Здесь величины $\delta\pi_i$ могут принимать произвольные значения.

Найдем нужные для дальнейшего выражения для виртуальных перемещений $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ точек системы через величины $\delta\pi_i$. Подставив (32) в (27), получим

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu i}\delta\pi_i \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots ,\ N), \tag{33}$$

где введено обозначение

$$\boldsymbol{e}_{\nu i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} d_{ij} \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots ,\ N; \quad i = 1,\ 2, \ldots ,\ n).$$

Запишем это выражение несколько иначе. Для этого продифференцируем обе части соотношений (30) по времени и полученное выражение для $\ddot{q}_j$ подставим в формулу (24), которая примет вид

$$\boldsymbol{w}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu i}\ddot{\pi}_i + \boldsymbol{h}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots ,\ N),$$

где вектор-функции $\boldsymbol{h}_\nu$ не зависят от псевдоускорений $\ddot{\pi}_i$. Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{e}_{\nu i} = \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_i} \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots ,\ N; \quad i = 1,\ 2, \ldots ,\ n). \tag{34}$$

Подставив (34) в (33), получим окончательное выражение для $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ в виде

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_i}\delta\pi_i \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots ,\ N). \tag{35}$$

§ 4. Кинематика твердого тела

18. Задачи кинематики твердого тела. Определение простейших перемещений. *Абсолютно твердое тело* — это такая механическая система, у которой взаимные расстояния между точками постоянны. Очень многие объекты природы и техники моделируются в теоретической механике системами, состоящими из отдельных материальных точек и абсолютно твердых тел. Отсюда вытекает важность изучения их движения. В дальнейшем абсолютно твердое тело будем для краткости называть просто *твердым телом.*

Если в декартовой прямоугольной системе координат точка P_k твердого тела имеет радиус-вектор $\boldsymbol{r}_k$, то по определению при любых i, j величины $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = r_{ij}$ постоянны во все время движения. Если помимо связей, обеспечивающих постоянство расстояний r_{ij}, на твердое тело не наложено никаких других связей, то его называют *свободным твердым телом.* Иными словами: свободным называют твердое тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений. Свободное твердое тело является голономной склерономной системой.

Свободное твердое тело (такое, в котором есть три точки P_1, P_2, P_3, не лежащие на одной прямой) имеет шесть степеней свободы. В самом деле, в голономной системе число степеней свободы и число обобщенных координат совпадают. Число же обобщенных координат равно шести. Действительно, чтобы задать положение одной из точек, скажем P_1, нужно задать три координаты; если это сделано, то положение точки P_2 можно уже будет задать двумя параметрами, так как она может двигаться только по сфере радиусом r_{12} с центром P_1; после того как положения P_1 и P_2 зафиксированы, у точки P_3 осталась только одна степень свободы, так как точка при движении должна оставаться на окружности с радиусом, равным расстоянию от P_3 до прямой P_1P_2, и лежащей в плоскости, перпендикулярной P_1P_2. Итак, число степеней свободы твердого тела равно шести, как бы ни было велико число N образующих его точек.

Из приведенных рассуждений следует, что твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы; если у тела неподвижны две точки, то оно имеет одну степень свободы. Если свободное твердое тело представляет собой бесконечно тонкий стержень (или связанные им две материальные точки), то оно имеет пять степеней свободы.

Задача кинематики твердого тела состоит в разработке способов задания его движения, а также способов, позволяющих по небольшому числу кинематических характеристик, общих для всего тела, находить кинематические характеристики каждой точки тела.

Дадим нужные в дальнейшем определения простейших перемещений твердого тела. Рассмотрим два положения твердого тела, которые назовем его *начальным* и *конечным* положениями. При переходе тела из начального положения в конечное оно совершает некоторое перемещение. Будем рассматривать это перемещение, совершенно отвлекаясь от промежуточных положений, через которые тело проходит во время движения из начального положения в конечное, и от времени, в течение которого совершается этот переход. Таким образом, рассматриваемое перемещение определяется только начальным и конечным положениями тела; если конечное положение тела совпадает с его начальным положением, то никакого перемещения нет.

Перемещение твердого тела, при котором перемещения всех его точек геометрически равны, назовем *поступательным перемещением.*

Перемещение твердого тела, при котором его конечное положение получается из начального путем поворота вокруг неподвижной прямой, называется *вращением* (вокруг этой прямой), а сама неподвижная прямая называется *осью вращения.*

Винтовым перемещением называется совокупность поступательного перемещения и вращения, в которой поступательное перемещение происходит вдоль оси вращения.

19. Векторно-матричное задание движения твердого тела. Углы Эйлера. Пусть O_aXYZ — абсолютная система координат (рис. 17), O — произвольная фиксированная точка твердого тела, которую в дальнейшем будем называть *полюсом*, $OXYZ$ — система координат, получающаяся из системы координат O_aXYZ при помощи поступательного перемещения, $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с твердым телом, изучением движения которого мы занимаемся.

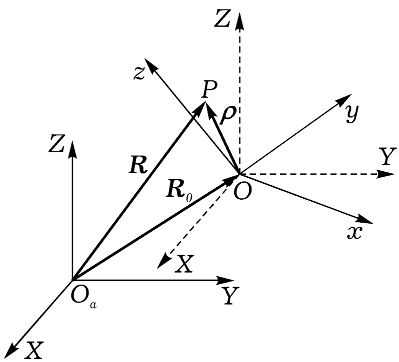

Рис. 17

Само тело на рис. 17 не изображено. Пусть P — некоторая точка тела. Векторы $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{R}$ заданы своими компонентами в системе $OXYZ$, а вектор $\boldsymbol{\rho} = \overline{OP}$ — в системе $Oxyz$; очевидно, что $\boldsymbol{\rho}$ — постоянный вектор. Вектор $\overline{OP}$, заданный своими компонентами в системе $OXYZ$, обозначим $\boldsymbol{r}$. Имеет место соотношение

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — матрица перехода от системы $Oxyz$ к системе $OXYZ$.

Положение точки P тела в абсолютной системе координат задается равенством

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}. \tag{2}$$

При движении твердого тела в общем случае изменяется положение полюса O, а также изменяется ориентация тела в абсолютном пространстве. Поэтому $\boldsymbol{R}_0$ и $\mathbf{A}$ в (2) — функции времени; будем их считать дважды непрерывно дифференцируемыми.

Матрица $\mathbf{A}$, задавая переход от одного ортонормированного базиса к другому, является ортогональной, т. е. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$. Из последнего равенства следует, что ее элементы связаны шестью независимыми соотношениями: сумма квадратов элементов каждой строки (столбца) равна единице и сумма попарных произведений соответствующих элементов столбцов (строк) равна нулю. Следовательно, из девяти элементов матрицы **A** независимых только три. Таким образом, матрицу **A** можно задать при помощи трех независимых параметров. В зависимости от конкретного выбора этих параметров матрица **A** будет выглядеть по-разному. Рассмотрим один из наиболее распространенных способов задания ориентации твердого тела при помощи углов Эйлера и найдем соответствующую им матрицу **A**.

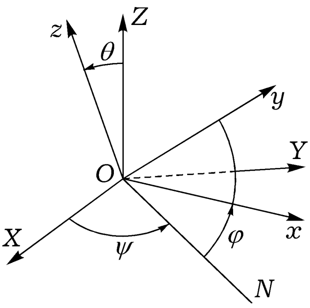

Рис. 18

Углы Эйлера вводятся следующим образом (рис. 18). Плоскость Oxy пересекается с плоскостью OXY по прямой ON, которая носит название *линии узлов.* Угол, составляемый линией узлов с осью OX, обозначается буквой ψ и называется *углом прецессии*, угол между осями Oz и OZ обозначается буквой θ и называется *углом нутации*, угол между осью Ox и линией узлов обозначается буквой φ и называется *углом собственного вращения.*

Три угла ψ, θ, φ не зависят один от другого и могут быть выбраны совершенно произвольно. Если заданы три числа, являющихся значениями углов ψ, θ, φ, то тем самым однозначно определена ориентация твердого тела в абсолютном пространстве. Обычно принимается, что $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Переход от системы координат $OXYZ$ к системе $Oxyz$ осуществляется при помощи трех последовательных поворотов: на угол ψ вокруг OZ, на угол θ вокруг ON и на угол φ вокруг Oz. Все повороты производятся против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующих осей поворота.

При первом повороте мы переводим систему координат $OXYZ$ в промежуточную систему координат OX_1Y_1Z. Соответствующий переход задается матрицей $\mathbf{A_1}$:

$$\left\| \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\| = \mathbf{A}_1 \left\| \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{A}_1 = \left\| \begin{matrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Второй поворот осуществляет переход от OX_1Y_1Z к еще одной промежуточной системе координат OX_1Y_2z. Соответствующую матрицу перехода обозначим $\mathbf{A_2}$:

$$\begin{Vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{Vmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{Vmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ z \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}.$$

И, наконец, третий поворот переводит систему координат OX_1Y_2z в систему координат $Oxyz$. Этому повороту соответствует матрица $\mathbf{A}_3$:

$$\begin{Vmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ z \end{Vmatrix} = \mathbf{A}_3 \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{A}$ перехода от системы координат $Oxyz$ к системе $OXYZ$ равна произведению матриц $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$; ее элементы a_{ij} выражаются через углы Эйлера по следующим формулам:

$$\begin{gathered} a_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ a_{12} = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ a_{13} = \sin\psi\sin\theta, \quad a_{21} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ a_{22} = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta, \quad a_{23} = -\cos\psi\sin\theta, \\ a_{31} = \sin\varphi\sin\theta, \quad a_{32} = \cos\varphi\sin\theta, \quad a_{33} = \cos\theta. \end{gathered} \tag{3}$$

Отметим, что при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ линия узлов ON и углы φ и ψ не определены, а определена только их сумма $\varphi + \psi$. Эта особенность углов Эйлера делает их малопригодными для исследования движений, при которых ось Oz тела может принимать направления, близкие прямой, проходящей через ось OZ. Избежать этих трудностей можно, применяя другие углы, определяющие ориентацию тела в абсолютном пространстве, или модифицируя углы Эйлера так, чтобы угол θ до оси Oz отсчитывался не от оси OZ, а, например, от OX или OY.

Замечание 2. *Мы видели, что конечный поворот системы $OXYZ$, переводящий ее в систему $Oxyz$, задается матрицей $\mathbf{A}$, являющейся произведением трех матриц, задающих последовательные повороты. Но, так как операция перемножения матриц не обладает свойством коммутативности, отсюда следует, что конечные повороты твердого тела некоммутативны. Это означает, что в общем случае ориентация твердого тела, получаемая им в результате двух последовательных конечных поворотов, зависит от порядка выполнения этих поворотов.*

Упражнение 1. *Привести конкретный пример некоммутативных поворотов твердого тела.*

20. Движение твердого тела с неподвижной точкой как ортогональное преобразование. Если во все время движения у твердого тела остается неподвижной одна точка O, то говорят, что тело движется вокруг точки O, или совершает *сферическое движение.*

При движении тела вокруг неподвижной точки O в формуле (2) вектор $\boldsymbol{R}_0$ постоянен. Пусть при $t = 0$ оси связанной с телом системы координат $Oxyz$ совпадают с соответствующими осями неподвижной системы координат $OXYZ$. Матрица $\mathbf{A}$ будет при этом единичной матрицей ($\mathbf{A} = \mathbf{E}$) и, согласно (1), (2), $\boldsymbol{R} = r = \boldsymbol{\rho}$, причем выписанные векторы задаются своими компонентами в одной и той же системе координат: либо $Oxyz$, либо $OXYZ$, что безразлично, так как эти системы координат при $t = 0$ совпадают. Мы будем считать, что векторы заданы в неподвижной системе $OXYZ$.

Когда тело начнет двигаться, то оно будет «переносить» с собой вектор $\boldsymbol{\rho}$, поворачивая его вокруг точки O. Через какое-то время t вектор $\boldsymbol{\rho}$ перейдет в вектор $\mathbf{r} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\rho}$. Последняя формула определяет преобразование пространства, в котором выбрана система координат $OXYZ$. Матрица $\mathbf{A}(t)$ ортогональна, т. е. $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{E}$. Отсюда и из правила нахождения определителя произведения квадратных матриц следует, что $(\det \mathbf{A})^2 = 1$. Следовательно, $\det \mathbf{A}$ может принимать только два значения $+1$ или -1, но, так как $\det \mathbf{A}$ в начальный момент равен единице, стать равным -1 при каком-либо t он не может в силу своей непрерывности по t.

Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки задает собственное ортогональное преобразование.

21. Основные теоремы о конечных перемещениях твердого тела.

Теорема (Эйлера). *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Доказательство.

Заметим, что утверждение теоремы Эйлера эквивалентно тому, что у матрицы $\mathbf{A}$ есть собственное значение, равное $+1$. Соответствующий собственный вектор $\boldsymbol{r}$ задает ось вращения.

Действительно, так как $\boldsymbol{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{r}$, то направление этой оси остается неизменным при движении тела.

Пусть $f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ — характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$. Чтобы показать, что $f(1) = 0$, рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}' - \mathbf{E}') = \det(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E}) = \\
&= \det(\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E})) = \det(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det(-(\mathbf{A} - \mathbf{E})) = \\
&= (-1)^3 \det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = -f(1).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что $f(1) = 0$, и теорема доказана.

Теперь найдем упоминаемый в теореме угол поворота вокруг оси. Для этого удобно перейти от системы $OXYZ$ к системе $O\widetilde{X}\widetilde{Y}\widetilde{Z}$, у которой ось $O\widetilde{Z}$ направлена вдоль оси вращения. В этой системе матрица $\widetilde{\mathbf{A}}$, задающая поворот на угол α, имеет вид

$$
\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.
$$

Замечая, что $\mathbf{A}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$ подобны, и пользуясь тем, что у подобных матриц суммы диагональных элементов совпадают, получаем равенство, определяющее угол поворота α:

$$
1 + 2\cos\alpha = a_{11} + a_{22} + a_{33}.
$$

Теорема (Шаля). ***Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.***

Доказательство.

Осуществляется простым геометрическим вычислением. На рис. 19 O_aXYZ — абсолютная система координат. Системы координат $OXYZ$ и $O_1X_1Y_1Z_1$ (не показанные на рис. 19) с началом в двух различных полюсах O и O_1 получаются из O_aXYZ поступательными перемещениями, определяемыми соответственно векторами $\boldsymbol{R}_O$ и $\boldsymbol{R}_{O_1}$. Считаем, что векторы $\boldsymbol{R}_O$ и $\boldsymbol{R}_{O_1}$ заданы своими компонентами в абсолютной системе координат O_aXYZ. Положение произвольной точки P тела в абсолютной системе координат определяется вектором $\boldsymbol{R}$. Показанные на рис. 19 векторы $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1$, $\overline{OO_1}$ считаем заданными их компонентами в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с твердым телом. Имеем равенства

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}(\overline{OO}_1 + \boldsymbol{\rho}_1) = \\ = \boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\overline{OO}_1 + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{R}_{O_1} + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_1.$$

Отсюда и следует справедливость теоремы Шаля. Действительно, перемещение твердого тела можно представить как поступательное, определяемое перемещением полюса, плюс вращение, задаваемое матрицей $\mathbf{A}$. Причем из предыдущего видно, что матрица $\mathbf{A}$ не зависит от выбора полюса, но из доказательства теоремы Эйлера следует, что ось вращения и угол поворота определяются только элементами матрицы $\mathbf{A}$. Поступательное же перемещение зависит от полюса. Из приведенного выше равенства видно, что для разных полюсов O и O_1 поступательные перемещения, задаваемые векторами $\boldsymbol{R}_O$ и $\boldsymbol{R}_{O_1}$, связаны соотношением $\boldsymbol{R}_{O_1} = \boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\overline{OO}_1$.

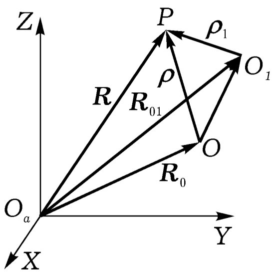

Рис. 19

Упражнение 2. *Показать, что результирующее перемещение твердого тела не зависит от порядка, в котором следуют одно за другим составляющие его поступательное перемещение и вращение.*

Теорема (Моцци). *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Доказательство.

Разложим перемещение твердого тела на поступательное вместе с некоторым полюсом O и на вращение вокруг полюса. Согласно теореме Шаля, направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса. Для удобства вычислений ось O_aZ абсолютной системы координат направим по оси вращения, и пусть в исходном положении тела соответствующие оси абсолютной O_aXYZ и связанной с твердым телом $Oxyz$ систем координат совпадают. Если α — угол поворота, то матрица $\mathbf{A}$, определяющая ориентацию тела в его конечном положении относительно абсолютной системы координат, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теорема Моцци будет доказана, если в теле найдется такая прямая, точки которой после перемещения тела из начального положения в конечное переместились бы только вдоль этой прямой. Действительно, выбирая тогда полюса на этой прямой, мы представим перемещение твердого тела в виде винтового перемещения, что и будет означать справедливость теоремы Моцци.

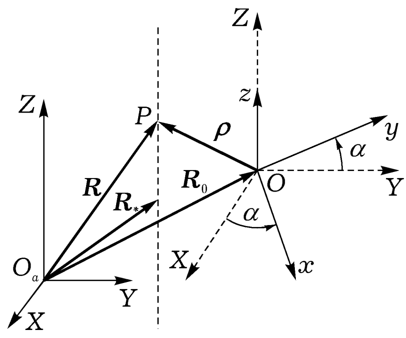

Рис. 20

Представим вектор $\boldsymbol{R}_O$ перемещения полюса (рис. 20) в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{R}_O = \boldsymbol{R}_O^{\|} + \boldsymbol{R}_O^{\perp}$, где в абсолютной системе координат

$$\boldsymbol{R}_O = \left\| \begin{matrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{matrix} \right\|, \qquad \boldsymbol{R}_O^{\|} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ Z_O \end{matrix} \right\|, \qquad \boldsymbol{R}_O^{\perp} = \left\| \begin{matrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Пусть P — точка тела с радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$ относительно полюса O. В начальном положении тела $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R}_*$. В конечном положении тела вектор $\boldsymbol{\rho}$ в абсолютной системе координат перейдет в вектор $\boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\boldsymbol{R}_*$. Рассмотрим прямую, параллельную оси OZ и проходящую через конец вектора $\boldsymbol{R}_*$. Если при перемещении тела точки этой прямой переместились вдоль неё самой, то $\boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\boldsymbol{R}_* = \boldsymbol{R}_* + \boldsymbol{R}_O^{\|}$. Отсюда следует, что $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\boldsymbol{R}_* = -\boldsymbol{R}_O^{\perp}$. Если X_*, Y_*, Z_* — компоненты вектора $\boldsymbol{R}_*$ в системе O_aXYZ, то из последнего равенства следуют два скалярных уравнения, которым должны удовлетворять X_*, Y_*:

$$(\cos\alpha - 1)X_* - \sin\alpha Y_* = X_O, \quad \sin\alpha X_* + (\cos\alpha - 1)Y_* = Y_O.$$

Величина же Z_* может быть произвольной, так как третье скалярное уравнение удовлетворяется тождественно.

Определитель выписанной системы линейных уравнений равен $4\sin^2(\alpha/2)$. Он отличен от нуля, если $\alpha \neq 0,\ 2\pi$, т. е. когда перемещение отлично от поступательного. Таким образом, мы получили в теле прямую $X = X_*$, $Y = Y_*$, параллельную оси вращения, точки которой смещаются при перемещении тела вдоль нее самой.

Следствие 1 (теорема Бернулли–Шаля). *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

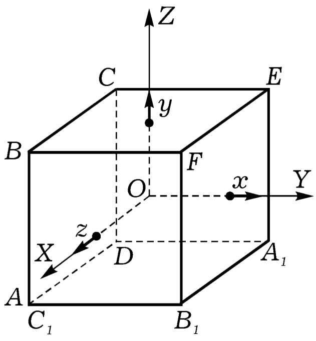

Рис. 21

Пример 1. *Пусть куб движется так, что три его вершины A, B, C переходят в новые положения A_1, B_1, C_1 — также вершины куба* (рис. 21). *Выясним, каким простейшим движением может быть достигнут этот переход.*

Так как центр куба O при указанном перемещении остался на месте, то применима теорема Эйлера. Свяжем с кубом систему координат $OXYZ$, оси которой перпендикулярны соответствующим граням куба. В результате перемещения куба оси OX, OY и OZ перейдут соответственно в оси Ox, Oy и Oz (рис. 21). *Нетрудно увидеть, что матрица* $\mathbf{A}$, *задающая перемещение (поворот) куба, будет такой:*

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Для собственного вектора $\boldsymbol{r}$ матрицы $\mathbf{A}$, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$, имеем $\boldsymbol{r}' = (1,\ 1,\ 1)$. Угол поворота определяется уравнением $2\cos\Phi + 1 = 0$.

Таким образом, указанное перемещение куба достигается вращением вокруг диагонали DF на угол $120°$.

22. Скорость и ускорение твердого тела при поступательном движении. До сих пор при изучении перемещения твердого тела мы интересовались лишь его начальным и конечным положениями, не обращая внимания на быстроту перемещения. Теперь будем находить скорости и ускорения точек твердого тела при его движении.

Движение твердого тела в течение некоторого промежутка времени называется *поступательным*, если поступательно его перемещение между положениями, соответствующими двум произвольным моментам времени из этого промежутка. Примерами поступательных движений могут служить движение пассажирского лифта в многоэтажных жилых домах, движение ящика письменного стола при его вдвигании и выдвигании, движение кабины «колеса обозрения» в парке. В первых двух примерах поступательное движение прямолинейное (все точки тела движутся по прямым), в третьем примере — криволинейное (точки тела движутся по криволинейным траекториям — окружностям).

Так как при поступательном перемещении любые две точки тела P_1 и P_2 за время Δt имеют геометрически равные перемещения $\Delta \boldsymbol{R}_1$

и $\Delta \boldsymbol{R}_2$, то при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости и равные ускорения. Эти одинаковые для всех точек тела скорости и ускорения называются соответственно *скоростью* и *ускорением поступательного движения* твердого тела. В дальнейшем мы увидим, что понятия скорости и ускорения твердого тела имеют смысл только для поступательного движения, так как при движении, отличном от поступательного, скорости и ускорения различных точек тела, как правило, неодинаковы.

23. О мгновенном кинематическом состоянии твердого тела. Если в данный момент времени скорости $\boldsymbol{v}$ всех точек твердого тела равны между собой, то говорят, что тело совершает *мгновенно поступательное движение* со скоростью $\boldsymbol{v}$. В частности, если $\boldsymbol{v} = 0$, то тело находится в *мгновенном покое.*

Замечание 3. *Здесь речь идет только о распределении скоростей точек тела в данный момент времени. В частности, ускорения точек тела совсем не обязаны быть одинаковыми.*

Если в данный момент времени точки некоторой прямой в твердом теле имеют скорости, равные нулю, то говорят, что тело совершает *мгновенное вращение* вокруг этой прямой, а прямую называют *мгновенной осью вращения.*

Замечание 4. *В приведенном определении речь идет только о распределении скоростей точек некоторой прямой в твердом теле. Мгновенная ось вращения, в частности, в разные моменты времени может занимать разные положения и в движущемся теле, и в абсолютном пространстве.*

Если в данный момент тело участвует в совокупности двух мгновенных движений, поступательном вдоль некоторой оси и вращении вокруг этой оси, то говорят, что тело совершает *мгновенно винтовое движение.* В дальнейшем (в п. 28) будет показано, что самое общее мгновенное движение свободного твердого тела является мгновенно винтовым.

24. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения. Пусть O_aXYZ — неподвижная система координат (рис. 17), O — произвольно выбранный полюс, $Oxyz$ — жестко связанная с твердым телом система координат; система координат $OXYZ$ получается из O_aXYZ поступательным перемещением, определяемым вектором $\boldsymbol{R}_O$. Пусть P — некоторая точка тела, $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{r}$ — вектор $\overline{OP}$, заданный своими компонентами в системах координат $Oxyz$ и $OXYZ$ соответственно.

Теорема. *Существует единственный вектор $\boldsymbol{\omega}$, называемый угловой скоростью тела, с помощью которого скорость $\boldsymbol{v}$ точки P тела может* *быть представлена в виде*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{v}_o$ *— скорость полюса* O*; вектор* $\boldsymbol{\omega}$ *от выбора полюса не зависит.*

Доказательство.

Продифференцируем обе части равенства (2), учтя сначала, что вектор $\boldsymbol{\rho}$ постоянен, а затем воспользовавшись формулой (1). Получим

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}}_0 + \dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{v}_o + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{r}. \tag{5}$$

Покажем, что матрица $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$ кососимметрическая. В самом деле, продифференцировав по времени тождество $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{E}$, получим $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}' + \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}' = 0$. Отсюда $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}'$. Применив операцию транспонирования к обеим частям этого равенства, имеем окончательно $(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})' = -\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}' = -\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$.

Теперь введем обозначения для элементов кососимметрической матрицы $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$ по формуле

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \left\| \begin{matrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Если составить вектор $\boldsymbol{\omega}' = (\omega_X,\ \omega_Y,\ \omega_Z)$ с компонентами, заданными в системе координат O_aXYZ, то результат умножения матрицы $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$ на вектор $\boldsymbol{r}$ может быть представлен в виде векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Отсюда и из (5) следует формула (4). Попутно показана справедливость равенства (называемого *формулой Эйлера*)

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{6}$$

Мы ввели $\boldsymbol{\omega}$, взяв предварительно в неподвижном пространстве конкретный базис, задающий систему координат O_aXYZ. Из (4) получаем, что в этой системе координат $\boldsymbol{\omega} = {}^1\!/_2 \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. Единственность $\boldsymbol{\omega}$ при заданном полюсе O следует теперь из инвариантности вихря и независимости $\boldsymbol{v}$ от выбора базиса (см. замечание 1 в п. 6). Независимость $\boldsymbol{\omega}$ от выбора полюса получаем из того, что компоненты $\boldsymbol{\omega}$ целиком определяются элементами матрицы $\mathbf{A}$ и их производными по времени, а матрица $\mathbf{A}$ от выбора полюса не зависит (см. п. 21). Теорема доказана.

Отметим некоторые следствия, вытекающие из формулы (4).

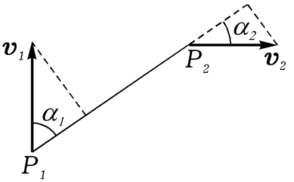

Рис. 22

1. *В каждый момент времени проекции скоростей любых двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.* (На рис. 22 $v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2$. Механический смысл этого равенства весьма прост: в силу того что $P_1P_2 = \mathrm{const}$, точка P_1 не может ни «догнать» точку P_2, ни «отстать» от нее.) Доказательство следует из того, что согласно (4) $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \overline{P_1P_2}$. Отсюда $\boldsymbol{v}_1 \cdot \overline{P_1P_2} = \boldsymbol{v}_2 \cdot \overline{P_1P_2}$, или $v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2$.

2. *Скорости трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, вполне определяют скорость любой точки тела.* (Очень простое геометрическое доказательство получается, если использовать следствие 1.)

3. *Если векторы скоростей трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, в некоторый момент времени равны, то тело совершает мгновенно поступательное движение.*

4. *Если в данный момент времени скорости двух точек тела равны нулю, то тело либо находится в мгновенном покое, либо совершает мгновенное вращение вокруг прямой, проходящей через эти точки.*

5. *Если скорость некоторой точки тела в данный момент времени равна нулю, то тело находится либо в мгновенном покое, либо в мгновенном вращении вокруг оси, проходящей через эту точку.*

6. *Мгновенное движение твердого тела в самом общем случае разлагается на два движения: поступательное со скоростью, равной скорости произвольного полюса, и вращение вокруг оси, проходящей через этот полюс.*

Чтобы найти ускорение $\boldsymbol{w}$ точки P, продифференцируем обе части формулы (4) по времени. Получим

$$\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}.$$

Вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ называется *угловым ускорением.* Учтя (6), формулу для $\boldsymbol{w}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \qquad (7)$$

Вектор $\boldsymbol{w}_{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$ называют *вращательным ускорением*, а $\boldsymbol{w}_{\text{ос}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ — *осестремительным ускорением.* Таким образом, ускорение произвольной точки твердого тела складывается из ускорения полюса, вращательного и осестремительного ускорений. Формула (7) носит название *формулы Ривальса.*

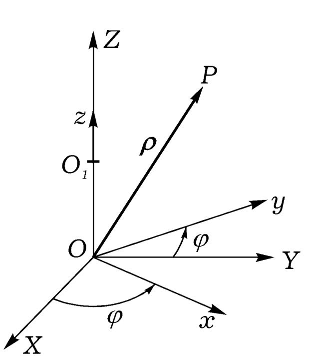

Рис. 23

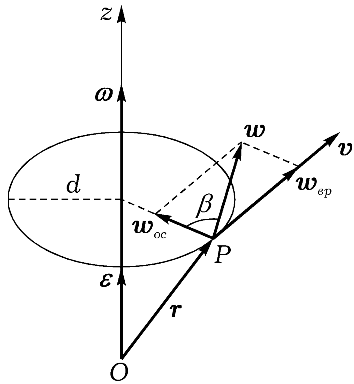

Рис. 24

25. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть в твердом теле неподвижны две точки O и O_1. Прямая, проходящая через O и O_1, будет осью вращения. Ось OZ неподвижной системы координат и ось Oz системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, направим по оси вращения. Ориентация тела относительно неподвижной системы координат определяется углом $\varphi(t)$ между осями OX и Ox (рис. 23). Точки тела, не принадлежащие оси вращения, движутся по окружностям с центрами на оси вращения и лежащим в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Пусть точка P тела задана в связанной системе координат радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}, \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -\dot\varphi & 0 \\ \dot\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\varphi \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена по оси вращения, причем так, что если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{\omega}$, то вращение тела видно происходящим против часовой стрелки. Угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ также направлено по оси вращения, причем в ту же сторону, что и $\boldsymbol{\omega}$, если $\dot\varphi\ddot\varphi > 0$, т. е. если вращение ускоренное (этот случай представлен на рис. 24), и противоположно $\boldsymbol{\omega}$, если $\dot\varphi\ddot\varphi < 0$, т. е. если вращение замедленное.

Для вычисления скорости и ускорения точки P примем начало координат O за полюс. Тогда $\boldsymbol{v}_o = 0$ и из формулы (4) имеем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Вектор $\boldsymbol{v}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Его модуль $v = \omega d = |\dot{\varphi}| d$, где d — радиус окружности, по которой движется точка P.

Учитывая, что $\boldsymbol{w}_o = 0$, из формулы Ривальса (7) получим $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$. Вращательное ускорение $\boldsymbol{w}_{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$ направлено по касательной к траектории точки P (к окружности радиуса d); его модуль $w_{\text{вр}} = \varepsilon d = |\ddot{\varphi}| d$ (рис. 24). Осестремительное ускорение $\boldsymbol{w}_{\text{ос}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$; оно лежит на перпендикуляре, проведенном к оси вращения из точки P, и направлено к оси вращения; его модуль $w_{\text{ос}} = \omega^2 d$.

Отметим, что вращательное ускорение точки P в случае вращения тела вокруг неподвижной оси является ее касательным (тангенциальным) ускорением (см. п. 6), а осестремительное ускорение является нормальным ускорением точки P. Модуль полного ускорения точки P вычисляется по формуле $w = d\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Угол β между направлениями осестремительного и полного ускорений вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\beta = \varepsilon/\omega^2$.

26. Движение вокруг неподвижной точки. Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку O. Тогда снова $\boldsymbol{v}_o = 0$, $\boldsymbol{w}_o = 0$ и формулы для $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ те же, что и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси, рассмотренном в п. 25.

Таким образом, в данный момент времени скорости точек тела таковы, какими они были бы, если бы тело вращалось с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси, на которой в данный момент времени лежит вектор $\boldsymbol{\omega}$. Эта ось называется *мгновенной осью вращения*, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ — *мгновенной угловой скоростью.* Все точки мгновенной оси вращения имеют скорости, равные нулю. Мгновенная ось вращения перемещается и в теле, и в абсолютном пространстве. В связи с этим заметим, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки (и в общем случае движения свободного твердого тела) ω не является производной некоторого угла φ, так как нет такого направления, вокруг которого поворот на угол φ совершается.

При своем движении мгновенная ось вращения описывает в теле коническую поверхность — *подвижный аксоид*, а в абсолютном пространстве коническую поверхность — *неподвижный аксоид.* Вершины этих аксоидов совпадают с неподвижной точкой O. Аксоиды касаются один другого по образующей, совпадающей с мгновенной осью вращения. Можно показать, что при движении тела подвижный аксоид катится по неподвижному без скольжения.

Годограф вектора $\boldsymbol{\omega}$ лежит на неподвижном аксоиде. Так как $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, то угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлено по касательной к годогра-

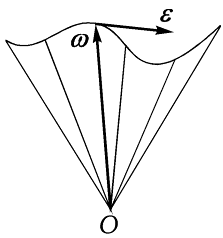

Рис. 25

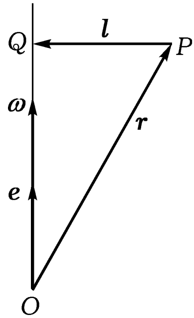

Рис. 26

фу и вовсе не обязательно по мгновенной оси вращения (рис. 25). Положим $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, коллинеарный $\boldsymbol{\omega}$. Тогда $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$, где вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dot{\omega}\boldsymbol{e}$ направлен по мгновенной оси вращения, а $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \omega\dot{\boldsymbol{e}}$ перпендикулярен ей. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ характеризует изменение $\boldsymbol{\omega}$ по модулю, а $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ — по направлению. Если мгновенная ось вращения вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, то $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$.

Согласно формуле (7), ускорение $\boldsymbol{w}$ какой-либо точки P тела равно сумме вращательного и осестремительного ускорений. При этом

$$\boldsymbol{w}_{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \boldsymbol{r}. \tag{8}$$

Вычислим осестремительное ускорение. Пусть Q — точка на мгновенной оси вращения, в которой ее пересекает опущенный на нее из точки P перпендикуляр (рис. 26). Обозначим вектор $\overline{PQ}$ буквой $\boldsymbol{l}$. Тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_{\text{ос}} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \omega^2 \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}) = \\ &= \omega^2[\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}] = \omega^2(\overline{OQ} - \boldsymbol{r}) = \omega^2 \boldsymbol{l}. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, $\boldsymbol{w}_{\text{ос}}$ совпадает с тем нормальным ускорением, которое имела бы точка P, если бы тело вращалось вокруг мгновенной оси вращения, как вокруг неподвижной, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

Следует иметь в виду, что, в отличие от случая вращения тела вокруг неподвижной оси, при вращении тела вокруг неподвижной точки $\boldsymbol{w}_{\text{вр}}$ и $\boldsymbol{w}_{\text{ос}}$ уже не обязаны быть касательной и нормальной составляющими ускорения точки P.

Упражнение 3. *Показать, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента — с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей* $\boldsymbol{\omega}$ *и* $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Пример 1. *Диск радиуса $3a$ катится без скольжения по горизонтальной плоскости, описывая окружность радиуса $4a$ с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ и сохраняя свою плоскость вертикальной. Найти скорость и ускорение наивысшей точки диска P.*

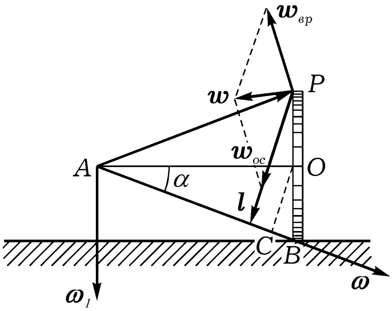

Рис. 27

Будем представлять себе диск как основание конуса, движущегося вокруг неподвижной точки A (на рис. 27 показано сечение APB этого конуса, скорость центра диска направлена перпендикулярно плоскости рисунка на читателя).

Ввиду отсутствия скольжения скорость точки B диска равна нулю. Поэтому угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ диска направлена по AB от точки A к B. Величина угловой скорости может быть найдена из равенств

$$v_o = \omega_1 AO = \omega OC.$$

Из $\triangle AOB$ имеем

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad OC = AO\sin\alpha = \frac{12}{5}a.$$

Поэтому

$$\omega = \frac{AO}{OC}\omega_1 = \frac{5}{3}\omega_1.$$

Далее, $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP}$. Скорость $\boldsymbol{v}_P$ перпендикулярна плоскости рисунка и направлена на читателя, $v_P = \omega AP\sin 2\alpha = 8\omega_1 a$.

Так как модуль угловой скорости постоянен, то угловое ускорение диска определяется равенством $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}$. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен на читателя, $\varepsilon = \omega_1\omega\sin(\pi/2 - \alpha) = 4\omega_1^2/3$.

Найдем теперь ускорение точки P. Имеем $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{вр} + \boldsymbol{w}_{ос}$, где $\boldsymbol{w}_{вр} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{AP}$, $\boldsymbol{w}_{ос} = \omega^2\boldsymbol{l}$, $w_{вр} = \varepsilon AP = 20\omega_1^2 a/3$, $w_{ос} = 40\omega_1^2 a/3$. Вектор $\boldsymbol{w}_{вр}$ направлен перпендикулярно $\overline{AP}$, лежит в плоскости рисунка и составляет с вектором $\boldsymbol{w}_{ос}$ угол $\beta = \pi - 2\alpha$. Следовательно,

$$w = \sqrt{w_{вр}^2 + w_{ос}^2 - 2w_{вр}w_{ос}\cos 2\alpha} = \frac{4\sqrt{97}}{3}\omega_1^2 a.$$

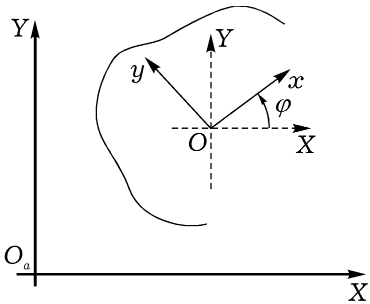

Рис. 28

27. Плоское движение тела. Движение твердого тела называют *плоским*, если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Пусть этой неподвижной плоскостью будет координатная плоскость O_aXY абсолютной системы координат. Каждая прямая, проведенная в теле перпендикулярно плоскости O_aXY, движется поступательно. Поэтому для определения движения этой прямой достаточно знать движение какой-либо одной ее точки. Движение же всего тела будет известно, если известно движение любого сечения тела плоскостью, параллельной неподвижной плоскости O_aXY. Следовательно, изучение плоского движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

Плоская фигура, вынужденная двигаться, оставаясь в своей плоскости, имеет три степени свободы. За обобщенные координаты примем две координаты X_o, Y_o полюса O и угол φ, образованный осью Ox, жестко связанной с фигурой системы координат с осью O_aX абсолютной системы координат (рис. 28).

Скорости и ускорения точек плоской фигуры могут быть найдены по формулам (4) и (7), справедливым для самого общего случая движения твердого тела. Остановимся только на некоторых специфических свойствах плоского движения.

Теорема. ***Если движение плоской фигуры в ее плоскости в данный момент времени не является мгновенно поступательным, то в этот момент времени существует единственная точка C фигуры, скорость которой равна нулю. Скорости остальных точек таковы, какими они были бы при мгновенном вращении фигуры вокруг точки C.***

Доказательство.

Так как движение не является мгновенно поступательным, то $\boldsymbol{\omega} \neq 0$. В абсолютной системе координат векторы $\boldsymbol{v}_o$, $\boldsymbol{\omega}$ и неизвестный вектор $\overline{OC}$ запишем в виде

$$\boldsymbol{v}_o = \begin{Vmatrix} \dot{X}_o \\ \dot{Y}_o \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Vmatrix}, \qquad \overline{OC} = \begin{Vmatrix} X_c \\ Y_c \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку скорость $\boldsymbol{v}_c$ искомой точки C равна нулю, то для нахождения ее координат получаем из формулы (4) векторное уравнение

$$\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OC} = 0,$$

которое эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$\dot{X}_o - \dot{\varphi} Y_c = 0, \qquad \dot{Y}_o + \dot{\varphi} X_c = 0,$$

откуда получаем $X_c = -\frac{1}{\dot{\varphi}}\dot{Y}_o$, $Y_c = \frac{1}{\dot{\varphi}}\dot{X}_o$, или в векторной форме

$$\overline{OC} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_o}{\omega^2}. \tag{10}$$

Если теперь принять точку C за полюс, то теорема будет полностью доказана. Точка C называется *мгновенным центром скоростей.*

Формула (10) дает геометрический способ нахождения мгновенного центра скоростей, если известны угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и скорость полюса $\boldsymbol{v}_o$. Смотря с конца вектора $\boldsymbol{\omega}$, повернем вектор $\boldsymbol{v}_o$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рис. 29), затем от точки O в направлении, которое занял повернутый вектор $\boldsymbol{v}_o$, отложим отрезок длиной v_o/ω; конец C этого отрезка и будет мгновенным центром скоростей.

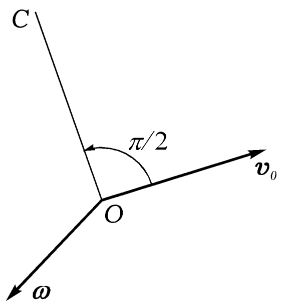

Рис. 29

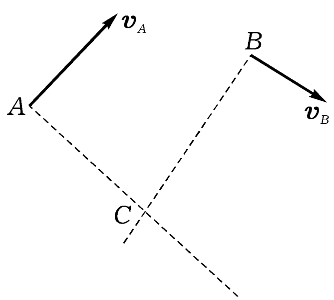

Рис. 30

Часто вектор $\boldsymbol{\omega}$ не задан, но известны скорости $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ двух точек A и B плоской фигуры. При построении мгновенного центра скоростей здесь следует рассмотреть следующие возможности.

1) Если $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B$, то движение мгновенно поступательное, так как из формулы $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$ следует, что $\boldsymbol{\omega} = 0$ (здесь мгновенный центр «находится в бесконечности»; терминология оправдывается тем, что при $\dot{\varphi} \to 0$ величины X_c и Y_c неограниченно возрастают по модулю).

2) Если $\boldsymbol{v}_A \neq \boldsymbol{v}_B$, но скорость одной из точек, скажем точки A, равна нулю, то A и есть мгновенный центр скоростей.

3) Если векторы $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ неколлинеарны (рис. 30), то мгновенный центр скоростей лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ в точках A и B. Это проще всего показать, опираясь на свойство проекций скоростей двух точек твердого тела на соединяющую их прямую (см. следствие 1 п. 24). Действительно, проекции $\boldsymbol{v}_C$ на $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ равны нулю, так как вектор $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен $\overline{CA}$ и $\boldsymbol{v}_B$ перпендикулярен $\overline{CB}$. А поскольку $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ неколлинеарны, то отсюда следует, что $\boldsymbol{v}_C = 0$.

4) Пусть $\boldsymbol{v}_A \neq \boldsymbol{v}_B$, но вектор $\boldsymbol{v}_A$ параллелен $\boldsymbol{v}_B$. Случай, когда вектор $\overline{AB}$ не перпендикулярен $\boldsymbol{v}_A$ (или $\boldsymbol{v}_B$), невозможен, так как тогда проекции $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ на прямую, проходящую через точки A и B, не будут равными. Если же вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен $\boldsymbol{v}_A$ (и $\boldsymbol{v}_B$), то мгновенный центр скоростей, как нетрудно проверить, лежит на пересечении прямой, проходящей через точки A и B, и прямой, проходящей через концы векторов $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ (рис. 31).

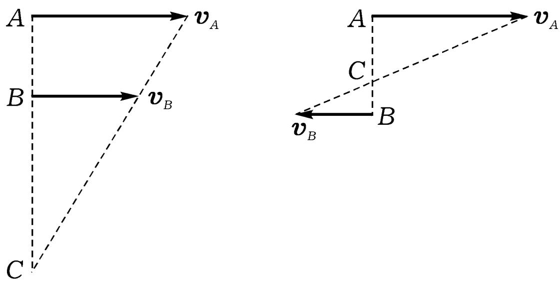

Рис. 31

При движении тела мгновенный центр скоростей перемещается и в теле, и в абсолютном пространстве. Геометрическое место его положений на неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*, а геометрическое место положений мгновенного центра скоростей в самой движущейся плоской фигуре называется *подвижной центроидой*. Можно показать, что при движении тела подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения.

Теперь рассмотрим некоторые особенности, касающиеся распределения ускорений точек твердого тела при его плоском движении.

Теорема. *Пусть плоская фигура движется в своей плоскости. Если в некоторый момент времени хотя бы одна из величин $\dot{\varphi}$ или $\ddot{\varphi}$ отлична от нуля, то в этот момент времени существует единственная точка Q фигуры, ускорение которой равно нулю.*

Доказательство.

Пусть заданы ускорение полюса $\boldsymbol{w}_O$, мгновенная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и мгновенное угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$. Требуется найти вектор $\overline{OQ}$ такой, чтобы ускорение точки Q было равно нулю. Из формулы (7) получаем векторное уравнение для $\overline{OQ}$:

$$\boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{OQ} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{OQ}) = 0. \tag{11}$$

Учитывая, что в абсолютной системе координат

$$\boldsymbol{w}_O = \begin{Vmatrix} \ddot{X}_O \\ \ddot{Y}_O \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{Vmatrix}, \qquad \overline{OQ} = \begin{Vmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ 0 \end{Vmatrix},$$

из (11) получаем систему двух линейных уравнений относительно X_Q, Y_Q:

$$\dot{\varphi}^2 X_Q + \ddot{\varphi} Y_Q = \ddot{X}_O, \qquad -\ddot{\varphi} X_Q + \dot{\varphi}^2 Y_Q = \ddot{Y}_O. \tag{12}$$

Из условия теоремы следует, что определитель системы (12) $\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4$ отличен от нуля. Поэтому она имеет единственное решение

$$X_Q = \frac{1}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}(\dot{\varphi}^2 \ddot{X}_O - \ddot{\varphi}\ddot{Y}_O), \qquad Y_Q = \frac{1}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}(\ddot{\varphi}^2 \ddot{X}_O + \dot{\varphi}^2 \ddot{Y}_O).$$

Эти формулы можно представить в векторной форме:

$$\overline{OQ} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4}(\omega^2 \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{w}_O). \tag{13}$$

Точка Q называется *мгновенным центром ускорений.*

Из (13) следует геометрический способ нахождения мгновенного центра ускорений (рис. 32). Определим угол β равенством

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

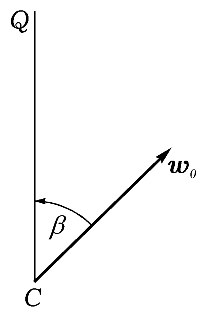

Рис. 32

Этот угол не зависит от выбора полюса и одинаков для всех точек тела. Чтобы получить точку Q, надо вектор $\boldsymbol{w}_O$ повернуть на угол β в направлении вращения фигуры, если вращение ускоренное, и в противоположном направлении, если вращение замедленное. Затем от полюса O в направлении, которое занял повернутый вектор $\boldsymbol{w}_O$, надо отложить отрезок OQ, длина которого вычисляется по формуле

$$OQ = \frac{w_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Конец Q этого отрезка и будет мгновенным центром ускорений. Рис. 32 соответствует ускоренному вращению фигуры против часовой стрелки.

Если мгновенный центр ускорений Q принять теперь за полюс, то ускорение любой точки P в данный момент времени может быть определено так же, как и при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через Q:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{\text{ос}}, \qquad w = QP\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Пример 1. *Пусть диск катится по неподвижной прямой без скольжения и скорость его центра O постоянна* (рис. 33). *Так как при отсутствии скольжения скорость точки P диска, которой он касается неподвижной прямой, равна нулю, то мгновенный центр скоростей совпадает с точкой P. Подвижной центроидой будет обод диска, а неподвижной — прямая, по которой он катится. Так как скорость точки O постоянна, то мгновенный центр ускорений совпадает с центром диска.*

Рассмотренный пример показывает, в частности, что мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений — это, вообще говоря, разные точки.

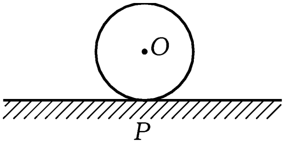

Рис. 33

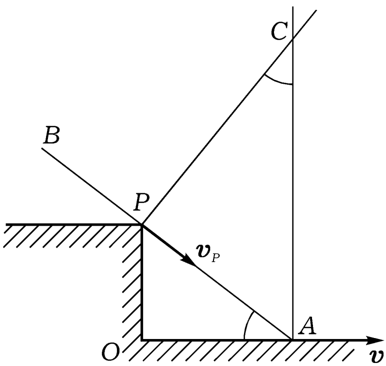

Рис. 34

Пример 2. *Тонкий стержень AB опирается своей точкой P на прямой угол, а концом A скользит по горизонтальной направляющей с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$. Найдем абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки P в зависимости от времени, если $OP = h$ и в начальный момент времени $OA = 0$* (рис. 34).

Скорость точки P направлена вдоль стержня. Мгновенный центр скоростей C будет пересечением перпендикуляров, проведенных к стержню в его точке P и к горизонтальной оси в точке A. Пусть

$OA = x$ $(x = vt)$; тогда из $\triangle AOP$ и $\triangle APC$ имеем

$$AP = \sqrt{h^2 + x^2}, \quad CP = \frac{x\sqrt{h^2 + x^2}}{h}, \quad CA = \frac{h^2 + x^2}{h}.$$

Угловая скорость стержня находится из равенства $v = \omega CA$, откуда

$$\omega = \frac{v}{CA} = \frac{vh}{h^2 + x^2} = \frac{vh}{h^2 + v^2 t^2}.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен к читателю. Вектор углового ускорения стержня $\boldsymbol{\varepsilon}$ также перпендикулярен плоскости рисунка, но его направление противоположно направлению $\boldsymbol{\omega}$ $\left(\text{поскольку } \dfrac{d\omega}{dt} < 0\right)$. Модуль углового ускорения определяется равенством $\varepsilon = \left|\dfrac{d\omega}{dt}\right|$, откуда

$$\varepsilon = \frac{2v^3 ht}{\left(h^2 + v^2 t^2\right)^2}.$$

Для модуля скорости точки P имеем

$$v_P = \omega CP = \frac{v^2 t}{\sqrt{h^2 + v^2 t^2}}.$$

Поскольку точка A является мгновенным центром ускорений $(v = \mathrm{const})$*, то модуль ускорения точки P вычисляется при помощи равенств*

$$w_P = AP\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{v^2 h\sqrt{h^2 + 4v^2 t^2}}{\left(h^2 + v^2 t^2\right)^{3/2}}.$$

28. Кинематические инварианты. Кинематический винт. Снова вернемся к общему случаю движения твердого тела, рассмотренному в п. 24. В формуле (4) для скорости точки P тела угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора точки P. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называют *первым кинематическим инвариантом*. В более узком смысле мы будем называть первым кинематическим инвариантом величину $I_1 = \omega^2$. Далее, из формулы (4) следует, что для любых двух точек тела A и B скалярные произведения их скоростей $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ на вектор $\boldsymbol{\omega}$ одинаковы. Поэтому проекция скорости точки на направление угловой скорости не зависит от выбора этой точки. Скалярное произведение скоростей точек тела на его угловую скорость называется *вторым кинематическим инвариантом*: $I_2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

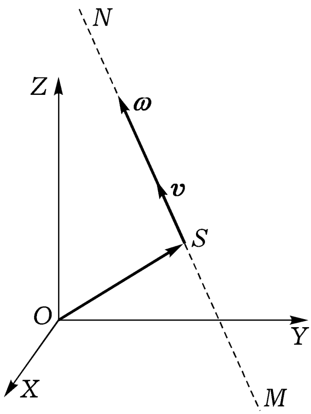

Рис. 35

Покажем, что в самом общем случае движения твердого тела, когда $I_2 \neq 0$, скорости его точек таковы, как если бы тело совершало мгновенно винтовое движение. Для этого, согласно п. 23, надо показать существование такой прямой MN, все точки которой в данный момент времени имеют скорости, направленные вдоль этой прямой и параллельные $\boldsymbol{\omega}$.

Пусть выбран какой-либо полюс O и в данный момент известны его скорость $\boldsymbol{v}_O$ и угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$. Пусть они заданы своими компонентами в системе координат $OXYZ$, получающейся из абсолютной системы координат O_aXYZ при помощи поступательного перемещения (рис. 17):

$$\boldsymbol{v}_O = \left\| \begin{matrix} v_{OX} \\ v_{OY} \\ v_{OZ} \end{matrix} \right\|, \qquad \boldsymbol{\omega} = \left\| \begin{matrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{matrix} \right\|.$$

Если скорость точки S тела (рис. 35) отлична от нуля и параллельна вектору $\boldsymbol{\omega}$, то

$$\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OS} = p\,\boldsymbol{\omega} \quad (p \neq 0).$$

Это равенство является векторным уравнением прямой MN. Если X, Y, Z — координаты любой точки прямой, то это уравнение в скалярной форме запишется в виде

$$\frac{v_{OX} + (\omega_Y Z - \omega_Z Y)}{\omega_X} = \frac{v_{OY} + (\omega_Z X - \omega_X Z)}{\omega_Y} = \\ = \frac{v_{OZ} + (\omega_X Y - \omega_Y X)}{\omega_Z} = p. \tag{14}$$

Прямая (14) называется *мгновенной винтовой осью* тела. Ясно, что все точки мгновенной винтовой оси имеют одинаковые скорости, равные проекции скорости любой точки тела на направление $\boldsymbol{\omega}$. Совокупность угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела и скорости $\boldsymbol{v}$ любой точки мгновенной винтовой оси называют *кинематическим винтом*, а число p — *параметром винта.* Параметр винта выражается через кинематические инварианты по формуле

$$p = \frac{I_2}{I_1}.$$

Кинематический винт называется *правым* или *левым* в зависимости от того, положителен или отрицателен его параметр; рис. 35 соответствует правому винту.

Пример 1. *Пусть в пространстве движется твердое тело и в некоторый момент времени оказываются известными скорости* $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$ *трех его точек* $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ 1,\ 1)$; $\boldsymbol{v}_A(2,\ 1,\ -3)$, $\boldsymbol{v}_B(0,\ 3,\ -1)$, $\boldsymbol{v}_C(-1,\ 2,\ -1)$. *Найдем положение оси кинематического винта и его параметр в рассматриваемый момент времени.*

Примем точку A *за полюс. Тогда* $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$, $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AC}$. *Эти векторные равенства можно записать в виде следующей совместной системы шести линейных уравнений относительно компонент* ω_x, ω_y, ω_z *вектора* $\boldsymbol{\omega}$:

$$-\omega_z = -2,\ \omega_z = 2,\ \omega_x - \omega_y = 2,\ \omega_y - \omega_z = -3,\ \omega_z - \omega_x = 1,\ \omega_x - \omega_y = 2.$$

Решив эту систему, получим

$$\omega_x = 1,\ \omega_y = -1,\ \omega_z = 2.$$

Для кинематических инвариантов I_1 *и* I_2 *имеем такие значения:*

$$I_1 = \omega^2 = 6, \quad I_2 = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = -5.$$

Таким образом, в рассматриваемый момент времени тело совершает мгновенно винтовое движение, причем параметр кинематического винта равен $-{}^5\!/_6$. *Уравнение мгновенной винтовой оси, согласно* (14), *имеет вид*

$$\frac{2 - 2y - z}{1} = \frac{1 + 2x - z}{-1} = \frac{-3 + x + y}{2} = -\frac{5}{6}.$$

§ 5. Сложное движение точки

29. Основные определения. Иногда бывает необходимо изучить движение точки одновременно по отношению к двум системам координат. Пусть система координат $Oxyz$ движется по любому заданному закону относительно абсолютной системы координат O_aXYZ (рис. 17). Это значит, что известны движение полюса O и матрица $\mathbf{A}(t)$, задающая ориентацию осей Ox, Oy, Oz относительно абсолютной системы координат. Пусть в пространстве движется точка P. Ее движение по отношению к системе координат $Oxyz$ называется *относительным движением*. Движение трехгранника $Oxyz$ относительно O_aXYZ называется *переносным движением*. Движение точки относительно системы