Переносное ускорение лежит в плоскости окружности и перпендикулярно оси вращения: $\boldsymbol{w}'_e = (0,\ -\omega^2 R\sin\varphi,\ 0)$. *Относительное ускорение лежит в плоскости окружности и направлено к ее центру:* $\boldsymbol{w}'_r = (0,\ -\omega^2 R\sin\varphi,\ -\omega^2 R\cos\varphi)$. *Кориолисово ускорение* $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ *перпендикулярно плоскости окружности:* $\boldsymbol{w}'_c = (-2\omega^2 R\cos\varphi,\ 0,\ 0)$. *Абсолютное ускорение точки* P *определяется по формуле* (10). *Имеем*

$$\boldsymbol{w}'_a = -\omega^2 R(2\cos\varphi,\ 2\sin\varphi,\ \cos\varphi), \qquad w_a = \omega^2 R\sqrt{4+\cos^2\varphi}.$$

§ 6. Сложное движение твердого тела

33. Постановка задачи. Пусть твердое тело движется относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, которая, в свою очередь, движется относительно неподвижной системы координат O_aXYZ. Тогда говорят, что по отношению к системе O_aXYZ тело совершает сложное движение, которое состоит из названных двух составляющих движений. Аналогично определяется сложное движение из произвольного числа n составляющих движений.

Задача изучения сложного движения тела состоит в нахождении зависимостей между основными кинематическими характеристиками составляющих движений и сложного движения. Мы будем рассматривать только зависимости между скоростями поступательных движений и между угловыми скоростями. Для простоты ограничимся только случаем двух составляющих движений.

34. Сложение мгновенно поступательных движений. Пусть $\boldsymbol{v}_1$ — скорость мгновенно поступательного движения тела относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, а $\boldsymbol{v}_2$ — скорость мгновенно поступательного движения системы $O_1x_1y_1z_1$ относительно O_aXYZ. Возьмем произвольную точку P тела и найдем ее абсолютную скорость $\boldsymbol{v}_a$. По теореме о сложении скоростей (п. 31)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r. \tag{1}$$

Для любой точки P тела переносной скоростью $\boldsymbol{v}_e$ будет скорость $\boldsymbol{v}_2$, а относительной скоростью $\boldsymbol{v}_r$ будет скорость $\boldsymbol{v}_1$. Поэтому любая точка P имеет скорость

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

Так как все точки тела имеют в данный момент времени одинаковые скорости, то сложное движение тела является мгновенно поступательным.

Для случая n составляющих движений аналогично получим мгновенно поступательное движение со скоростью

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i.$$

35. Сложение мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей. Пусть твердое тело совершает относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, а система $O_1x_1y_1z_1$ вращается относительно системы O_aXYZ с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. Предположим, что оси составляющих мгновенных вращений пересекаются в точке A (рис. 38).

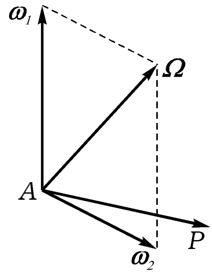

Рис. 38

Точка A имеет в данный момент времени скорость, равную нулю. Следовательно, сложное мгновенное движение представляет собой вращение вокруг оси, проходящей через точку A. Найдем его угловую скорость $\boldsymbol{\Omega}$. Возьмем произвольную точку P твердого тела. Для нахождения ее скорости надо в (1) положить $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{AP}$, $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AP}$. Поэтому абсолютная скорость $\boldsymbol{v}_a$ точки P равна

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AP} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{AP} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \overline{AP}. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\Omega} \times \overline{AP}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) в силу произвольности $\overline{AP}$ следует, что

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Таким образом, в смысле распределения скоростей точек твердого тела совокупность двух мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей эквивалентна одному мгновенному вращению с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений.

Для случая n составляющих мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей аналогично можно получить одно эквивалентное вращение с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i.$$

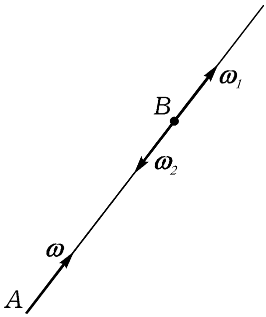

Рис. 39

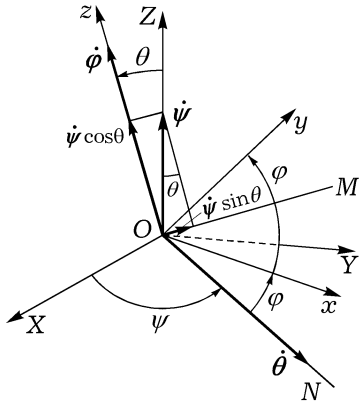

Рис. 40

Замечание 5. *Если два составляющих вращения происходят вокруг одной и той же оси с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями, то $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = 0$ и наличие этих вращений не влияет на скорости точек тела, участвующего в сложном движении. Отсюда, в частности, следует, что $\boldsymbol{\omega}$ — скользящий вектор, т. е. его начало можно перемещать в любую точку линии его действия и от этого скорости точек тела не изменятся. Действительно, пусть тело вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ приложен в точке A оси вращения* (рис. 39). *От точки B оси отложим два вектора $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ такие, что $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$, и рассмотрим сложное вращение тела вокруг одной оси с тремя угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$. Согласно сказанному выше, совокупность двух вращений с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ не влияет на скорости точек тела; эти вращения могут быть исключены из системы трех вращений. Таким образом, вектор $\boldsymbol{\omega}$ оказался сдвинутым вдоль оси вращения на отрезок AB без изменения скоростей точек тела.*

36. Кинематические уравнения Эйлера. Получим выражения проекций мгновенной угловой скорости твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, через углы Эйлера (п. 19) и их производные. Рассматриваемое тело участвует в сложном движении, состоящем из трех вращений: с угловой скоростью $\dot\psi$ вокруг оси OZ, с угловой скоростью $\dot\theta$ вокруг линии узлов ON и с угловой скоростью $\dot\varphi$ вокруг оси Oz (рис. 40). Мгновенная угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ равна сумме угловых скоростей составляющих вращений. Пусть p, q, r — проекции $\boldsymbol{\omega}$ соответственно на оси Ox, Oy, Oz, жестко связанные с телом. Выражения для p, q, r через углы Эйлера и их производные легко получить из рис. 40, на котором вспомогательная прямая OM лежит в плоскости Oxy и перпендикулярна линии узлов. Имеем

$$\begin{aligned} p &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ q &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ r &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Соотношения (4) называются *кинематическими уравнениями Эйлера.* Они широко применяются при исследовании движения твердого тела.

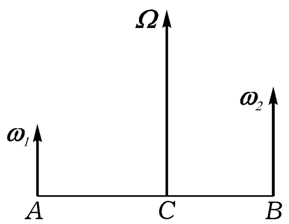

Рис. 41

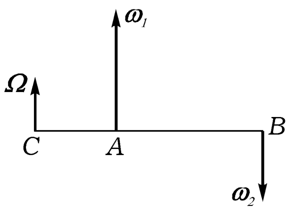

Рис. 42

37. Сложение мгновенных вращений вокруг параллельных осей. Пусть твердое тело совершает мгновенное вращение относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, а система координат $O_1x_1y_1z_1$ вращается относительно абсолютной системы координат O_aXYZ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ и оси вращения параллельны. В этом случае очевидно, что в мгновенном сложном движении скорости точек тела будут такими же, как в плоском движении. Если взять какую-либо прямую в теле, параллельную мгновенным осям вращения составляющих движений, то скорости всех ее точек в данный момент времени будут одинаконы. Поэтому достаточно рассмотреть скорости точек тела, лежащих в какой-либо плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Пусть эта плоскость пересекает плоскость, в которой лежат $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, по прямой AB (рис. 41 и 42).

Если векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ имеют одинаковые направления, то сложное движение представляет собой мгновенное вращение с модулем угловой скорости $\Omega = \omega_1 + \omega_2$; вектор $\boldsymbol{\Omega}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ (рис. 41), параллелен им, направлен в ту же сторону и делит расстояние между ними внутренним образом на части, обратно пропорциональные ω_1 и ω_2, т. е.

$$\omega_1 AC = \omega_2 BC. \tag{5}$$

Действительно, для скорости точки C имеем выражение

$$\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AC} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{BC}.$$

Слагаемые векторы в правой части этого выражения параллельны и противоположно направлены. Но при выполнении равенства (5) они равны по модулю. Поэтому $\boldsymbol{v}_c = 0$. Следовательно, и все точки оси, проходящей через точку C параллельно $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, имеют нулевые скорости. Сложное движение представляет собой мгновенное вращение вокруг этой оси.

Для нахождения угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ сложного движения достаточно рассмотреть скорость одной из точек, не лежащей на мгновенной оси вращения (скорости всех точек тела вполне определяются скоростями трех его точек, не лежащих на одной прямой; см. п. 24). Рассмотрим скорость точки B. С одной стороны, $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AB}$, а с другой — $\boldsymbol{v}_B = \Omega \times \overline{CB}$. Из равенства

$$\boldsymbol{\Omega} \times \overline{CB} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AB} \tag{6}$$

следует, что $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\Omega}$ параллельны и одинаково направлены. Для нахождения модуля вектора $\boldsymbol{\Omega}$ приравниваем модули обеих частей равенства (6):

$$\Omega CB = \omega_1 AB. \tag{7}$$

Но, используя (5), можно получить, что

$$AB = AC + CB = \frac{\omega_2}{\omega_1} CB + CB = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} CB. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.

Аналогично рассматривается случай противоположных направлений $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Примем для определенности, что $\omega_1 > \omega_2$. В этом случае сложное движение представляет собой мгновенное вращение с угловой скоростью $\Omega = \omega_1 - \omega_2$; вектор $\boldsymbol{\Omega}$ расположен в плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, направлен в сторону большей угловой скорости и делит расстояние между ними внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, т. е. $\omega_1 AC = \omega_2 BC$ (рис. 42).

38. Пара вращений. *Пара вращений* есть совокупность двух мгновенных вращений вокруг параллельных осей с равными по модулю, но противоположно направленными мгновенными угловыми скоростями.

Плоскость, в которой лежат векторы $\boldsymbol{\omega}_1$, и $\boldsymbol{\omega}_2$ ($\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$), составляющие пару вращений, называют *плоскостью пары*, а расстояние d между осями мгновенных вращений, соответствующими $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, называют *плечом пары* (рис. 43). Вектор $\overline{AB} \times \boldsymbol{\omega}_2$ называют *моментом пары.*

Покажем, что твердое тело, участвующее в паре вращений, совершает мгновенно поступательное движение со скоростью, равной моменту пары. Для этого рассмотрим произвольную точку P тела и вычислим ее скорость

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AP} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{BP} = \overline{AP} \times \boldsymbol{\omega}_2 - \overline{BP} \times \boldsymbol{\omega}_2 = \\ = (\overline{AP} - \overline{BP}) \times \boldsymbol{\omega}_2 = \overline{AB} \times \boldsymbol{\omega}_2.$$

Таким образом, пара вращений эквивалентна мгновенно поступательному движению со скоростью $\boldsymbol{v}$, равной моменту пары. Вектор $\boldsymbol{v}$ — свободный вектор, так как он может быть приложен в любой точке тела (все точки тела имеют одинаковую скорость $\boldsymbol{v}$). Скорость $\boldsymbol{v}$ перпендикулярна плоскости пары и направлена так, что наблюдатель с конца $\boldsymbol{v}$ «видит» векторы пары $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ указывающими на вращение плоскости пары против часовой стрелки. Если ввести обозначение $\omega = |\boldsymbol{\omega}_1| = |\boldsymbol{\omega}_2|$, то

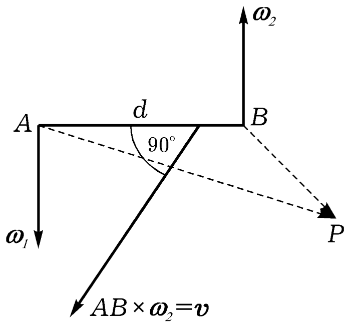

Рис. 43

$$v = \omega d. \tag{9}$$

Наоборот, всякое мгновенно поступательное движение тела может быть (бесконечным числом способов) заменено на пару вращений, плоскость которой перпендикулярна $\boldsymbol{v}$, а плечо пары d и модули $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, равные ω, связаны соотношением (9). Направления $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ выбираются так, чтобы момент эквивалентной пары был направлен так же, как вектор $\boldsymbol{v}$.

39. Сложение мгновенно поступательного и вращательного движений. Пусть твердое тело совершает относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а система координат $O_1x_1y_1z_1$ движется относительно абсолютной системы O_aXYZ мгновенно поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}$. Угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ равен α.

Чтобы установить характер сложного мгновенного движения тела, разложим вектор $\boldsymbol{v}$ на две составляющие $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Первая составляющая направлена вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$, а вторая перпендикулярна ему (рис. 44), $v_1 = v\cos\alpha$, $v_2 = v\sin\alpha$. Согласно п. 38, мгновенно поступательное движение можно заменить парой вращений, выбрав соответствующим образом составляющие ее угловые скорости и плечо. В рассматриваемом случае заменим $\boldsymbol{v}_2$ парой, составленной угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}$, расположив $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ в плоскос-

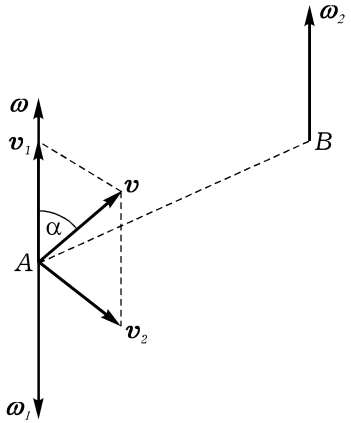

Рис. 44

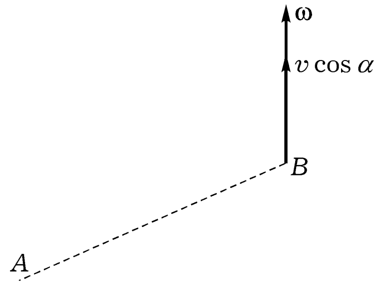

Рис. 45

ти, перпендикулярной $\boldsymbol{v}_2$, как показано на рис. 44. При этом, согласно (9), $v_2 = v \sin\alpha = AB \cdot \omega$. Мгновенные вращения вокруг одной и той же оси, проходящей через точку A с равными по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$, могут быть отброшены, так как они не влияют на скорости точек тела (см. п. 35). Останутся только мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ и мгновенно поступательное движение со скоростью $\boldsymbol{v}_1$, параллельной $\boldsymbol{\omega}_2$.

Следовательно, сложное движение будет мгновенно винтовым (рис. 45). Мгновенная винтовая ось смещена параллельно угловой скорости тела на расстояние $AB = \dfrac{v\sin\alpha}{\omega}$. Параметр p кинематического винта равен $\dfrac{v\cos\alpha}{\omega}$. В частном случае, когда $\alpha = 0$ (вектор $\boldsymbol{v}$ параллелен $\boldsymbol{\omega}$), нет необходимости проводить указанные выше преобразования, так как уже исходная совокупность $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ образует кинематический винт. Если $\alpha = \pi/2$ (вектор $\boldsymbol{v}$ перпендикулярен $\boldsymbol{\omega}$), то параметр кинематического винта равен нулю и сложное движение будет мгновенным вращением с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно оси, проходящей через точку B и смещенной параллельно $\boldsymbol{\omega}$ от точки A на расстояние $AB = v/\omega$.

В заключение отметим, что, изучая мгновенное кинематическое состояние твердого тела, мы видели, что существуют четыре простейших мгновенных движения тела: покой, поступательное движение, вращение, мгновенно винтовое движение. Разнообразные движения тела в природе и технике получаются как непрерывная упорядоченная последовательность этих простейших мгновенных движений.