Так как вся дуга l локсодромы соответствует изменению θ от $\pi/2$ до 0, то $l = \dfrac{\pi a}{2\cos\alpha}$. Поскольку движение точки равномерное, то время движения τ будет равно $\dfrac{\pi a}{2v\cos\alpha}$.

§ 3. Общие основания кинематики системы

10. Свободные и несвободные системы. Связи. Рассмотрим движение системы материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, предполагаемой неподвижной. Состояние системы задается радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu$ и скоростями $\boldsymbol{v}_\nu$ ее точек. Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\boldsymbol{v}_\nu$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются *связями.* Если на систему не наложены связи, то она называется *свободной.* При наличии одной или нескольких связей система называется *несвободной.*

Пример 1. *Материальная точка может двигаться только в заданной плоскости, проходящей через начало координат. Если ось Oz декартовой системы координат направить перпендикулярно плоскости, в которой движется точка, то $z = 0$ — уравнение связи.*

Пример 2. *Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Если x, y, z — координаты движущейся точки, то уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$.*

Пример 3. *Две материальные точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l. Связь задается соотношением $l^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 \geqslant 0$.*

Пример 4. *Материальная точка может двигаться в пространстве, оставаясь внутри или на границе первого октанта. Связь задается тремя неравенствами: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.*

Пример 5 (Движение конька по льду). *Пусть конек движется по льду, расположенному в горизонтальной плоскости. Конек будем моделировать тонким стержнем, одна из точек которого, например C на рис. 10, во все время движения имеет скорость, направленную вдоль стержня. Если ось Oz направлена вертикально, x, y, z — координаты точки C, а φ — угол, который образует стержень с осью Ox, то связи задаются двумя соотношениями: $z = 0$, $\dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$.*

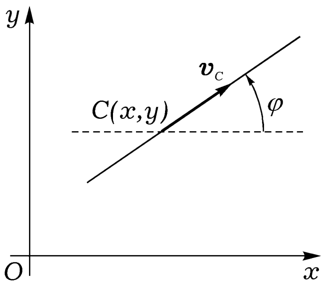

Рис. 10

В общем случае связь задается соотношением[1] $f(\boldsymbol{r}_\nu,\ \boldsymbol{v}_\nu,\ t) \geqslant 0$. Если в этом соотношении реализуется только знак равенства, то связь называется *удерживающей* (*двусторонней, неосвобождающей*). В примерах 1, 2, 5 связи удерживающие. Если же реализуется как знак равенства, так и знак строгого неравенства, то связь называется *неудерживающей* (*односторонней, освобождающей*). В примерах 3, 4 связи неудерживающие. Системы с неудерживающими связями в дальнейшем не рассматриваются.

Если уравнение связи можно записать в виде $f(\boldsymbol{r}_\nu,\ t) = 0$, не содержащем проекции скоростей точек системы, то связь называется *геометрической* (*конечной, голономной*). В примерах 1, 2 связи геометрические. Если же в уравнение связи $f(\boldsymbol{r}_\nu,\ \boldsymbol{v}_\nu,\ t) = 0$ входят проекции скоростей $\boldsymbol{v}_\nu$, то связь называется *дифференциальной* (*кинематической*). Дифференциальную связь $f(\boldsymbol{r}_\nu,\ \boldsymbol{v}_\nu,\ t) = 0$ называют *интегрируемой*, если ее можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем (как в случае геометрической связи). Неинтегрируемую дифференциальную связь называют еще *неголономной связью.*

Комментарий 1. *В примере* 5 *дифференциальная связь* $\dot y = \dot x \operatorname{tg}\varphi$ *неинтегрируемая. Покажем это. Предположим противное, т. е. что* $x,\ y,\ \varphi$ *связаны соотношением* $f(x,\ y,\ \varphi,\ t) = 0$. *Пусть* $x,\ y,\ \varphi$ *отвечают реальному движению конька. Вычислим полную производную* f *по времени*

$$\dot f = \frac{\partial f}{\partial x}\dot x + \frac{\partial f}{\partial y}\dot y + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot\varphi + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0.$$

Используя уравнение связи, $\dot f$ *можно записать в виде*

$$\dot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\dot x + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot\varphi + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0.$$

Отсюда, ввиду независимости величин $\dot x$, $\dot\varphi$, *получаем равенства*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

[1] Обозначением $f(\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu, t)$ мы пользуемся для краткой записи функции $f(r_1, \ldots, r_N,\ v_1, \ldots, v_N,\ t)$. Функция f имеет в общем случае $6N+1$ аргументов: $3N$ координат x_ν, y_ν, z_ν точек P_ν, $3N$ проекций их скоростей $\dot x_\nu$, $\dot y_\nu$, $\dot z_\nu$ и время t. Функцию f предполагаем дважды непрерывно дифференцируемой.

Ввиду произвольности угла φ из этих равенств следует, что частные производные функции f по всем ее аргументам равны нулю, т. е. f не зависит от x, y, φ, t. Следовательно, предположение об интегрируемости связи $\dot{y} = \dot{x}\operatorname{tg}\varphi$ неверно.

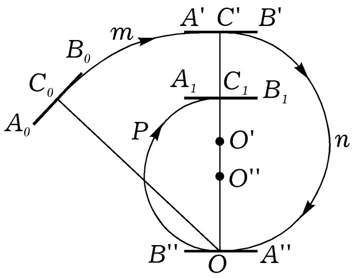

Рис. 11

Неинтегрируемость связи в рассматриваемой задаче можно показать без вычислений, а исходя только из простых геометрических соображений. Во-первых, из уравнения связи следует, что в случае ее интегрируемости в уравнение эквивалентной геометрической связи время t явно не должно входить, а угол φ обязательно должен войти, т. е. эквивалентная геометрическая связь должна записываться в виде $f(x,\ y,\ \varphi) = 0$, где функция f не должна быть тождественно равной нулю при произвольных фиксированных значениях x, y. Во-вторых, движение конька, при котором его точка C перемещается по окружности с центром, лежащим на перпендикуляре к полозу конька в точке C, не нарушает связи $\dot{y} = \dot{x}\operatorname{tg}\varphi$, так как при таком движении скорость точки C направлена вдоль полоза конька. Пусть в начальном положении конька $x = x_0$, $y = y_0$, $\varphi = \varphi_0$, а в конечном $x = x_1$, $y = y_1$, $\varphi = \varphi_1$. Если связь интегрируема и записывается в виде $f(x,\ y,\ \varphi) = 0$, то $f(x_0,\ y_0,\ \varphi_0) = 0$ и $f(x_1,\ y_1,\ \varphi_1) = 0$, так как уравнение связи должно выполняться в любом положении конька. На рис. 11 показана одна из многих возможных траекторий точки C при движении конька из начального положения в конечное. На этом рисунке $OC_0 \perp A_0B_0$, $OC' \perp A'B'$, $OC_1 \perp A_1B_1$, $O''O \perp A''B''$, $O'C' = O'O$, $O''C_1 = O''O$. Перемещение конька из начального положения в конечное происходит так, что точка C конька (обозначенная на рис. 11 в разных положениях символами C_0, C', O, C_1) сначала движется по дуге C_0mC' окружности с центром O, затем по дуге $C'nO$ окружности с центром O' и, наконец, по дуге OpC_1 окружности с центром O''. Если зафиксировать конечные координаты x_1, y_1 точки C, а конечное значение угла φ_1 изменять в некотором интервале, то в этом интервале $f(x_1,\ y_1,\ \varphi_1) \equiv 0$. Но, согласно сказанному выше, функция f не может тождественно равняться нулю при произвольных фиксированных значениях x, y. Противоречие говорит о неинтегрируемости рассматриваемой дифференциальной связи.

Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной.* Если же среди связей, наложенных на систему, есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется *неголономной*.

В дальнейшем, при изучении движения неголономных систем, мы будем предполагать, что соответствующие им дифференциальные связи линейны относительно проекций $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{z}_\nu$ скоростей точек системы. Как геометрических, так и дифференциальных связей, наложенных на систему, может быть несколько. Таким образом, в дальнейшем мы будем изучать движение свободных механических систем или несвободных систем со связями, аналитическое представление которых имеет вид

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_\nu,\ t) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r), \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots, s). \tag{2}$$

Векторы $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ и скаляры a_β — заданные функции от $\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2, \ldots,\ \boldsymbol{r}_N$ и t. В частных случаях r и s могут быть равными нулю.

Геометрические связи называются *стационарными* или *склерономными*, если t не входит в их уравнения (1). Дифференциальные связи (2) называются *стационарными* или *склерономными*, если функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ не зависят явно от t, а функции a_β тождественно равны нулю. Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

Комментарий 2. *В примере* 1 *рассмотрена голономная склерономная, в примере* 2 *— голономная реономная, в примере* 5 *— неголономная склерономная системы.*

11. Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы. Точки несвободной системы не могут двигаться в пространстве совершенно произвольно. Их совместимые со связями (допускаемые связями) координаты, скорости, ускорения и перемещения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связей (1), (2).

Пусть задан какой-то момент времени $t = t^*$. Положения системы, для которых радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$ точек, образующих систему, удовлетворяют уравнениям геометрических связей (1), назовем *возможными положениями* системы для данного момента времени.

Связи налагают ограничения и на скорости точек системы. Чтобы записать эти ограничения в аналитической форме, продифференцируем обе части (1) по времени, считая $\boldsymbol{r}_\nu$ функциями t. Тогда получим следующие дифференциальные связи, вытекающие из геометрических связей (1):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots ,\ r). \tag{3}$$

Совокупность векторов $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (2) и (3) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем ***возможными скоростями*** для этого момента времени.

Для получения аналитического выражения ограничений, налагаемых связями на ускорения точек системы, продифференцируем равенства (3) и (2) по времени. Имеем[1]

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu \partial \boldsymbol{r}_\mu} \boldsymbol{v}_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + 2 \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \boldsymbol{r}_\nu} \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots ,\ r), \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \boldsymbol{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial \boldsymbol{r}_\mu} \boldsymbol{v}_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial a_\beta}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots ,\ s). \tag{5}$$

Совокупность векторов $\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (4) и (5) при возможных для данного момента времени положении и скоростях точек системы, назовем ***возможными ускорениями*** для этого момента времени.

Заметим, что величину $3N - r - s$ следует считать положительной, так как в противном случае ограничения, налагаемые связями, были бы настолько жесткими, что согласованное со связями движение точек материальной системы было бы либо вообще невозможным, либо должно было происходить по заранее заданному закону во времени. Поэтому число линейных уравнений, определяющих проекции возможных скоростей и ускорений, превосходит число этих проекций. Следовательно, для данного момента времени существует бесконечное множество возможных скоростей $\boldsymbol{v}_\nu^*$ и возможных ускорений $\boldsymbol{w}_\nu^*$.

Пусть в данный момент времени $t = t^*$ система находится в каком-либо положении, определяемом радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$, и имеет какие-то возможные скорости $\boldsymbol{v}_\nu^*$ и возможные ускорения $\boldsymbol{w}_\nu^*$. Возможному в момент $t^* + \Delta t$ положению системы отвечают радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu^* + \Delta \boldsymbol{r}_\nu$ точек системы. Величины $\Delta \boldsymbol{r}_\nu$ — ***возможные перемещения*** системы за время Δt из ее возможного положения, задаваемого

[1] При получении равенств (3)–(5) предполагается, что соответствующие производные функций f_α, $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ и a_β существуют и непрерывны.

радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu^*$ в момент $t = t^*$. Для достаточно малых Δt возможные перемещения точек системы можно[1] представить в виде суммы:

$$\Delta \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^* \Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_\nu^* (\Delta t)^2 + \ldots \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{6}$$

Здесь не выписаны слагаемые, порядок которых относительно Δt выше второго. Так как множество возможных скоростей и ускорений бесконечно, то бесконечно и множество возможных перемещений.

Пренебрежем в (6) величинами выше первого порядка относительно Δt; тогда $\Delta \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^* \Delta t$. Если уравнения (3) и (2), которым удовлетворяют возможные скорости $\boldsymbol{v}_\nu^*$, умножить на Δt, то получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по Δt возможные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r), \tag{7}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu + a_\beta \Delta t = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots,\ s). \tag{8}$$

Функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$, a_β в (8) и частные производные в (7) вычисляются при $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$.

Пример 1. *Точка P движется по неподвижной поверхности* (рис. 12). *В этом случае возможной скоростью $\boldsymbol{v}^*$ будет любой вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности в точке P и проходящий через эту точку. Если пренебречь в* (6) *величинами выше первого порядка относительно Δt, то $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}^* \Delta t$. Любой вектор, построенный из точки P и лежащий в касательной плоскости, будет возможным перемещением. Если поверхность задается уравнением $f(\boldsymbol{r}) = 0$, то все возможные перемещения ортогональны нормали к поверхности, т. е. $\Delta \boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} f = 0$.*

Пример 2. *Точка P движется по подвижной или деформирующейся поверхности, все точки которой имеют скорости $\boldsymbol{u}$* [2] (рис. 13). *В этом случае возможная скорость уже не лежит в касательной плоскости. Возможных перемещений опять бесконечное множество. Если пренебречь величинами порядка $(\Delta t)^2$ и выше, то все они получаются добавлением вектора $\boldsymbol{u}\Delta t$ к каждому из возможных перемещений предыдущего примера. В этом случае уже соотношение $\Delta \boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} f = 0$ не выполняется при любых $\Delta \boldsymbol{r}$.*

---

[1] Для этого достаточно, чтобы функции $\boldsymbol{r}_\nu(t)$ имели непрерывные производные до третьего порядка включительно.

[2] Так будет, например, когда поверхность является недеформирующейся и движется поступательно со скоростью $\boldsymbol{u}$ (см. п. 22).

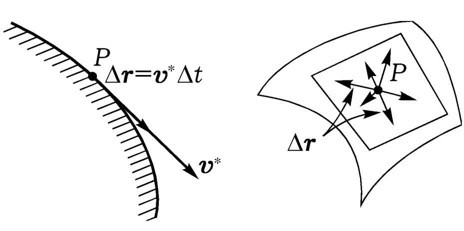

Рис. 12

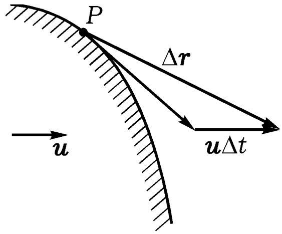

Рис. 13

12. Действительные и виртуальные перемещения. Синхронное варьирование. Пусть в момент времени $t = t^*$ система находится в положении, задаваемом радиусами-векторами ее точек $\boldsymbol{r}_{\nu_0}^*$, а скорости точек имеют некоторые конкретные возможные значения $\boldsymbol{v}_{\nu_0}^*$. Если заданы силы, действующие на систему, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений движения, можно получить значения радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_\nu$ точек системы для моментов времени t, следующих за t^*. Если обозначить dt приращение времени $t - t^*$, то приращения радиусов-векторов точек системы можно представить в виде

$$\boldsymbol{r}_\nu(t^* + dt) - \boldsymbol{r}_\nu(t^*) = \boldsymbol{v}_{\nu_0}^* dt + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_{\nu_0}^*(dt)^2 + \ldots, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{w}_{\nu_0}^*$ — ускорения точек системы при $t = t^*$; многоточием обозначены величины выше второго порядка относительно dt. Величины (9) суть *действительные* (*истинные*) *перемещения* точек системы за время dt. Действительное перемещение, естественно, является одним из возможных. Если пренебречь членами порядка $(dt)^2$ и выше, то действительное перемещение будет дифференциалом функции $\boldsymbol{r}_\nu(t)$, т. е. $\boldsymbol{r}_\nu(t^* + dt) - \boldsymbol{r}_\nu(t^*) = d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_{\nu_0}^* dt$. В этом случае действительные перемещения удовлетворяют уравнениям, аналогичным (7) и (8):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r), \tag{10}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu + a_\beta dt = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots,\ s). \tag{11}$$

Уравнения (10) и (11) получаются умножением обеих частей уравнений (3) и (2) на dt. Величины $\partial f_\alpha / \partial \boldsymbol{r}_\nu$, $\partial f_\alpha / \partial t$, $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$, a_β в (10), (11) вычисляются при $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}^*$. В дальнейшем под действительными перемещениями точек системы за время dt будем понимать их бесконечно малые перемещения, линейные по dt; они удовлетворяют уравнениям (10), (11).

Помимо действительных перемещений, в теоретической механике принципиальное значение имеют так называемые *виртуальные перемещения.* Пусть при $t = t^*$ система занимает некоторое свое возможное положение, определяемое радиусами-векторами ее точек $\boldsymbol{r}_\nu^*$. Виртуальным перемещением системы называется совокупность величин $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r), \tag{12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots,\ s), \tag{13}$$

где величины $\partial f_\alpha/\partial \boldsymbol{r}_\nu$ и $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ вычислены при $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$.

Остановимся на введенном понятии виртуального перемещения подробнее. Величина $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, задается проекциями δx_ν, δy_ν, δz_ν. Так как число неизвестных δx_ν, δy_ν, δz_ν ($\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N$) превосходит число уравнений (12), (13), которым они удовлетворяют, то количество виртуальных перемещений бесконечно. Из (10), (11) и (12), (13) следует, что для склерономной системы действительное перемещение будет одним из виртуальных.

Пусть δx_ν, δy_ν, δz_ν — бесконечно малые величины. Из (7), (8) и (12), (13) видно, что множество линейных относительно Δt возможных перемещений склерономной системы совпадает с множеством ее виртуальных перемещений. Можно сказать, что виртуальные перемещения — это возможные перемещения при «замороженных» ($t = t^* = \mathrm{const}$) связях.

Комментарий 3. *В примерах* 1 *и* 2 *п.* 11 *множества виртуальных перемещений одинаковы и представляют собой совокупность построенных из точки P векторов $\delta\boldsymbol{r}$, лежащих в проходящей через P касательной плоскости к поверхности, по которой движется материальная точка.*

Бесконечно малые приращения δx_ν, δy_ν, δz_ν называются *вариациями* величин x_ν, y_ν, z_ν. Переход при фиксированном $t = t^*$ из положения системы, определяемого радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu^*$, в бесконечно близкое положение, определяемое радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu^* + \delta\boldsymbol{r}_\nu$, называется *синхронным варьированием.* При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины Δt. Согласно (6),

$$\Delta_1 \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_1}\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^*_{\nu_1}(\Delta t)^2 + \ldots,$$

$$\Delta_2 \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^*_{\nu_2}(\Delta t)^2 + \ldots$$

Возможные скорости $\boldsymbol{v}^*_{\nu_i}$ и возможные ускорения $\boldsymbol{w}^*_{\nu_i}$ $(i = 1,\ 2)$ удовлетворяют уравнениям (2) — (5). Подставим в (3) величины $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}^*_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_1}$ и умножим обе части этого равенства на Δt, затем подставим в (3) величины $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}^*_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$ и снова умножим на Δt. Если теперь из первого результата вычесть второй, то получим равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \left(\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\right)\Delta t = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r). \tag{14}$$

Аналогично из (2) получаются равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \left(\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\right)\Delta t = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots,\ s). \tag{15}$$

Если теперь подобную процедуру проделать с уравнениями (4) и (5) (только надо будет еще подставить $\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}^*_{\nu_i}$ $(i = 1,\ 2)$, а умножить на $1/2(\Delta t)^2$), то придем к равенствам

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot (\boldsymbol{w}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{w}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{\nu,\mu=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu \partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}^*_{\mu_1}\right)\cdot \boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu \partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}^*_{\mu_2}\right)\cdot \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\right]\frac{(\Delta t)^2}{2} + 2\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \boldsymbol{r}_\nu}\cdot(\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} = 0, \tag{16}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot (\boldsymbol{w}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{w}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{\nu,\mu=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}^*_{\mu_1}\right)\cdot \boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}^*_{\mu_2}\right)\cdot \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\right]\frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial t}\cdot(\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \tag{17}$$
$$+ \sum \frac{\partial a_\beta}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\cdot(\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} = 0$$

$$(\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r; \quad \beta = 1,\ 2, \ldots,\ s).$$

Составим теперь разность двух возможных перемещений:

$$\Delta_1 \boldsymbol{r}_\nu - \Delta_2 \boldsymbol{r}_\nu = (\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2})\Delta t + (\boldsymbol{w}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{w}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \ldots \tag{18}$$

Если $\delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2} \neq 0$, то главная часть величины (18) линейна по Δt. Она равна $\delta \boldsymbol{v}_\nu \Delta t$ и, согласно (14), (15), удовлетворяет уравнениям (12) и (13), т. е. совокупность величин

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \boldsymbol{v}_\nu \Delta t \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N) \tag{19}$$

будет виртуальным перемещением. Синхронное варьирование (19), предполагающее $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} \neq \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$, называется *варьированием по Журдену.*

Если же $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$, но $\delta \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{w}^*_{\nu_2} \neq 0$, то главная часть разности (18) равна $\delta \boldsymbol{w}_\nu \dfrac{(\Delta t)^2}{2}$. И, так как в (16), (17) все суммы, кроме первых, при $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$ обращаются в нуль, главная часть разности (18), согласно (16), (17) и (12), (13), будет виртуальным перемещением

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{w}_\nu (\Delta t)^2 \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{20}$$

Такое синхронное варьирование, в котором предполагается, что $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$, а $\boldsymbol{w}^*_{\nu_1} \neq \boldsymbol{w}^*_{\nu_2}$, называется *варьированием по Гауссу.*

13. Число степеней свободы. Виртуальные перемещения δx_ν, δy_ν, δz_ν $(\nu = 1,\ 2, \ldots, N)$ удовлетворяют $r + s$ уравнениям (12), (13). Число независимых виртуальных перемещений системы называется ее *числом степеней свободы.* Число степеней свободы мы будем всюду обозначать n. Ясно, что $n = 3N - r - s$.

Пример 1. *Одна свободная точка в пространстве имеет три степени свободы.*

Пример 2. *Система, состоящая из двух точек, связанных стержнем, движущимся в плоскости, имеет три степени свободы.*

Пример 3. *Конек, движущийся по льду* (*пример* 5 *из п.* 10), *имеет две степени свободы.*

Пример 4. *Материальная точка, движущаяся по подвижной или неподвижной поверхности, имеет две степени свободы.*

Пример 5. *Система двух стержней, соединенных шарниром и движущихся в плоскости* (*ножницы*), *имеет четыре степени свободы.*

14. Обобщенные координаты. Рассмотрим несвободную систему со связями (1), (2). Будем предполагать, что r функций f_α от $3N$

аргументов x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N$) независимы (время t здесь рассматривается как параметр). В противном случае одна из связей противоречила бы остальным или была бы их следствием.

Наименьшее число параметров, необходимое для задания возможного положения системы, называется числом ее независимых *обобщенных координат.* Так как функции f_α $(\alpha = 1, \ldots,\ r)$ независимы, то число обобщенных координат, которое мы будем обозначать m, равно $3N - r$. За обобщенные координаты можно принять m из $3N$ декартовых координат x_ν, y_ν, z_ν, относительно которых можно разрешить систему уравнений (1). Однако, как правило, такой выбор обобщенных координат практически мало пригоден. Можно ввести любые другие m независимых величин $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$, в своей совокупности определяющих конфигурацию системы. Они могут быть расстояниями, углами, площадями и т. п., а могут и не иметь непосредственного геометрического толкования. Требуется только, чтобы они были независимы, а декартовы координаты x_ν, y_ν, z_ν точек системы можно было выразить через $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$ и t:

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ t) \quad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{21}$$

Эти функции, будучи подставленными в уравнения (1), обращают их в тождества. Ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \partial x_1/\partial q_1 & \ldots & \partial x_1/\partial q_m \\ \partial y_1/\partial q_1 & \ldots & \partial y_1/\partial q_m \\ \partial z_1/\partial q_1 & \ldots & \partial z_1/\partial q_m \\ & \ldots & \\ \partial x_N/\partial q_1 & \ldots & \partial x_N/\partial q_m \\ \partial y_N/\partial q_1 & \ldots & \partial y_N/\partial q_m \\ \partial z_N/\partial q_1 & \ldots & \partial z_N/\partial q_m \end{matrix} \right\| \tag{22}$$

равен m. Это следует из того, что среди $3N$ функций x_ν, y_ν, z_ν из (21) от m аргументов $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$ (t — параметр) имеется m независимых, через которые могут быть выражены все остальные координаты точек системы.

Мы будем предполагать, что обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ выбраны так, чтобы любое возможное положение системы могло быть получено из (21) при некоторых значениях величин $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$. Если это не удается сделать сразу для всех возможных положений системы, то обобщенные координаты вводятся локально, т. е. для различных совокупностей возможных положений вводятся различные системы обобщенных координат.

Функции (21) будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемыми функциями всех своих аргументов. Кроме того, будем считать, что если система склерономна, то время t не входит в зависимости (21), чего всегда можно добиться соответствующим выбором обобщенных координат.

При исследовании конкретных эадач механики очень часто совсем нет необходимости составлять уравнения связей (1). Из физической сущности задачи обычно ясно, как надо выбрать обобщенные координаты в таком количестве, которое необходимо и достаточно для задания возможных положений системы. Если же зависимости (21) требуются при решении задачи, то они составляются, как правило, с помощью геометрических соображений.

15. Координатное пространство. Для каждого момента времени t между возможными положениями системы и точками m-мерного пространства $(q_1,\ q_2,\ldots,\ q_m)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Пространство $(q_1,\ q_2,\ldots,\ q_m)$ называется *координатным пространством* (или пространством конфигураций). Каждому возможному положению системы отвечает некоторая точка координатного пространства, которую будем называть изображающей точкой. Движению системы соответствует движение изображающей точки в координатном пространстве.

Близость точек координатного пространства определяется естественным образом через близость соответствующих положений системы. Между положениями системы и точками координатного пространства устанавливается таким путем взаимно однозначное и непрерывное соответствие.

Пример 1 (Материальная точка движется по плоскости). *Координатное пространство — сама эта плоскость.*

Пример 2 (Система N свободных точек в пространстве). *Координатное пространство есть $3N$-мерное евклидово пространство* $(x_1,\ y_1,\ z_1,\ldots,\ x_N,\ y_N,\ z_N)$.

Пример 3 (Маятник). *Положение маятника, представляющего собой твердый стержень, подвешенный за один из концов к неподвижной точке, задается углом φ* (рис. 14), *который примем за обобщенную координату. Поставим в соответствие каждому положению маятника точку на числовой оси, имеющую координату φ. Такое соответствие между положениями маятника и точками числовой оси не будет взаимно однозначным, так как разным точкам оси φ и $\varphi + 2k\pi$* $(k = \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ *соответствует одно и то же положение маятника. Однозначности можно добиться, выделив на числовой оси полуоткрытый интервал $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Но при этом нарушается непрерывность*

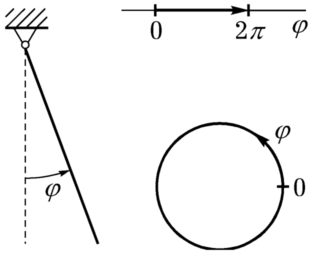

Рис. 14

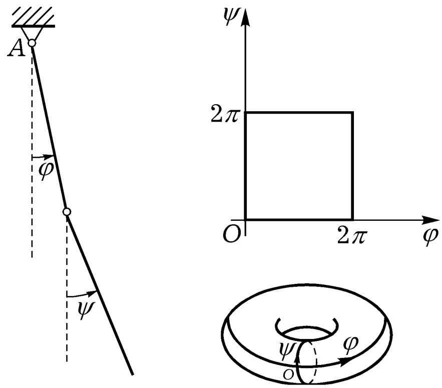

Рис. 15

соответствия, так как два близких положения маятника, для которых $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi - \varepsilon$, не будут соответствовать близким точкам на выделенном полуинтервале. Чтобы восстановить непрерывность, нужно считать точки $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ тождественными. Наглядно это можно сделать, «склеив» точки $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Полученный геометрический образ — окружность и будет координатным пространством маятника.

Пример 4 (Двойной маятник). *Он состоит из двух соединенных шарниром твердых стержней, один из которых подвешен за свободный конец к неподвижной точке A* (рис. 15). *В остальном стержни могут свободно перемещаться в одной плоскости. За обобщенные координаты можно принять углы φ и ψ, образуемые стержнями с вертикальным направлением. Каждому положению маятника ставятся в соответствие два значения φ и ψ, определенных с точностью до чисел, кратных 2π. Поэтому если мы возьмем в плоскости φ, ψ квадрат со стороной 2π и отождествим в нем противоположные стороны, то получим координатное пространство двойного маятника. Наглядно это можно сделать, «склеив» противоположные стороны квадрата. После первой склейки получится цилиндр, а после второй — искомый геометрический образ — тор.*

Пример 5 (Две связанные стержнем материальные точки, движущиеся по плоскости (рис. 16)). *За обобщенные координаты можно принять декартовы координаты x, y одной из точек и угол φ, который образует стержень с осью Ox. Координатное пространство есть слой в пространстве (x, y, φ), заключенный между плоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, противоположные точки которого отождествлены.*

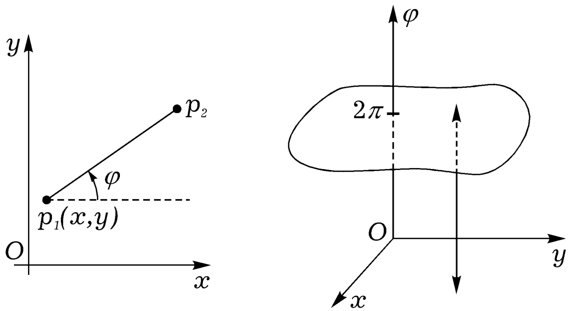

Рис. 16

Здесь, в отличие от примеров 3 и 4, наглядное отождествление плоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ путем склеивания получить нельзя.

16. Обобщенные скорости и ускорения. При движении системы ее обобщенные координаты изменяются со временем. Величины $\dot{q}_j$ и $\ddot{q}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ называются соответственно *обобщенными скоростями* и *обобщенными ускорениями.* Скорости и ускорения точек системы в декартовой системе координат найдем, продифференцировав сложные вектор-функции времени (21):

$$\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{23}$$

$$\boldsymbol{w}_\nu = \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + 2\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j \partial t}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t^2} \tag{24}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Справедливы следующие равенства, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{25}$$

Первое из этих равенств сразу следует из (23). Второе равенство легко проверить дифференцированием, если использовать (23) и возможность изменения порядка дифференцирования функции $\boldsymbol{r}_\nu$ по ее аргументам. Последнее возможно, так как $\boldsymbol{r}_\nu$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k \partial t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_k}.$$

Запишем в обобщенных скоростях уравнения (2) неголономных связей. Подставив (21) и (23) в (2), получим

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}(q_1,\, q_2,\dots,\, q_m,\, t)\dot{q}_j + b_\beta(q_1,\, q_2,\dots,\, q_m,\, t) = 0 \qquad (\beta = 1,\, 2,\dots,\, s). \tag{26}$$

Величины $b_{\beta j}$, b_β определяются равенствами

$$b_{\beta j} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\cdot \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \quad (\beta = 1,\, 2,\dots,\, s;\; j = 1,\, 2,\dots,m),$$

$$b_\beta = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\cdot \boldsymbol{a}_{\beta\nu} + a_\beta \qquad (\beta = 1,\, 2,\dots,\, s).$$

Здесь в векторах $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ и скалярах a_β величины $\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{r}_N$ заменены на их выражения (21).

Для голономной системы обобщенные скорости $\dot{q}_j$ независимы и совершенно произвольны. В неголономной системе обобщенные координаты, как и в голономной системе, могут принимать произвольные значения, но при этом обобщенные скорости не будут независимы; они связаны s соотношениями (26).

Чтобы выразить виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ точек системы через вариации δq_j обобщенных координат, надо, в соответствии с п. 12, отбросить в выражении (23) $\partial\boldsymbol{r}_\nu/\partial t$ и заменить $\dot{q}_j$ на δq_j, а $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ на $\delta\boldsymbol{r}_\nu$. Тогда получим[1]

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (\nu = 1,\, 2,\dots,\, N). \tag{27}$$

Для голономной системы вариации δq_j произвольны. В неголономной же системе они связаны соотношениями, которые получаются из (26) путем отбрасывания величин b_β и замены $\dot{q}_j$ на δq_j:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1,\, 2,\dots,\, s). \tag{28}$$

Следовательно, число степеней свободы голономной системы совпадает с числом ее обобщенных координат, а число степеней свободы неголономной системы меньше числа m обобщенных координат на количество s дифференциальных неинтегрируемых связей[2].

[1] Вообще, для любой функции $\varphi(q_1,\, q_2,\dots,\, q_m,\, t)$ имеем $\delta\varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_j}\delta q_j$.

[2] Конечно, предполагается, что связи (26) являются независимыми.

17. Псевдокоординаты. В некоторых задачах динамики, особенно при изучении движения неголономных систем, бывает удобно ввести координаты более общего вида, которые получили название псевдокоординат. Пусть n — число степеней свободы. Рассмотрим n независимых линейных комбинаций обобщенных скоростей

$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\dot{q}_j \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{29}$$

Коэффициенты c_{ij} — функции $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m,\ t$. Величины $\dot{\pi}_i$ имеют вполне определенный смысл некоторых линейных комбинаций обобщенных скоростей, но сами символы π_i могут и не иметь смысла, т. е. правые части в равенствах (29) могут не быть полными производными по времени от каких-либо функций обобщенных координат и времени. Величины $\ddot{\pi}_i$ также осмыслены. Это — производные по времени от правых частей равенств (29). Будем называть символы π_i *псевдокоординатами*, а величины $\dot{\pi}_i$ и $\ddot{\pi}_i$ — соответственно *псевдоскоростями* и *псевдоускорениями*. Некоторые из π_i могут быть, в частности, обобщенными координатами q_i, тогда соответствующие $\dot{\pi}_i$ и $\ddot{\pi}_i$ — обобщенные скорости и обобщенные ускорения.

Величины c_{ij} будем выбирать так, чтобы определитель линейной системы из $m = n + s$ уравнений (26), (29) относительно $\dot{q}_j$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ m)$ был отличен от нуля. Разрешив эту систему, получим

$$\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\dot{\pi}_i + g_j \qquad (j = 1,\ 2, \ldots,\ m). \tag{30}$$

Псевдоскорости $\dot{\pi}_i$ могут принимать произвольные значения; если они заданы, то обобщенные скорости находятся из (30). Величины d_{ij}, g_j в (30) — функции $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m,\ t$.

Введем согласованное с (29) обозначение

$$\delta\pi_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\delta q_j \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{31}$$

Формула (31) фактически является определением величин $\delta\pi_i$. Именно, $\delta\pi_i$ — это величина, равная правой части равенства (31), в которой δq_j — вариации обобщенных координат.

Из (31) и (28) находим выражение δq_j через величины $\delta\pi_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$:

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\delta\pi_i \qquad (j = 1,\ 2, \ldots,\ m). \tag{32}$$

Здесь величины $\delta\pi_i$ могут принимать произвольные значения.

Найдем нужные для дальнейшего выражения для виртуальных перемещений $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ точек системы через величины $\delta\pi_i$. Подставив (32) в (27), получим

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu i}\delta\pi_i \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N), \tag{33}$$

где введено обозначение

$$\boldsymbol{e}_{\nu i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} d_{ij} \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N; \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Запишем это выражение несколько иначе. Для этого продифференцируем обе части соотношений (30) по времени и полученное выражение для $\ddot{q}_j$ подставим в формулу (24), которая примет вид

$$\boldsymbol{w}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu i}\ddot{\pi}_i + \boldsymbol{h}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N),$$

где вектор-функции $\boldsymbol{h}_\nu$ не зависят от псевдоускорений $\ddot{\pi}_i$. Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{e}_{\nu i} = \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_i} \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N; \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{34}$$

Подставив (34) в (33), получим окончательное выражение для $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ в виде

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_i}\delta\pi_i \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{35}$$

§ 4. Кинематика твердого тела

18. Задачи кинематики твердого тела. Определение простейших перемещений. *Абсолютно твердое тело* — это такая механическая система, у которой взаимные расстояния между точками постоянны. Очень многие объекты природы и техники моделируются в теоретической механике системами, состоящими из отдельных материальных точек и абсолютно твердых тел. Отсюда вытекает важность изучения их движения. В дальнейшем абсолютно твердое тело будем для краткости называть просто *твердым телом.*