Кинематический винт называется *правым* или *левым* в зависимости от того, положителен или отрицателен его параметр; рис. 35 соответствует правому винту.

Пример 1. *Пусть в пространстве движется твердое тело и в некоторый момент времени оказываются известными скорости $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$ трех его точек $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ 1,\ 1)$; $\boldsymbol{v}_A(2,\ 1,\ -3)$, $\boldsymbol{v}_B(0,\ 3,\ -1)$, $\boldsymbol{v}_C(-1,\ 2,\ -1)$. Найдем положение оси кинематического винта и его параметр в рассматриваемый момент времени.*

Примем точку A за полюс. Тогда $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$, $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AC}$. Эти векторные равенства можно записать в виде следующей совместной системы шести линейных уравнений относительно компонент ω_x, ω_y, ω_z вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$-\omega_z = -2,\ \omega_z = 2,\ \omega_x - \omega_y = 2,\ \omega_y - \omega_z = -3,\ \omega_z - \omega_x = 1,\ \omega_x - \omega_y = 2.$$

Решив эту систему, получим

$$\omega_x = 1,\ \omega_y = -1,\ \omega_z = 2.$$

Для кинематических инвариантов I_1 и I_2 имеем такие значения:

$$I_1 = \omega^2 = 6, \quad I_2 = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = -5.$$

Таким образом, в рассматриваемый момент времени тело совершает мгновенно винтовое движение, причем параметр кинематического винта равен $-{}^5\!/_6$. Уравнение мгновенной винтовой оси, согласно (14), *имеет вид*

$$\frac{2 - 2y - z}{1} = \frac{1 + 2x - z}{-1} = \frac{-3 + x + y}{2} = -\frac{5}{6}.$$

§ 5. Сложное движение точки

29. Основные определения. Иногда бывает необходимо изучить движение точки одновременно по отношению к двум системам координат. Пусть система координат $Oxyz$ движется по любому заданному закону относительно абсолютной системы координат O_aXYZ (рис. 17). Это значит, что известны движение полюса O и матрица $\mathbf{A}(t)$, задающая ориентацию осей Ox, Oy, Oz относительно абсолютной системы координат. Пусть в пространстве движется точка P. Ее движение по отношению к системе координат $Oxyz$ называется *относительным движением*. Движение трехгранника $Oxyz$ относительно O_aXYZ называется *переносным движением*. Движение точки относительно системы координат O_aXYZ, определяемое этими составляющими движениями, называется ее сложным или *абсолютным движением.* Задача состоит в установлении связи между основными кинематическими характеристиками движения точки в неподвижной и подвижной системах координат.

Абсолютной скоростью $\boldsymbol{v}_a$ (*абсолютным ускорением* $\boldsymbol{w}_a$) точки называется ее скорость (ускорение) относительно абсолютной системы координат O_aXYZ. *Относительной скоростью* $\boldsymbol{v}_r$ (*относительным ускорением* $\boldsymbol{w}_r$) точки называется ее скорость (ускорение) относительно системы координат $Oxyz$. *Переносной скоростью* $\boldsymbol{v}_e$ (*переносным ускорением* $\boldsymbol{w}_e$) называется скорость (ускорение) той точки P', которая неподвижна в системе координат $Oxyz$ и с которой в данный момент совпадает движущаяся точка P. Иными словами, переносная скорость (переносное ускорение) есть та скорость (ускорение), которую движущаяся точка P имела бы в данный момент, если бы она в этот момент оказалась жестко связанной с подвижной системой координат (т. е. не совершала бы относительного движения).

30. Производная от вектора, заданного своими компонентами относительно подвижной системы координат. Часто приходится встречаться с необходимостью дифференцирования вектора, заданного своими компонентами в системе координат $Oxyz$, движущейся произвольным образом. Скорость изменения этого вектора в неподвижной системе координат O_aXYZ называется его абсолютной производной, а скорость изменения вектора в системе $Oxyz$ — *относительной* или *локальной производной.* Найдем связь между этими производными.

На рис. 17 $\overline{OP} = \boldsymbol{\rho}$ — вектор, заданный в движущейся системе координат $Oxyz$. Тот же вектор $\overline{OP}$, заданный в неподвижной системе координат O_aXYZ, обозначим $\boldsymbol{r}$. Так как движение системы $Oxyz$ задано, то матрица $\mathbf{A}(t)$, определяющая ориентацию подвижной системы координат относительно неподвижной, известна и

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\rho}. \tag{1}$$

Вектор $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ есть абсолютная производная вектора $\overline{OP}$, а вектор $\dfrac{\widetilde{d}\boldsymbol{r}}{dt} = \mathbf{A}(t)\dfrac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$ — его относительная производная. Обе производные заданы в системе координат O_aXYZ (следует заметить, что вектор $\dfrac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$ задан в системе координат $Oxyz$).

Из (1) получаем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{r} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{2}$$

Но так как (см. п. 24)

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость системы координат $Oxyz$ относительно O_aXYZ, то равенство (2) запишется в виде

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{4}$$

Если учесть обозначение для относительной производной, то окончательно получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\widetilde{d}\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{5}$$

Этой формулой устанавливается связь между абсолютной и относительной производными вектора.

Упражнение 4. *Показать, что если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, неподвижна относительно тела, то она неподвижна и относительно абсолютного пространства; показать, что верно также и обратное.*

31. Теорема о сложении скоростей. Связь между относительной, переносной и абсолютной скоростями точки устанавливается следующей теоремой.

Теорема. *Абсолютная скорость точки равна сумме переносной и относительной скоростей.*

Доказательство.

Заметим, что согласно рис. 17 и формуле (1) радиус-вектор точки P в абсолютной системе координат равен $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_o + \boldsymbol{r}$. Продифференцировав $\boldsymbol{R}$ по времени и воспользовавшись равенством (4), получим такое выражение для абсолютной скорости точки P:

$$\boldsymbol{v}_a = \dot{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{R}}_o + \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{6}$$

Вектор $\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ есть скорость той точки подвижной системы координат, в которой в данный момент находится движущаяся точка P, т. е. является переносной скоростью $\boldsymbol{v}_e$. Вектор же $\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}$ есть относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$, заданная в абсолютной системе координат. Следовательно, равенство (6) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r. \tag{7}$$

32. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса). Для получения абсолютного ускорения точки продифференцируем сначала обе части равенства (6) по времени и воспользуемся формулой (4). Имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_a = \dot{\boldsymbol{v}}_a = \dot{\boldsymbol{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \\ = \boldsymbol{w}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}) + \dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение подвижной системы координат $Oxyz$, а вектор $\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}}$ есть относительное ускорение $\boldsymbol{w}_r$. Перепишем равенство (8) в виде

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{9}$$

Вектор $\boldsymbol{w}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ есть ускорение той точки подвижной системы координат, в которой в данный момент находится движущаяся точка P, т. е. является переносным ускорением. Далее, согласно (3), можно написать $\dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}$. Поэтому последние два слагаемых в (9) одинаковы и равны $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$ каждое. Следовательно, формула (9) может быть записана в виде

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$. Вектор $\boldsymbol{w}_c$ называется *ускорением Кориолиса.* Формула (10) выражает *теорему о сложении ускорений.*

Теорема. *Абсолютное ускорение точки равно сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.*

Можно сказать, что часть абсолютного ускорения — ускорение Кориолиса — связана с изменением абсолютной скорости, обусловленным двумя причинами: 1) влиянием переносного движения на относительную скорость (при $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ вектор $\boldsymbol{v}_r$ поворачивается относительно абсолютной системы координат за счет вращения подвижной системы координат); 2) влиянием относительного движения на переносную скорость (при $\boldsymbol{v}_r \neq 0$ положение точки в подвижной системе координат изменяется и, следовательно, изменяется переносная скорость).

Упражнение 5. *Показать, что вклад каждой из указанных причин в величину кориолисова ускорения одинаков и равен $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$.*

Пример 1. *В плоскости движутся поступательно два стержня AB и CD с данными скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Построим скорость $\boldsymbol{v}$ точки P пересечения стержней.*

Абсолютная скорость точки P может быть представлена как сумма переносной скорости $\boldsymbol{v}_1$ стержня AB и относительной скорости в движении точки P по этому стержню. С другой стороны, ее можно представить как сумму переносной скорости $\boldsymbol{v}_2$ стержня CD и относительной скорости точки в ее движении по этому стержню. Отсюда следует способ построения вектора абсолютной скорости точки P: через концы векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ проведем (рис. 36) *прямые, параллельные направлениям стержней AB и CD; точка P_1 пересечения этих прямых и будет концом вектора $\overline{PP_1}$, изображающего абсолютную скорость точки P.*

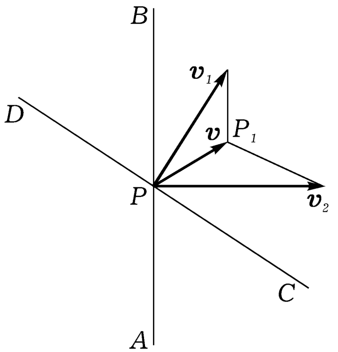

Рис. 36

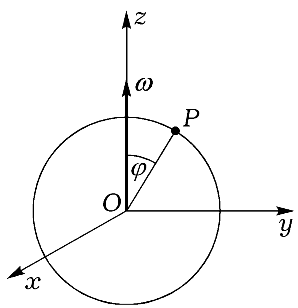

Рис. 37

Пример 2. *Точка P движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R, вращающейся с той же самой угловой скоростью около одного из своих диаметров. Найдем абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки как функции угла φ* (рис. 37).

Введем жестко связанную с вращающейся окружностью систему координат $Oxyz$, начало которой лежит в центре окружности; плоскость Oyz совпадает с плоскостью окружности, а ось Oz направлена вдоль вектора ее угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Переносная скорость точки перпендикулярна плоскости окружности: $\boldsymbol{v}_e' = (-\boldsymbol{\omega} R \sin\varphi,\ 0,\ 0)$. Относительная скорость направлена по касательной к окружности: $\boldsymbol{v}_r{}' = (0,\ \omega R\cos\varphi,\ -\omega R\sin\varphi)$. Абсолютная скорость точки P определяется по формуле (7). *Имеем*

$$\boldsymbol{v}_a' = \omega R(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ -\sin\varphi), \qquad v_a = \omega R\sqrt{1+\sin^2\varphi}.$$

Переносное ускорение лежит в плоскости окружности и перпендикулярно оси вращения: $\boldsymbol{w}'_e = (0,\ -\omega^2 R\sin\varphi,\ 0)$. *Относительное ускорение лежит в плоскости окружности и направлено к ее центру:* $\boldsymbol{w}'_r = (0,\ -\omega^2 R\sin\varphi,\ -\omega^2 R\cos\varphi)$. *Кориолисово ускорение* $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ *перпендикулярно плоскости окружности:* $\boldsymbol{w}'_c = (-2\omega^2 R\cos\varphi,\ 0,\ 0)$. *Абсолютное ускорение точки* P *определяется по формуле* (10). *Имеем*

$$\boldsymbol{w}'_a = -\omega^2 R(2\cos\varphi,\ 2\sin\varphi,\ \cos\varphi), \qquad w_a = \omega^2 R\sqrt{4+\cos^2\varphi}.$$

§ 6. Сложное движение твердого тела

33. Постановка задачи. Пусть твердое тело движется относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, которая, в свою очередь, движется относительно неподвижной системы координат O_aXYZ. Тогда говорят, что по отношению к системе O_aXYZ тело совершает сложное движение, которое состоит из названных двух составляющих движений. Аналогично определяется сложное движение из произвольного числа n составляющих движений.

Задача изучения сложного движения тела состоит в нахождении зависимостей между основными кинематическими характеристиками составляющих движений и сложного движения. Мы будем рассматривать только зависимости между скоростями поступательных движений и между угловыми скоростями. Для простоты ограничимся только случаем двух составляющих движений.

34. Сложение мгновенно поступательных движений. Пусть $\boldsymbol{v}_1$ — скорость мгновенно поступательного движения тела относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, а $\boldsymbol{v}_2$ — скорость мгновенно поступательного движения системы $O_1x_1y_1z_1$ относительно O_aXYZ. Возьмем произвольную точку P тела и найдем ее абсолютную скорость $\boldsymbol{v}_a$. По теореме о сложении скоростей (п. 31)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r. \qquad (1)$$

Для любой точки P тела переносной скоростью $\boldsymbol{v}_e$ будет скорость $\boldsymbol{v}_2$, а относительной скоростью $\boldsymbol{v}_r$ будет скорость $\boldsymbol{v}_1$. Поэтому любая точка P имеет скорость

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

Так как все точки тела имеют в данный момент времени одинаковые скорости, то сложное движение тела является мгновенно поступательным.