ния и методов определения скорости, ускорения и других кинематических величин точек, составляющих механическую систему.

§ 2. Кинематика точки

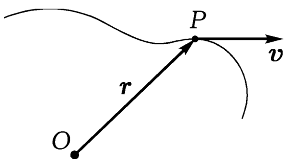

Рис. 1

4. Векторный способ задания движения точки. Рассмотрим движение материальной точки P относительно некоторого тела, которое считается неподвижным. Пусть O — точка, принадлежащая этому телу. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ движущейся точки P относительно O можно задать как вектор-функцию времени: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. С течением времени конец вектора $\boldsymbol{r}$ описывает траекторию точки (рис. 1). Производная от $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{1}$$

называется *скоростью точки* P. Производная от $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{2}$$

называется *ускорением точки* P.

5. Координатный способ задания движения точки. Пусть $Oxyz$ — неподвижная декартова прямоугольная система координат, а $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты ее осей Ox, Oy, Oz. Тогда вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ может быть задана тремя скалярными функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координатами точки P:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}.$$

При этом для скорости имеем выражение

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

где $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ — проекции скорости $\boldsymbol{v}$ на оси Ox, Oy, Oz.[1] Величина скорости v и ее направление определяются равенствами

$$\begin{gathered} v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) = \frac{\dot{x}}{v}, \qquad \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \frac{\dot{y}}{v}, \qquad \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = \frac{\dot{z}}{v}. \end{gathered} \tag{4}$$

[1] Производная по t какой-либо величины, являющейся функцией аргумента t, часто обозначается точкой над соответствующим символом, обозначающим эту величину.

Аналогично для ускорения $\boldsymbol{w}(t)$ получаем

$$\boldsymbol{w}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = w_x\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j} + w_z\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

где $w_x = \ddot{x}$, $w_y = \ddot{y}$, $w_z = \ddot{z}$ — проекции $\boldsymbol{w}$ на оси Ox, Oy, Oz. И тогда

$$w = |\boldsymbol{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$
$$\cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{i}) = \frac{\ddot{x}}{w}, \qquad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{j}) = \frac{\ddot{y}}{w}, \qquad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{k}) = \frac{\ddot{z}}{w}. \tag{6}$$

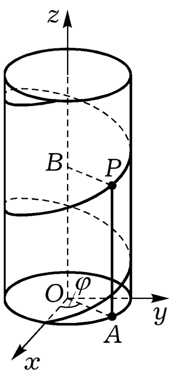

Рис. 2

Пример 1. *Задан закон движения точки P:*

$$x = a\cos bt, \qquad y = a\sin bt, \qquad z = ct,$$

где a, b, c — постоянные. Найдем траекторию, скорость и ускорение точки.

Из первых двух равенств, возведя их в квадрат и сложив, получим

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это показывает, что точка движется по поверхности цилиндра радиуса a, ось которого совпадает с осью Oz (рис. 2).

Пусть φ — угол между проекцией OA радиуса-вектора $\overline{OP}$ на плоскость Oxy и осью Ox. Тогда

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad \varphi = bt,$$

а $z = c\varphi/b$. Следовательно, прямая OA равномерно вращается, а точка P равномерно перемещается по образующей AP. Таким образом, точка P движется по винтовой линии.

Определим скорость точки P. Имеем

$$\dot{x} = -ab\sin bt, \qquad \dot{y} = ab\cos bt, \qquad \dot{z} = c;$$
$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2b^2 + c^2}.$$

Величина скорости постоянна, но направление скорости изменяется со временем.

Найдем ускорение точки. Имеем

$$\ddot{x} = -ab^2\cos bt, \qquad \ddot{y} = -ab^2\sin bt, \qquad \ddot{z} = 0;$$
$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = ab^2,$$
$$\cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{i}) = -\cos bt, \qquad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{j}) = -\sin bt, \qquad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{k}) = 0.$$

Ускорение имеет постоянную величину и направлено по внутренней нормали цилиндра (от P к B; отрезок PB параллелен AO).

6. Естественный способ задания движения точки. Пусть в пространстве задана кривая, по которой движется точка P. Для определения положения точки P на ее траектории возьмем произвольную точку O_1 кривой за начало отсчета дуг и зададим положительное направление отсчета (рис. 3). Каждому положению точки P поставим в соответствие свою дуговую координату σ, аналогично тому как на прямолинейной оси каждой точке отвечает своя абсцисса. Величина σ будет положительной или отрицательной в зависимости от направления отсчета дуг; при этом длина дуги O_1P равна $|\sigma|$. Если $\sigma = \sigma(t)$ — известная функция времени, то движение точки P задано. Такой способ задания движения точки называется *естественным.* При этом мы будем предполагать, что $\sigma(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

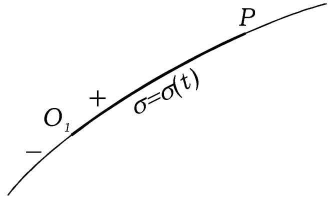

Рис. 3

Получим выражения для скорости и ускорения точки P при естественном способе задания движения. Введем естественный трехгранник, образованный единичными векторами $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$, составляющими правую тройку (рис. 4). Векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$ лежат в соприкасающейся плоскости траектории в точке P и направлены соответственно по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуг и по главной нормали траектории в сторону ее вогнутости, вектор $\boldsymbol{b}$ направлен по бинормали траектории в точке P.

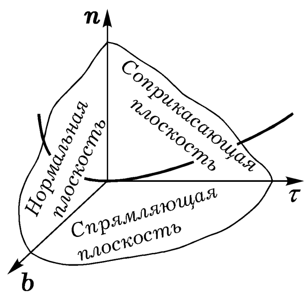

Рис. 4

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки P относительно какой-либо фиксированной точки будет сложной функцией времени: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma(t))$. Из дифференциальной геометрии известно, что

$$\boldsymbol{\tau}(\sigma) = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}(\sigma), \tag{7}$$

где ρ — радиус кривизны траектории в точке P. Используя определения (1) и (2) скорости и ускорения, получаем при помощи (7)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = v_\tau \boldsymbol{\tau}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho}\boldsymbol{n}. \tag{9}$$

Здесь введено обозначение $v_\tau = \dot{\sigma}$. Величина v_τ положительна, если точка P движется в положительном направлении отсчета дуг O_1P, и отрицательна в противном случае; $v = |v_\tau|$. Согласно (8), скорость всегда направлена по касательной к траектории.

Из (9) следует, что ускорение всегда лежит в соприкасающейся плоскости. Его можно записать в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_\tau + \boldsymbol{w}_n, \qquad \boldsymbol{w}_\tau = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{w}_\tau$ — *касательное* (*тангенциальное*) *ускорение*, а $\boldsymbol{w}_n$ — *нормальное ускорение точки.* Формулы (10) выражают теорему Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное. Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, а нормальное — ее направления.

Величина ускорения определяется равенством

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2}.$$

Если $v = \text{const}$, то движение точки называется равномерным. Движение будет ускоренным или замедленным в зависимости от того, возрастает или убывает величина скорости. Так как $v^2 = v_\tau^2 = \dot{\sigma}^2$, то $dv^2/dt = 2\dot{\sigma}\ddot{\sigma}$. Отсюда следует, что движение будет ускоренным, если знаки величин $\dot{\sigma}$ и $\ddot{\sigma}$ одинаковы, и замедленным, если их знаки противоположны. Если на интервале времени $t_1 < t < t_2$ $\ddot{\sigma} = 0$ $(w_\tau \equiv 0)$, то на этом интервале движение равномерное. Если на каком-то интервале $w_n = 0$, а $v \neq 0$, то на этом интервале движение прямолинейное $(\rho = \infty)$.

Замечание 1. *Из соотношений* (8) *и* (9), *в частности, следует, что если вместо одной декартовой системы координат мы возьмем другую декартову систему координат, неподвижную относительно первой, то изменится векторное уравнение* $\boldsymbol{r} = r(t)$ *движения точки* P, *но скорость и ускорение не изменятся.*

Пример 1. *Используя теорему Гюйгенса, найдем радиус кривизны эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в произвольной его точке.

Будем рассматривать эллипс как траекторию материальной точки с законом движения

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Из равенства

$$w^2 = \frac{v^4}{\rho^2} + w_\tau^2$$

получаем такое выражение для радиуса кривизны:

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}.$$

Учитывая, что

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t},$$

$$(w_\tau)^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 t \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

получаем следующее выражение для радиуса кривизны как функции t:

$$\rho = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

В частности, в вершинах эллипса, лежащих на оси Ox *(для них* $t = 0, \pi$*),* $\rho = b^2/a$*, а в вершинах, лежащих на оси* Oy *(для них* $t = \pi/2, 3\pi/2$*),* $\rho = a^2/b$*.*

7. Круговое движение. Пусть точка движется по окружности радиуса R. Тогда (см. рис. 5) $\sigma = R\varphi$. Из (8) и (10) следует, что

$$\boldsymbol{v} = R\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{w}_\tau = R\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} = \dot{\varphi}^2 R\boldsymbol{n}.$$

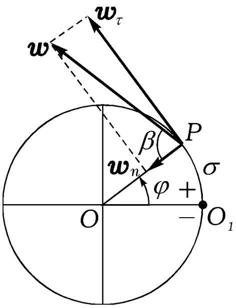

Рис. 5

Величины $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ называются соответственно угловой скоростью и угловым ускорением радиуса OP (см. также п. 25). Введем обозначения $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = \varepsilon$. Тогда для величины ускорения точки P получаем выражение

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол β между полным ускорением точки $\boldsymbol{w}$ и ее нормальным ускорением (рис. 5) находится из равенства

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

При равномерном круговом движении $\varepsilon = 0$ и $\beta = 0$.

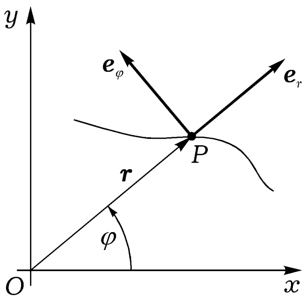

Рис. 6

8. Скорость и ускорение точки в полярных координатах. Пусть движение точки происходит в заданной плоскости. Помимо декартовых координат $x(t)$, $y(t)$ движение может быть задано, например, при помощи полярных координат (рис. 6). Пусть заданы функции $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Найдем скорость и ускорение точки P.

Пусть $\boldsymbol{e}_r$ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ точки P относительно O в сторону возрастания величины r, а $\boldsymbol{e}_\varphi$ — вектор, получающийся из $\boldsymbol{e}_r$ поворотом последнего на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Единичные векторы $\boldsymbol{e}_r$ и $\boldsymbol{e}_\varphi$ задают направления двух взаимно перпендикулярных осей: радиальной и трансверсальной соответственно. В системе координат Oxy векторы $\boldsymbol{e}_r$ и $\boldsymbol{e}_\varphi$ можно записать в следующем виде[1]:

$$\boldsymbol{e}_r' = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \boldsymbol{e}_\varphi' = (-\sin\varphi, \cos\varphi). \tag{11}$$

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то в системе координат Oxy имеем

$$\boldsymbol{v}' = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi), \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{w}' = (\ddot{x},\ \ddot{y}) = ((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi,\\ (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi).\end{gathered} \tag{13}$$

Проекции v_r и v_φ скорости на радиальную и трансверсальную оси называются соответственно *радиальной* и *трансверсальной скоростями*. Из (11) и (12) имеем

$$v_r = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_r) = \dot{r}, \quad v_\varphi = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_\varphi) = r\dot{\varphi}. \tag{14}$$

Для проекций ускорения аналогично получаем

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \qquad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{15}$$

Пример 1. *Движение точки задано в полярных координатах:*

$$r = at,\ \varphi = bt \qquad (a, b = \text{const}).$$

Найдем траекторию, скорость и ускорение точки.

[1] Здесь, как и всюду в дальнейшем, под векторами мы понимаем векторы-столбцы. Штрихом обозначается операция транспонирования.

Исключив из данных равенств время t, получим уравнение траектории $r = a\varphi/b$. Эта кривая называется спиралью Архимеда; у нее величина радиуса-вектора пропорциональна величине полярного угла. Далее имеем

$$\dot{r} = a,\ \dot{\varphi} = b,\ \ddot{r} = 0,\ \ddot{\varphi} = 0.$$

Поэтому радиальная скорость v_r постоянна и равна a, трансверсальная скорость $v_\varphi = abt$. Для величины скорости получаем $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = a\sqrt{1+b^2t^2}$. Для радиального и трансверсального ускорений из (15) *получаем выражения $w_r = -ab^2t$, $w_\varphi = 2ab$. Величина ускорения определяется равенством*

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = ab\sqrt{4+b^2t^2}.$$

9. Криволинейные координаты. В предыдущем пункте мы видели, что движение точки по плоскости не обязательно задается только декартовыми координатами; можно, например, задавать движение в полярных координатах. Вообще, всякие три числа q_1, q_2, q_3, однозначно определяющие положение точки в пространстве, можно рассматривать как координаты этой точки. Эти числа, в отличие от прямолинейных декартовых координат, называют *криволинейными координатами*. Движение точки считается заданным, если ее криволинейные координаты q_i $(i = 1, 2, 3)$ — известные функции времени $q_i(t)$.

Связь между декартовыми и криволинейными координатами задается равенством

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1,\ q_2,\ q_3) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{16}$$

где x, y, z — функции q_1, q_2, q_3, которые считаем дважды непрерывно дифференцируемыми. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ — сложная функция времени: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t))$.

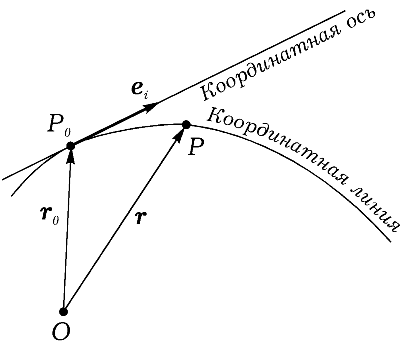

Рис. 7

Пусть P_0 — какая-либо точка в пространстве, ее криволинейные координаты обозначим q_{10}, q_{20}, q_{30}. *Первой координатной линией*, проходящей через P_0, назовем кривую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$, получающуюся из (16) при фиксированных q_2, q_3 и при изменении q_1 в некотором интервале. Аналогично определяются *вторая и третья координатные линии*. Касательную к i-ой координатной линии в точке P_0 называют i-й *координатной осью*, проходящей через P_0. Единичный вектор i-й координатной оси (рис. 7) может быть записан в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k}, \\ H_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}.\end{gathered} \tag{17}$$

Величины H_i называются *коэффициентами Ламе*. Производные в (17) вычисляются в точке P_0.

Если векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ взаимно ортогональны, то криволинейные координаты называют ортогональными. Мы будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты. Найдем проекции v_{q_i} и w_{q_i} ($i = 1,\ 2,\ 3$) скорости $\boldsymbol{v}$ и ускорения $\boldsymbol{w}$ точки P на оси криволинейной системы координат. Из (1), (16), и (17) получаем

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 = v_{q_1}\boldsymbol{e}_1 + v_{q_2}\boldsymbol{e}_2 + v_{q_3}\boldsymbol{e}_3, \tag{18}$$

где величины v_{q_i} вычисляются по формулам

$$v_{q_i} = H_i\dot{q}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{19}$$

Для нахождения величины w_{q_i}, равной скалярному произведению $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{e}_i$, заметим, что она, согласно (2) и (17), может быть представлена в виде

$$w_{q_i} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) - \boldsymbol{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)\right]. \tag{20}$$

Далее,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_3}\dot{q}_3, \tag{21}$$

а из (18) получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_2 \partial q_i}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_3 \partial q_i}\dot{q}_3. \tag{22}$$

Ввиду того, что $\boldsymbol{r}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от q_1, q_2, q_3, можно менять порядок дифференцирования по q_k

($k = 1,\ 2,\ 3$) и q_i. Поэтому из (21) и (22) следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i}. \tag{23}$$

Кроме того, из (18) вытекает равенство

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{24}$$

Используя (23), (24), равенство (20) можно записать в виде

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{d\dot{q}_i}\right) - \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i}\right].$$

Если теперь ввести обозначение $T = v^2/2$, то выражение для w_{q_i} можно записать в следующем окончательном виде:

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{25}$$

Пример 1. *Найдем скорость и ускорение точки в цилиндрической и сферической системах криволинейных координат. В случае цилиндрической системы координат* (рис. 8) *полагаем* $q_1 = r,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z,$ *и тогда*

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z; \qquad H_r = 1,\ H_\varphi = r,\ H_z = 1;$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}; \tag{26}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right); \tag{27}$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad w_z = \ddot{z}. \tag{28}$$

В случае сферической системы координат (рис. 9) $q_1 = r,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = \theta,$ *и* $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta;$ $H_r = 1,\ H_\varphi = r\sin\theta,$ $H_\theta = r$*;*

$$v_r = \dot{r},\ v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi},\ v_\theta = r\dot{\theta}; \tag{29}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right); \tag{30}$$

$$w_r = \ddot{r} - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2, \quad w_\varphi = r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}, \tag{31}$$
$$w_\theta = r\ddot{\theta} + 2r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2.$$

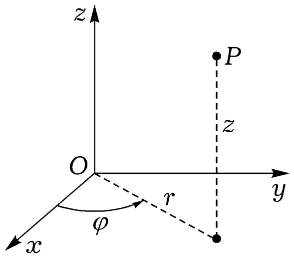

Рис. 8

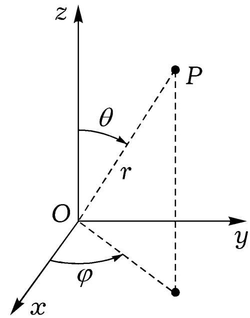

Рис. 9

Пример 2. *Пусть материальная точка движется равномерно по поверхности сферы радиуса a. Точка начинает движение на экваторе, направление ее скорости $\boldsymbol{v}$ образует с меридианами сферы постоянный угол α. Найдем уравнение траектории точки (локсодромы), а также момент времеии τ, в который точка достигает полюса сферы.*

Положение точки на сфере зададим при помощи координат φ, θ (рис. 9). *Из формул* (29) *имеем*

$$v_\varphi = a\sin\theta\dot{\varphi},\ v_\theta = a\dot{\theta}.$$

Без ограничения общности примем, что движение точки начинается на оси Ox (т. е. при $t = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$), угол θ во время движения уменьшается от $\pi/2$ до 0, а $\dot{\varphi} > 0$.

Так как направление скорости $\boldsymbol{v}$ пересекает меридиан $\varphi = \mathrm{const}$ под углом α, то $\operatorname{ctg}\alpha = -v_\theta/v_\varphi$, что приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = -\operatorname{ctg}\alpha\sin\theta.$$

Проинтегрировав это уравнение с учетом упомянутых выше начальных условий, получим уравнение локсодромы в виде

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{-\operatorname{ctg}\alpha\varphi}.$$

Так как при $\theta = 0$ $\varphi = \infty$, то локсодрома делает около полюса бесчисленное множество витков. Однако общая длина дуги локсодромы конечна. Найдем ее. Имеем

$$ds = a\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2} = -a\,d\theta\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{a\,d\theta}{\cos\alpha}.$$

Так как вся дуга l локсодромы соответствует изменению θ от $\pi/2$ до 0, то $l = \dfrac{\pi a}{2\cos\alpha}$. Поскольку движение точки равномерное, то время движения τ будет равно $\dfrac{\pi a}{2v\cos\alpha}$.

§ 3. Общие основания кинематики системы

10. Свободные и несвободные системы. Связи. Рассмотрим движение системы материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, предполагаемой неподвижной. Состояние системы задается радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu$ и скоростями $\boldsymbol{v}_\nu$ ее точек. Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\boldsymbol{v}_\nu$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются *связями.* Если на систему не наложены связи, то она называется *свободной.* При наличии одной или нескольких связей система называется *несвободной.*

Пример 1. *Материальная точка может двигаться только в заданной плоскости, проходящей через начало координат. Если ось Oz декартовой системы координат направить перпендикулярно плоскости, в которой движется точка, то $z = 0$ — уравнение связи.*

Пример 2. *Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Если x, y, z — координаты движущейся точки, то уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$.*

Пример 3. *Две материальные точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l. Связь задается соотношением $l^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 \geqslant 0$.*

Пример 4. *Материальная точка может двигаться в пространстве, оставаясь внутри или на границе первого октанта. Связь задается тремя неравенствами: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.*

Пример 5 (Движение конька по льду). *Пусть конек движется по льду, расположенному в горизонтальной плоскости. Конек будем моделировать тонким стержнем, одна из точек которого, например C на рис. 10, во все время движения имеет скорость, направленную вдоль стержня. Если ось Oz направлена вертикально, x, y, z — координаты точки C, а φ — угол, который образует стержень с осью Ox, то связи задаются двумя соотношениями: $z = 0$, $\dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$.*