке  $P$  опять будет равно нулю.

Таким образом, возмущение в  $P$  начинается в момент  $t_1 = \frac{r_1}{c}$  и кончается в момент  $t_2 = \frac{r_2}{c}$  (где  $r_1$  и  $r_2$  — наименьшее и наибольшее расстояния от точки  $P$  до точек области  $G$ ). Значит, при распространении импульса в трех измерениях у такой волны есть резко выраженный передний фронт и резко выраженный обрыв в конце ее.

Иначе обстоит дело в плоском (двухмерном) случае, когда  $\varphi$  — решение уравнения (56). Чтобы свести решение задачи в этом слу-

<sup>1</sup> Релей. Теория звука, т. II, § 273.

чае не только что рассмотренное решение для трехмерного случая, рассуждаем так. Будем считать, что в трехмерном случае начальное возмущение не зависит от  $y$

$$\varphi(x, y, z, 0) = f(x, z), \quad \dot{\varphi}(x, y, z, 0) = F(x, z).$$

Тогда, очевидно, и для всего дальнейшего времени поле  $\varphi$  не будет зависеть от  $y$  и  $\varphi$  будет удовлетворять двумерному уравнению (56). В трехмерном пространстве это значит, что первоначальное возмущение заполняло бесконечный цилиндр  $G$  с направляющими по оси  $y$ . Чтобы решить, что будет происходить в какой-нибудь точке  $P$ , можно в трехмерном пространстве провести приведенное построение со сферой  $S_t$ . Пока сфера  $S_t$  не коснется ближайшей к  $P$  точки образующей цилиндра  $G$ , поле  $\varphi$  в точке  $P$  будет равно нулю. Таким образом, резкий передний фронт существует и в этом случае. Но теперь никогда не будет такого момента, когда *весь* цилиндр  $G$  будет внутри сферы  $S_t$ . Значит, резкого обрыва, резкого конца импульса в этом случае не будет. У двумерной волны есть, так сказать, хвост, который никогда

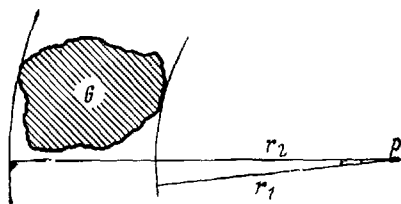


Рис. 20

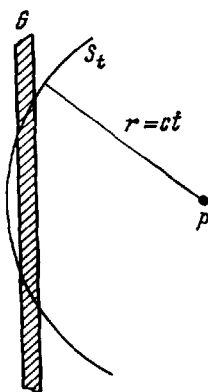


рис. 21

не пропадает. Этим распространение волн в двух измерениях резко отличается от распространения в трех измерениях.

Наше рассуждение наглядно, но может показаться неубедительным, так как тот же переход можно сделать от трех измерений и к одному измерению. Нужно только принять, что начальное возмущение, а следовательно и поле, для любого момента времени зависит только от одной координаты  $x$ . В этом одномерном случае вся область начального возмущения (имеющая вид слоя, ограниченного двумя плоскостями, перпендикулярными к оси  $x$ )

тоже никогда не будет находиться внутри сферы  $S_t$ . Между тем для одномерного случая резкий обрыв в конце импульса есть. Это объясняется тем, что после прохождения сигнала, когда сфера находится в положении, показанном на рис. 21, получается такая компенсация, что для всех этих моментов  $\varphi$  в точке  $P$  — нуль, и поэтому резкий обрыв получается. Для двух измерений такой компенсации не получается.

Во всяком случае, более точное исследование показывает, что при нечетном числе измерений пространства обрыв в конце импульса есть, а при четном числе измерений его нет<sup>1</sup>.

Вернемся теперь к опыту, предложенному Эйнштейном (лекция 8, стр. 59). Посмотрим, в какой степени при постановке опыта можно соблюсти условие  $T \ll T_1$ , необходимое для надежного наблюдения уширения линии. Вместо щели можно взять дифракционную решетку. Ее период, соответствующий ширине щели, может быть порядка  $d = 10^{-3}$  см. Скорость канальных частиц, служащих источником света, порядка  $10^8$  см/сек. Тогда время пролета  $T$  будет порядка  $10^{-11}$  сек. Если взять в качестве спектрального аппарата решетку размером 5 см, то  $T_1 = \frac{5}{3 \cdot 10^{10}} \approx 2 \cdot 10^{-10}$ . Следовательно, условие  $T < T_1$  можно осуществить даже без применения интерференционных спектральных аппаратов и обнаружить уширение возможно.

Однако Бор показал, что и с точки зрения теории световых квантов должно получиться то же самое, что с волновой точки зрения, так что, в сущности, опыт, предложенный Эйнштейном, ничего не решает (нужно, конечно, иметь в виду, что сейчас [1933 г.] весь вопрос имеет лишь историческое значение; предложение Эйнштейна относится к 1926 г.).

Рассуждения Бора сводятся к следующему. Интересующий нас случай источника света, движущегося относительно щели и относительно наблюдателя со спектральным аппаратом, очевидно, эквивалентен (по принципу относительности) случаю, когда щель и наблюдатель движутся относительно покоящегося источника света. Мы уже рассматривали с точки зрения волновой теории (лекция 7) дифракцию на движущейся щели и видели, что получающаяся при этом картина отличается от картины дифракции на покоящейся щели только наличием явления Доплера для всех волн. Интересующий нас случай, когда и решетка и наблюдатель движутся, получится отсюда переходом к движущейся вместе со щелью системе координат, что вызовет доплеровское смещение частот всех волн. Таким образом, волновое объяснение

<sup>1</sup> П. С. Эренфест. Ann. Physik, 1917; см. также Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. ГТТИ, 1945, т. II, гл. VI, § 9.

опыта Эйнштейна основано на наличии, во-первых, явления дифракции, и, во-вторых, явления Допплера. Но оба эти явления — и эффект Допплера и дифракция — объясняются с точки зрения теории световых квантов и при этом получаются те же формулы, что и с волновой точки зрения, а значит, говорит Бор, опыт Эйнштейна по теории световых квантов должен дать тот же результат, что и по волновой теории.

Объяснение явления дифракции с точки зрения теории световых квантов было дано в работе Эйнштейна и Эренфеста и состояло в следующем<sup>1</sup>. Они вывели прежде всего соотношение для направления лучей, дифрагированных решеткой,

$$\sin \varphi - \sin \varphi_0 = \frac{m\lambda}{d} \quad (57)$$

путем применения к световым квантам и решетке законов сохранения энергии и импульса и основного соотношения старой боровской квантовой механики. Дифракция рассматривалась при этом как соударения светового кванта и решетки. До соударения энергия светового кванта равна  $h\nu$ , а слагающая импульса, параллельная плоскости решетки, есть

$$p_x^0 = \frac{h\nu}{c} \sin \varphi_0.$$

Решетка до столкновения покоится, импульс ее — нуль. После столкновения  $x$ -компонента импульса кванта равна

$$p_x = \frac{h\nu}{c} \sin \varphi,$$

а компонента импульса решетки, получившей при ударе скорость с  $x$ -компонентой  $v$ , равна  $Mv$ , где  $M$  — масса решетки. Так как масса решетки  $M$  очень велика, то скорость ее  $v$  ничтожна. По-

этому энергией, переданной решетке, можно пренебречь и считать, что энергия кванта, а значит, и его частота при дифракции не изменяются. Закон сохранения импульса для  $x$ -компоненты его дает условие

$$p_x + Mv = p_x^0,$$

или

$$\frac{h\nu}{c} \sin \varphi + Mv = \frac{h\nu}{c} \sin \varphi_0. \quad (58)$$

<sup>1</sup> P. Epstein, P. Ehrenfest. Proc. Nat. Ac. USA, 10, 133, 1924.

После удара решетка движется по оси  $x$  с постоянной скоростью. Прохождение ее штрихов — периодический процесс. По старой квантовой механике для периодического движения должно выполняться условие

$$\int P_x dx = mh,$$

где интеграл от импульса  $P_x$  системы, совершающей периодическое движение, нужно взять за период,  $m$  — целое положительное число. В нашем случае  $P_x = Mv$ ,  $\int P_x dx = Mvd$ , где  $d$  — период решетки. Поэтому  $Mv = \frac{mh}{d}$ . Подставляя это значение  $Mv$  в (58), получаем дифракционную формулу (57).

Эта теория, как и вся старая боровская квантовая теория, не может решить, какие целые значения  $m$  возможны для данной решетки, и не может дать распределения интенсивности по дифракционным спектрам разных порядков.

Вопросы, связанные с интенсивностями линий в спектре атома, разрешались в старой боровской теории с помощью «принципа соответствия». Этот принцип постулировал, что интенсивности линий в спектре пропорциональны коэффициентам Фурье «соответствующих» членов разложения электрического момента атома, рассчитанного по классической механике. Эпштейн и Эренфест перенесли принцип соответствия на задачу о дифракции. Они говорят: будем считать, что интенсивность дифракционного спектра  $m$ -го порядка определяется, как и в классической волновой теории Релея, квадратом  $m$ -го коэффициента Фурье разложения «пропускающей способности» решетки (т. е. поля на ней).

Таким образом, дифракция объяснялась с точки зрения теории световых квантов. Так же обстоит дело и с эффектом Допплера, который объясняется в рамках этих представлений на основании применения законов сохранения<sup>1</sup>. Следовательно, оба явления, достаточные, как показывает рассуждение Бора, для того чтобы в опыте Эйнштейна наблюдалось уширение линии, находят свое объяснение и в теории световых квантов. Таким образом, опыт, предложенный Эйнштейном, не является *experimentum crucis* для волновой и корпускулярной теории света.

Однако меня не удовлетворяет объяснение Бора, и я считаю, что это не очень глубокое освещение вопроса. На вопрос о том,

<sup>1</sup> E. Schrödinger. Phys. Zs., 23, 301, 1922; A. Sommerfeld. Atombau und Spektrallinien (изд. 1931 г.), гл. 1, § 7.



что же делается с монохроматическим светом, если его прерывают, теория световых квантов все же не давала ясного ответа. Этот вопрос, мне кажется, нужно было бы рассматривать в связи с квантовой теорией спектральных аппаратов.

## ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(13.V 1933 г.)

*Модуляция частоты. Некоторые задачи из области интерференции света.  
Задача о распространении радиоволн по поверхности Земли.  
Оптический вентиль*

Рассмотрим вопрос о *модуляции частоты*, который в последнее время приобрел интерес не только для беспроволочной телеграфии, но также и для оптики.

Пусть мы имеем маятник, длина которого (или сила тяжести) периодически и достаточно медленно изменяется с течением времени. Аналогичную систему можно осуществить и для электрических колебаний, если у электрического контура периодически изменять самоиндукцию или емкость. Период маятника, зависящий от длины, будет в этом случае изменяться во времени и, следовательно, колебания не будут гармоническими, так как гармонические колебания — это колебания по закону  $a \sin (nt + \gamma)$ , где  $n$  — постоянная. Если же  $n$ , как в нашем случае, является функцией времени, то это уже не гармонические колебания.

Частота колебаний в нашем случае будет  $\sqrt{\frac{g}{l}} = f(t)$ , она — функция времени. Часто колебания с такой частотой записывают в виде

$$y = a \sin (f(t) \cdot t + \gamma),$$

что, конечно, неправильно. Как же правильно написать выражение для колебаний с переменной частотой? Чтобы решить это, обратимся к школьному изложению вопроса о гармонических колебаниях, как о движении проекции точки, движущейся равномерно по кругу. Координата  $y$  выразится, как  $y = a \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — полярный угол точки,  $a$  — радиус круга. Число оборотов в единицу времени равно  $\dot{\varphi}/2\pi$ , а циклическая частота  $n$  равна  $\dot{\varphi}$ . Если  $\dot{\varphi}$  постоянна, то  $\varphi = nt + \text{const}$  и мы имеем обычное гармоническое колебание.